NS I Mathematics
B : Mathematical Methods in Science

自然科学 I 数学
B : 数学の方法

by

Hiroshi Suzuki

鈴木 寛

平成 20 年 9 月 9 日

はじめに

2001 年度から、一般教育科目として「自然科学Ｉ　数学Ｂ：数学の方法」を５年間教えてきました。このたび、お休みをもらって、もう一つの数学の一般教育科目「自然科学Ｉ　数学Ａ：数学の世界」を教えることになりました。そこで、この５年間貯えてきたものを、まとめるこにしました。一つの記録とすると共に、これからこのコースを教える他の教員の方にも見て頂き、さらに改善されていくことを願っています。

理学科以外の学生が対象ですが、幅は広く、数学の一般教育科目で何を教えるかは非常に難しい問題だと思います。このコースでは、いくつかの目的をかかげ、その一つの形を模索して来ました。受講生からはポジティブな応答が多かったですが、どのような事を学習したかを調査したわけではありません。教育の難しさを感じると共に、何を教えたらよいのか、５年間このコースと通して考えることができたことは幸いでした。数学の世界ではまた別の形を模索したいと思います。

2006 年 3 月
鈴木寛

改訂にあたって

2007 年度、一年ぶりで「数学の方法」を教えました。このノートは教える私にとってはもちろん、受講生にとっても、助けになったと思います。誤植を修正しながら、加筆しました。そろそろ取捨選択の必要性を感じられる程になりました。

2008 年度からは、学科が無くなり、理学科生以外という条件も意味が無くなります。授業自体も変えていかなければいけないのかも知れません。

2008 年 3 月
鈴木寛

目 次

第1章　このコースについて **1**

第2章　集合と論理 **3**
2.1 数学を学ぶにあたって . . . 3
2.2 論理 . . . 5
2.2.1 全称命題・存在命題* . . . 7
2.3 集合と集合の演算 . . . 9
2.4 お茶の時間 . . . 11
2.4.1 Russel のパラドックス . . . 11
2.4.2 ベン図 . . . 12
2.4.3 ブール代数と電子回路 . . . 12
2.4.4 自然言語と記号論理 . . . 13
2.4.5 法科大学院適性試験問題：論理的判断力問題 . . . 17
2.4.6 いつも数学・もっと Google . . . 20
2.5 練習問題 . . . 25

第3章　線形代数 **35**
3.1 連立一次方程式 . . . 35
3.1.1 連立一次方程式とその解 . . . 35
3.1.2 行に関する基本変形 . . . 36
3.1.3 既約ガウス行列と基本定理 . . . 40
3.2 行列 . . . 46
3.2.1 行列の定義と演算 . . . 46
3.2.2 行列の積と連立一次方程式 . . . 51
3.2.3 逆行列 . . . 52
3.2.4 基本変形と行列 . . . 55
3.2.5 連立一次方程式と可逆性 . . . 58
3.2.6 2×2 行列* . . . 60
3.2.7 連立一次方程式まとめ . . . 62
3.3 お茶の時間 . . . 64
3.3.1 経済における均衡分析 . . . 64
3.3.2 オーディオ CD のなかの線形代数 . . . 69
3.4 練習問題 . . . 76

第 4 章　微分積分 **91**
4.1 多項式と多項式関数 91
4.1.1 多項式 91
4.1.2 組み立て除法 92
4.1.3 補間法 93
4.1.4 数学的帰納法* 95
4.1.5 差分と多項式関数* 97
4.2 極限と関数の連続性 99
4.2.1 数列の極限と級数 99
4.2.2 関数の極限・連続性 102
4.2.3 指数関数・対数関数 105
4.2.4 Nepier の数（自然対数の底） e 106
4.2.5 三角関数* 107
4.3 微分係数と導関数 108
4.3.1 合成関数の微分 115
4.3.2 x^n の微分 116
4.3.3 対数関数の微分 117
4.3.4 x^n の微分再述 118
4.4 微分の応用：関数とグラフ 119
4.4.1 極限の計算 119
4.4.2 極大・極小 121
4.4.3 L'Hospital の定理 124
4.5 不定積分と定積分 125
4.5.1 原始関数と不定積分 125
4.5.2 不定積分の計算 126
4.5.3 定積分と微積分学の基本定理 127
4.6 微分方程式 131
4.7 お茶の時間 133
4.7.1 指数関数の身近な例 133
4.7.2 マグニチュードに関する問題 135
4.7.3 表計算ソフト Excel を使ってみよう 137
4.7.4 正規分布曲線と T スコア 138
4.7.5 雨粒の落下速度 139
4.8 練習問題 142

第 5 章　おわりに **176**
5.1 線形性 176

第 6 章　まとめの問題 **177**
6.1 復習問題 177
6.2 期末試験問題 180
6.2.1 2005 年度 180
6.2.2 2004 年度 192
6.2.3 2003 年度 203
6.2.4 2002 年度 211
6.2.5 2001 年度 222

付 録 A このコースを楽しんで下さった受講生へ **228**

第1章　このコースについて

最近（2000 年度）まで私は、組合せ論などをテーマに、数学を純粋に楽しむ講義を一般教育科目として教えてきました。楽しむといっても、論証を大切にして、毎週行なわれる小テストでは、受講生に証明を書いてもらい、採点して返すといったことをしてきました。これは、なかなか楽しい授業で、数学の世界が広がったとか、純粋に楽しむことができたなどと、コメントを学生からもらいました。（「数学の構造」ホームページ内の「期末試験における学生からのコメント」など参照。）大学の一般教育科目の授業として、このような授業は大切だと思っています。特に、数学離れ、理科離れなど、高校数学などを楽しめなかった、しかし優秀な学生さんたちにとって、数学の世界の広がりと、かつ、論理的思考を通して、数学を学ぶ意義をもう一度、問い直すことは重要だと思うからです。

しかし、大学での一般教育科目または自然科学系以外の学生向けの数学として果たしてこれだけで良いのかと疑問を常に持っていました。線形代数や、微分積分といった数学においても基礎的な学問は、数学のみに限らず、自然科学を学ぶ時の必須の数学的手段（道具）であるだけでなく、社会科学を学ぶ時にも、さらに広く政治・経済・企業経営などの実務の面においても必要欠くべからざる道具であり、数学を利用することにより広がる世界がたくさんあることは、周知の通りです。世界広しと言えども、数学の試験なしに大学で学ぶ機会を与えられるのは、日本以外ではほんのいくつかの国のごく少数の分野に限られることは、上記の事実の受け止め方が日本では異常な状態にあることを示していると思います。ものを合理的・科学的に考えようとする場合には、数学あるいは、数学的な考え方を避けて通ることは、あり得ないことであり、また、数式による表現を避けて通ることは、言葉なしにコミュニケーションを計るようなものです。もちろんそれもある程度は可能です。しかし、今の、理系、文系にわけての教育、それも、高校 2 年からは、ほとんど数学を勉強しない学生は、自らの学習の道を大幅に狭くしてしまっていると私は思っています。もちろんその責任は、学生にあるのではなく、そのような受験制度にした大学、教育機関の当事者（教員および大学などの行政者）、そして教育行政機関および政府です。難しいこと、即効性のないことはいろいろと理由をつけて、避けて通ろうとするが、それでいて、夢中になるのは、役に立たないことばかりという人間のおもしろさと悲しい現実も背景にありますが。しかし、責任を問うばかりではなく、本学のような教養学部教育の大学でまず数学、そして自然科学を積極的にすべての学生が学ぶことが最初ではないかと思います。理学科ではないから、数学は必要ないなどと言う学生がいるとしたら、本当に残念なことです。

この授業では、高校教育の現状も踏まえ、高校で勉強することも丁寧に復習し補いながら学んでいきたいと思います。社会科学で数学に出会う時、積極的に学べるよう、また、

理学科の自然科学の科目を学ぶ時に、数式で違和感を感じないよう、さらに、必要に応じてまたは、自発的に理学科の基礎科目の数学を履修する時の助けとなるような、一つのステップを提供することが大事なのではないかと思いこのコースを作りました。

内容は、集合と論理、線形代数と、微分積分にしました。数学を道具としてまた、自然科学や社会科学のある部分を記述する言葉として数学を考えた時、基本となるものの代表が、これらだからです。一学期間ですから、網羅的にまたこれらを修得するというレベルに達することを目的にしていません。まず数学をするときに基本的なことばとして、集合と論理について簡単に見てから、線形代数や、微分積分の考え方、そして基本的ないくつかの項目について学ぶことができればと思っています。これは、大学での学習において数学を学んでいく、数学を用いていく最初のステップです。もしくは入口と言った方が良いかも知れません。これを機会に次のステップへと進んで下さることを期待しています。

奇異に聞こえるかも知れませんが、なるべく高校で勉強するものは内容から減らし、高校で 3 年間数学を勉強した人も、大学ではじめて勉強することを中心にしました。高校の勉強を主とすると、どうしても、高校で十分な時間を費やした人とそうでない人に大きな差が出てしまったり、高校で十分勉強した人には面白くなかったりするからです。最低限必要なことは、高校で勉強することを確認していきますが、高校の問題が解けるようになるようなことを中心には据えていません。でも、高校の時、やり方は分かっていたけれど、なぜそうするのか良く分からなかった、というようなことについても、理解できればと思っています。

線形代数と微分積分の数学的内容は大体、理学科の線形代数学 I と、微分積分学 I または、初等微分積分に含まれるものです。授業自体は大分違った雰囲気になると思いますが。数学の内容に確興味のある人は、私のホームページに、これらの科目についても詳しい内容が書いてありますから、是非見てみて下さい。数学の魅力の一つは深く学べば学ぶほど美しさがきわだって見えてくることです。

受講の動機もまちまちな皆さんとこのクラスで、上で述べたようなだいそれたことができるのか、私も正直不安がありますが、コミュニケーションをとりながら大学の一般教育科目での数学について一緒に考えることができればと思っています。

最後に一言。線形代数や、微分積分に対応する下記の理学科の科目は、2001 年度から社会科学科のすべておよび国際関係学科の一部の専修分野で、専門科目として認められるようになったことをお伝えしておきます。

線形代数学 I-II-III、初等微分積分、微分積分学 I-II-III、解析学概論 I-II

第2章　集合と論理

この章では、集合と論理という数学を記述していく上での基本的な言語について学びます。

2.1　数学を学ぶにあたって

まず簡単に、集合とは何かを定義しておきましょう。

集合 (Set)：　「もの」の集まり

どんなものをもってきてもよいが、それがその集まりの中にあるかないかがはっきりと定まっているようなものでなければならない。

例 2.1.1　「ものの集まり」であっても以下のものは、集合ではない。
テロリスト支援国家全体、英語のできるICU生全体、国際人全体。はっきりとした基準がないからである。

例 2.1.2　次の集合は、それぞれ何を意味するでしょうか。これらは、等しいでしょうか。

$$A = \{2, -1\},\ B = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\},\ C = \{x \mid x^3 - 3x - 2 = 0\}.$$

例 2.1.3　2007年大学全入時代に突入などと言われますが、それは、どういう意味でしょうか。進学率はどうやって決まるのでしょうか。大学の募集人員は、調査すればわかるとして、大学は、４年生大学だけを言うのか、短期大学も入れるのか、大学進学志願者はどうやって決めるのか、浪人の人などはどうやって数えるのでしょうか。こういうことを考えるときにも、計算は百分率ですが、分母や分子にくる数の元の集団が集合としてはっきりしていなければ、求めることはできません。文部科学省のホームページには何種類かの進学率が年度ごとにのってますが、そのうちの一つには、次のような式がついていました。

$$\text{進学率} = \frac{\text{当該年度の大学・短大の入学者数}}{\text{３年前の中学卒業者数}} \times 100$$

これなら計算できそうです。しかし、海外の大学に進学したり、ICUの９月生のように、海外からの受験者は含まれないことになりますね。それは、無視できる数なのでしょうか。いずれは、この式も変えないといけないかも知れません。
新聞を見ていて、自分の興味のある分野でこのような数値が出てきたら、それは、どうやって計算したのか、考えてみてはどうですか。例えば、「喫煙者の肺ガンでの死亡率」などどうやって調べるのでしょうか。

$A=\{2,3,5,7\}$ のように、A を表すのに A の元をすべて列挙する定義を外延的定義といい、$A=\{x \mid x$ は 10 以下の素数 $\}$ の様に、その元の満たすべき条件を記述することによる定義を内包的定義という。ここで、素数 x とは、1 と x 以外に約数がない 2 以上の自然数である。

元、要素 (Element)： 集合 A のなかに入っている個々の「もの」を A の元、要素といい、a が集合 A の元であることを、記号で

$$a \in A \text{ または } A \ni a$$

と書く。a は A の属する、a は A に含まれるなどと言う。その否定 (a は A の元ではない) を

$$a \notin A \text{ または } A \not\ni a$$

と書く。

部分集合 (Subset)： 集合 A、B において A のすべての元が、B の元であるとき、A は B の部分集合であると言い、

$$A \subset B \text{ または } B \supset A$$

と書く。

共通部分 (Intersection)： 二つの集合 A, B において、A と B の両方に共通な元全体の集合を A と B との共通部分といい $A \cap B$ と書く。すなわち、

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}.$$

和集合 (Union)： 二つの集合 A, B において、A の元と B の元とを全部寄せ集めて得られる集合を A と B との和集合といい $A \cup B$ と書く。すなわち、

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}.$$

このように、決めていきたいのですが、すこし問題があります。たとえば、$A=\{x \mid P(x)\}$, $B=\{y \mid Q(y)\}$ と、A は $P(x)$ という条件をみたす x 全部、B は $Q(y)$ という条件を満たす y 全部とするとします。たとえば、$P(x)$ は x は素数である。という命題（条件)、$Q(y)$ は y は、10 以下の数である。とします。すると、$A \cap B$ は、10 以下の素数全部を意味しますから、$A \cap B=\{2,3,5,7\}$ となりますが、$A \cup B$ はどうでしょうか。素数であるか、10 以下の数であるかどちらかを意味することになります。ここでは、「か」とか「または」の意味をはっきりさせないといけませんし、誤解のないようにしようとすると、たくさんの注釈が必要になります。そこで、集合について学んでいく前に、命題や条件の組合せをどのようにするかを決めておいたほうがよいことになります。集合については、一端中断して、論理の話をします。

2.2　論理

まず命題を定義します。

命題 (Proposition)： 正しい (真 True) か正しくない (偽 False) が明確に区別できる文を命題という。「正しい」を「成り立つ」、「正しくない」を「成り立たない」と考えても良い。

真理値 (Truth Value)： 命題が真であることを「T」(True)、偽であることを「F」(False) で表す。これを命題の真理値という。

否定 (negation)・論理和 (logical 'or')・論理積 (logical 'and')・含意 (implication)： $\neg P$（命題 P の否定)、$P \vee Q$（命題 P と Q の論理和)、$P \wedge Q$（命題 P と Q の論理積)、$P \Rightarrow Q$（命題 P は Q を含意）を次の真理値をもつ命題と定義する。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

P、Q、R が命題である時、$\neg P$、$P \vee Q$、$P \wedge Q$、$P \Rightarrow Q$ も命題である。

$\neg P$ は「P ではない。」ということを表現したものです。P が真のときに、偽、P が偽のときに 真であるような命題だと定義しています。A を集合とするとき、$a \in A$ は一つの命題ですから、$\neg(a \in A)$ も一つの命題です。これは、$a \notin A$ を表しています。$3 > 5$ も命題です。これは、偽な命題です。この否定 $\neg(3 > 5)$ は何を表しているでしょうか。これは、$3 \leqq 5$ を表しています。これは真の命題です。

数学語では、'and'「かつ」は 'logical and'「論理積」を、'or'「または」は 'logical or'「論理和」をあらわします。自然言語では曖昧ですが、数学ではある利用法に明確にしておきます。それを明確に定義する方法が、この真理表である。例えば、$3 \leqq 5$ は $(3 < 5) \vee (3 = 5)$ を表します。実は、$\leqq$ と言うことを決める時に、そのように定義するのですが。

例 2.2.1 $(\neg p) \vee Q$, $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ と $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ の真理表を求めてみましょう。

P	Q	$(\neg P)$	$\vee$	Q	$(\neg Q)$	$\Rightarrow$	$(\neg P)$	$(P \wedge Q)$	$\Rightarrow$	P
T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F
F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F

$(\neg P) \vee Q$ および $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ の真理値と $P \Rightarrow Q$ の真理値は P, Q の真理値が何であっても同じになります。P, Q などの真理値が論理式の真理値をきめるので、真理値の値をとる関数と言う意味で、一つ一つの論理式によって、真理値関数が一つずつ決まる、という言い方をします。二つの論理式が同一の真理値関数を決める時、この二つの論理式は互いに等値であるといいます。このことを $\equiv$ で表します。P, Q に関する論理式としては同じことを意味しているといったことです。

$$(\neg P) \vee Q \equiv P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$$

$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ を $P \Rightarrow Q$ の対偶 (contraposition) と言います。この二つの真理値がすべて等しいと言うことは、命題の対偶はその命題と等値ということになります。ある命題が正しいことを証明するには、その対偶が正しいことを証明すれば良いことになります。対偶のそのまた対偶はもとの命題にもどります。

$(\neg P) \vee Q \equiv P \Rightarrow Q$ ですから、論理式のなかに、$\Rightarrow$ が出てきたら、$\neq$ と $\vee$ とあとは、演算の順序（どこから計算するか）を決めるかっこを使って、書き替えることができることも言っています。すなわち、$\Rightarrow$ は使わなくても、式を書くことができるわけです。

また、$(P \wedge Q) \Rightarrow P$ の真理値は、P と Q の真理値が何であっても、真です。つまりこの様な命題は常に真だということになります。

練習問題 2.2.1 次の真理表を作れ。

1. $(P \wedge Q) \Rightarrow \neg Q$
2. $((\neg P) \vee Q) \Rightarrow P$

命題 2.2.1 次が成立する。

(1) $P \vee P \equiv P.$

(2) $P \wedge P \equiv P.$

(3) $\neg(\neg P) \equiv P.$

(4) $P \vee Q \equiv Q \vee P.$

(5) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R).$

(6) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P.$

(7) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R).$

(8) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$

(9) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$

(10) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q).$

(11) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.

上の式は、それぞれ、真理表を書くことによって確かめることができます。P, Q, R と三つの命題に関するものは、それぞれの真理値が、T か F によって、8 通りの場合に分かれます。

練習問題 2.2.2 命題 2.2.1 を証明せよ。

この命題にある式を使うと、真理表を書かなくても、等値であることを示すことができます。

例 2.2.2 命題 2.2.1 と、$P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$ を使って、$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P) \equiv P \Rightarrow Q$ を証明してみましょう。まず、$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ は、$\neg Q$ を ひとかたまりの命題、$\neg P$ をひとかたまりの命題と見て、$P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$ を使うと、

$$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P) \equiv (\neg(\neg Q)) \vee (\neg P) \equiv Q \vee (\neg P) \equiv (\neg P) \vee Q \equiv P \Rightarrow Q.$$

となります。

練習問題 2.2.3 次の式を、上の命題と、$(\neg P) \vee Q \equiv P \Rightarrow Q$ を使って示せ。

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

例 2.2.3 次の式は、一般には、成立しません。

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv P \wedge (Q \vee R).$$

真理表を書いてみても、分かりますが、P, Q, R の真理値がそれぞれ、F, T, T である時を考えると、左辺は、T ですが、右辺は、F になります。かっこの付け方に注意しなければいけないという例です。

2.2.1 全称命題・存在命題*

全称命題 (Universal Proposition) : 「任意の（すべての）x について命題 $P(x)$ が成り立つ」を全称命題といい $\forall x\, P(x)$ と書く。

存在命題 (Existential Proposition) : 「ある x について命題 $P(x)$ が成り立つ」を存在命題といい $\exists x\, P(x)$ と書く。

x はある条件をみたすものについて考えますので、たとえば x の動く範囲が集合 A だとすると、$(\forall x \in A)P(x)$ などと書きます。この意味は、"For all $x \in A$, $P(x)$ holds." です。"for all" は、"for every" とか "for any" と言うこともあります。$(\exists x \in A)P(x)$ は、"There exists some $x \in A$ such that $P(x)$ holds." となります。きれいな日本語で表すの

が難しい部分でもあります。例えば、$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ などを整数といいます。整数全体を $\boldsymbol{Z}$ で表すとします。

$$(\forall x \in \boldsymbol{Z})((\exists y \in \boldsymbol{Z})(x + y = 0))$$

などということを言いたいわけです。わかりますか。どんな整数 x をとってきても、整数 y で $x + y = 0$ となるものがありますよ。と言う命題を言っているわけです。$y = -x$ とすれば良いわけです。どんな x と言っていますが、それは整数なら何でもと言う意味です。1 でも -3 でも 0 でも。もうすでに日常語では、表現するのが難しくなっていると思います。日常語では x と y がよもや同じ場合は考えないでしょう。でも、たとえば上の命題で $x = 0$ のときは $y = 0$ です。上の命題の意味を約束通り理解して、論理を組み立てていくには、やはり訓練が必要です。数学を勉強するときに一番力がつくのはその約束（だけ）の上に組み立てていく推論力だと思いますがどうでしょうか。

上の命題の (10), (11) の拡張ですが、次が成立します。

$$\neg((\exists x)P(x)) = \forall x(\neg P(x)),\ \neg((\forall x)P(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

練習問題 2.2.4 $\boldsymbol{R}$ で実数（数全体、正の数、負の数、少数や分数、0 をすべて含むものとします）をあらわすものとする。以下のうち、正しいものは証明し、誤っているものについてはその命題の否定は何であるか書いてみましょう。

1. $(\forall x \in \boldsymbol{R})[x^2 > 0]$.
2. $(\exists x \in \boldsymbol{R})[x^2 > 0]$.
3. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[x + y = 0]$.
4. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[x + y = 0]$.
5. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[x + y = y]$.
6. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[x + y = y]$.
7. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[xy = 1]$.
8. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[xy = 0]$.
9. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[xy = y]$.
10. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[xy = y]$.

2.3　集合と集合の演算

論理演算を定義しましたが、これを用いて、集合の演算を定義しましょう。

部分集合 (Subset)： 集合 A、B において A のすべての元が、B の元であるとき、A は B の部分集合であると言い、

$$A \subset B \text{ または } B \supset A$$

と書く。すなわち、

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B) \text{ がつねに真 } \Leftrightarrow (\forall x \in A)[x \in B]$$

$A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{x \mid Q(x)\}$ と書かれている時は、

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)].$$

集合の相等 (Equality of Sets)： 二つの集合 A, B において、$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つ時 A と B は相等であると言い $A = B$ と書く。ですから二つの集合 A と B が等しいことをいうときは、$x \in A$ はいつでも、$x \in B$ であり、$x \in B$ はいつでも $x \in A$ であることをいえば良いことになります。

共通部分 (Intersection)： 二つの集合 A, B において、A と B の両方に共通な元全体の集合を A と B との共通部分といい $A \cap B$ と書く。すなわち、

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} = \{x \mid x \in A, x \in B\}.$$

和集合 (Union)： 二つの集合 A, B において、A の元と B の元とを全部寄せ集めて得られる集合を A と B との和集合といい $A \cup B$ と書く。すなわち、

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

A と B の両方に入っているときは、$(x \in A) \vee (x \in B)$ は真ですから、$A \cup B$ にも入っていることになります。またはという日本語も使いますが、これは、両方の条件をともに満たすときも含まれるという事になります。

ベン図 (Venn Diagram by John Venn (1834–1923)) で、集合の共通部分、和集合について表してみましょう。

空集合 (Empty Set)： 元を全く含まない集合を空集合といい $\emptyset$ で表す。

差集合 (Difference)： 二つの集合 A, B において、A の元で B の元ではない元全体の集合を A と B との差集合といい、$A \setminus B$ または $A - B$ と書く。すなわち、

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

定義から $A \setminus B \subset A$ です。

補集合 (Complement)： 全体集合 (U または Ω が良く使われる：(Universal Set)) を一つ定めた時その部分集合 A に対し、A に含まれない要素全体を A^c または $\overline{A}$ で表し、A の補集合と言う。 定義から $A \cap \overline{A} = \emptyset$ かつ、$A \cup \overline{A} = U$ となっています。差集合も $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ と表すことができます。

対称差（Symmetric Difference)*： $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ を A と B の対称差という。$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ となっています。

例 2.3.1 一般に命題 P, Q について $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ でした。（例 2.2.1）したがって、

$$(x \in A) \wedge (x \in B) \Rightarrow x \in A$$

が常に成り立ちますから、$A \cap B \subset A$ となっています。$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ でしたから、$A \cap B \subset B$ も成立します。直観的には、明らかです。しかし、複雑になると、直観に頼るのは危険です。

$A \cap B \subset A$ かつ $A \cap B \subset B$ ですが、同様に、$A \subset A \cup B$、$B \subset A \cup B$ も簡単にわかります。

例 2.3.2

1. $\boldsymbol{N} = \{x \mid x \text{ は自然数}\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: The set of natural numbers.
2. $\boldsymbol{Z} = \{x \mid x \text{ は整数}\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$: The set of integers.
3. $\boldsymbol{R} = \{x \mid x \text{ は実数}\}$: The set of real numbers.
4. $S = \{x \mid x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0\} = \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

   このように簡単には具体的に元が分かりにくいものもありますが、この集まりに入るか入らないかは決まっているので、これは集合です。
5. A を 2 の倍数である整数全体。B を 3 の倍数である整数全体。C を 4 の倍数である整数全体。D を 5 の倍数である整数全体、E を 6 の倍数である整数全体とする。整数に関する命題を次のように定義する。$P(x)$：x は 2 の倍数である。$Q(x)$：x は 3 の倍数である。$R(x)$：x は 4 の倍数である。 $S(x)$：x は 5 の倍数である。このとき、次を証明せよ。

   (a) $A \cap B = E$。

   (b) $A \cup B \neq \boldsymbol{Z}$。

   (c) $C \subset A$。

   (d) $A \cap C \subset E$。

   (e) $E \not\subset A \cap C$。

練習問題 2.3.1 以下を証明せよ。

1. $A \cap B = A$ ならば $A \subset B$

   Let $x \in A$. Since $A = A \cap B \subset B$, $x \in B$. Thus $x \in A$ implies $x \in B$. We have $A \subset B$.

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

問題 2.3.1 1. 7 の集合のすべての部分をあらわす図をそれぞれの集合がつながっている図形として平面に書くことができるでしょうか。$2^7 = 128$ の部分にわかれることになりますが、一つ一つの部分集合が穴がない平面図形としてあらわすことができるでしょうか。（クラスで 6 つまでは例を示しました。）

2. 同様の条件のもとで、n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ のすべての部分を表す図を作れるでしょうか。

注. この続きは、論理学概論 (HPh104, Introduction to Logic)、数学通論 I (MSMa210, Basic Concept of Modern Mathematics I)、計算理論 I-II (NSCo 300, 310, Theory of Computation I-II) で扱っています。

2.4 お茶の時間

2.4.1 Russel のパラドックス

集合は数学の厳密化の中で生まれてきたものですが、それ自体のなかに矛盾を含むと指摘されたのが、以下の Russel の逆理です。

Russel の逆理（１９０３）： 集合を次のように 2 つの種類に分類する。すなわち自分自身を元として持たない集合を第一種の集合とし、自分自身を元としてもつ集合を第二種の集合とする。すべての集合は第一種または第二種である。そこですべての第一種の集合を M とする。かりに M が第一種の集合とすると、M 自身は M の元ではないはずであるが、M の定義からは、第一種の集合 M は M の元でなければならない。これは、矛盾である。またかりに M が第二種の集合であるとすれば、M 自身が M の元であることになるが、M の定義からは、第二種の集合 M は M の元ではありえない。すなわち M を第一種としても、第二種としても、矛盾をおこす。これは不合理である。

Let S be the set of all sets. Let

$$C_1 = \{M \in S \mid M \notin M\},\ C_2 = \{M \in S \mid M \in M\}.$$

Both $C_1 \in C_1$ and $C_1 \notin C_1$ imply a contradiction. ■

最初に集合を定義しましたが、厳密には不完全です。数学自体のなかの矛盾は、数学者をおおいに悩ませせましたが、それがまた、数学基礎論というような新しい分野を生み出し、現在では基本的には、上のような矛盾については、解決しています。詳しくは説明できませんが、考える範囲をたとえば、ICU の学生全体とか、実数およびその部分集合全体などと限っておけば、矛盾が起こらないことがわかっています。もうすこし、知りたい人は、「新装版：集合とはなにか (はじめて学ぶ人のために)」竹内外史著、講談社 (BLUE BACKS B1332 ISBN4-06-257332-6, 2001.5.20) [19] を参考にしてください。

2.4.2　ベン図

このように 4 つ以上の集合になると、Venn diagram で表すことは難しくなります。たとえば、3 つの集合では、それぞれに入っている部分と入っていない部分で、一般的には、$2^3 = 8$ 個の部分が図に必要ですが、4 つの集合では、$2^4 = 16$ 個、5 つの集合では、$2^5 = 32$ 個の部分が必要であることがわかります。

たとえば 4 つの集合の場合、次のようなことも考えられます。

	1	2	3	4
a				
b	$\star$	$\star$		
c	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
d				

A はタテ 1,2 列、B はヨコ a, b 行、C はヨコ b, c 行、D は タテ 2,3 列からなるそれぞれ 8 個のマス目の部分で表される部分集合とする。

たとえば、星印のところを 集合 E とすると、$E = (A \cup \overline{B}) \cap C$ となります。

さて、5 個、6 個、7 個 ... の集合について、このような図が作れますか。どのような条件を付けると綺麗なずができるかな。

2.4.3　ブール代数と電子回路

Distinctive Normal Form (DNF)　P と Q から論理演算によって作られた命題は、それぞれが T か F かによって 4 通りの場合があることがわかります。3 つの命題から得られる時は 8 種類ですね。それらに、かってに T か F をかきこんだとき、それを表す論理式は $\neg, \wedge, \vee$ から作れるでしょうか。

二つの場合を考えてみましょう。$P \wedge Q$ は P, Q どちらも T のときだけ T でそれ以外は F です。では、$(\neg P) \wedge Q$ はどうですか。これは、P が F で Q が T の時だけ、T で

そうでないとき、F となっています。それでは、P, Q がどちらも T のときか、P が F で Q が T のときこの二つの場合に T でそれ以外で F というものはどうでしょうか。実は、これは、

$$(P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge Q)$$

と表せば良いことがわかります。どうようの考えで、T の値をとるべきところを一つずつ $\wedge$ を用いてあらわし、それらを $\vee$ で結ぶと、どんな真理値関数も作ることができることがわかります。このようにして作ったものを Disticntive Normal Form と言います。でも実は、上で作ったものは、Q と同じになっています。つまり、このようにして作ったものは、必ずしも一番簡単な（短い）表現ではないと言うことです。

じつは、この一番簡単な表現を見つけると言う問題は、回路の設計などでもとても重要なのですが、難問でまだ完全解答はわからないのだそうです。

もう一つは、$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ と 4 つを使って勉強してきましたが、これらはすべて必要なのだろうかと言うことです。実は、たとえば $\neg$ と $\wedge$ だけあれば十分であることがわかっています。もちろんそうすると表現は長くなりますが。

2.4.4 自然言語と記号論理

このように、記号を使って、命題に演算を定義して論理を組み立てていく学問を記号論理といいます。論理を扱っていますが、自然言語の言葉の使い方とは、違っています。

例 2.4.1 またはの使い方：「太郎か花子」
太郎か花子は来るよ（包含的）。太郎か花子が来るよ（排他的）。
23 日か、22 日（列挙でも順番に意味がある場合がある）
「日本語と数理」細井勉著、共立出版 (ISBN 4-320-01344-1, 1985.10.1)

「または」が使われる場所によって意味が少し変わることは上の例からもわかると思います。曖昧さをなくすため、論理和は、真理値で定義するわけです。しかし、含意が「ならば」の記号化だということには、疑問をいだく方が多いようです。友人がこんな説明がいいよと教えてくれたのは、次の例です。

おとうさんが、こどもに、「こんど数学で 5 をとったらゲーム機を買ってあげるよ」と約束したとする。5 をとったのに、ゲーム機を買ってあげなかったら、おとうさんは約束違反だけれど、5 をとれなかったのに、ゲーム機を買ってあげたとする。それは、約束違反ではない、ですね。

仮定が成り立っていない時は、結論が成り立っていても、成り立っていなくても、嘘ではない、真だという意味で、$P \Rightarrow Q$ は P の真理値が F のときは、Q の真理値が何であっても、真としていることに注意して下さい。

日常的には、「あす晴れたらピクニック」といったら、雨でピクニックということはないでしょう。でも、あす晴れたらという条件を満たしていなければ、ピクニックに行っても、いかなくてもそれは、偽にはならないと約束しましょうということです。はっきりい

いたければ、「あす晴れたらピクニック、あす晴れなかったらピクニックはしません」と数学のことばではいうことにしましょうということです。もちろん、晴れの定義が曖昧ということは、別として。

たとえば、英語でルールなどを記述するときは、'A or B or both' で論理和をあらわして、混乱を避けます。曖昧さがなにで、それを避けるためにはどうするかは、数学の問題ではありませんが、論理的に考える訓練のもとで、コミュニケーションのときに、これらに、注意深くなることは混乱をさけるためにも大切だと思います。しかし、数学の世界を絶対として、日常の会話でも、「または」といえば、数学の意味の論理和の意味でそれ以外は間違いなどとするような数学帝国主義は困りますね。

上で引用した、「日本語と数理」細井勉著、共立出版 (ISBN 4-320-01344-1, 1985.10.1) からもう少し引用しましょう。

1. 「あしたはどこへ行ったのでしょう」

   きょうとあしたの区分点？　いつでも「あした」は遠くへ行ってしまうのです。

2. 「いまって、なぜか、ねばっこい」

   関数の連続性でも「議論のための幅」が必要なイプシロン・デルタ論法。

3. 「西の方って」

   西って何でしょうか。西というのは、北極に近づくにつれて曲がるんですよ。

   西という概念は、ずっとむかし、世界がまだ平らだったときに、いえ、平らだと思われていたときに使われていた概念なんですね。そして、地球が丸くなったとき、いえ、球形であることがわかったときに、修正しないといけなかったのに、うまい修正がなされなかったのに違いありません。（３７ページ）

4. 「無限って、簡単に言いますが」

   無限に速いコンピュータ？

   フェルマーの定理のコンピュータによる証明。

   休憩をはさみ、1/3 の累乗で推移。

   $f(x) = x\sin^3 x - \cos^3 x$ を満たす実数 x？

   無限度はいくらでも高められる。

   いくら速い、たとえば、無限に速いコンピュータを実現しても、実行できない仕事がある。

5. 「ぜんぶ白くない、ってどういうこと」

   ぜんぶやさしくなかった。ぜんぶできなかった。参加者はぜんぶ小学生ではなかった。この薬をぜんぶのんではいけないよ。ぜんぶで二千円じゃない。根はぜんぶ正

でない。根はぜんぶえられなかった。直線はぜんぶ一点で交わらない。根はぜんぶでたかだかｎ個でない。三角形の内角ぜんぶの和は２直角でない。

all not も not all も部分否定

All is not gold that glitters.　光るもの必ずしも金ならず。

6. 「『勝手に』といっても、勝手にはできません」

任意のｎに対して、A^n を求めよ。

プロの数学者を育てようとしている場合には、数学者の方言になれさせることも必要かと思います。そうでない場合でも、数学の講義中は、学生に数学方言になれてもらう必要は、いくらかはありましょう。でも、教師の側に、数学方言についての認識が、ある程度は、必要ではないかと思うのです。そして折りにふれて、学生に方言の解説をしてやることが望まれると思うのです。（７７ページ）

7. 「部分は一部分とは限りません」

彼らのぜんぶが幸福とは限らない。

係数のすべてが正とは限らない。

8. 「限らない、ということ」

石は黒か白だとします。ここに石が三つありあんす。つまり、

黒黒黒、黒黒白、黒白白、白白白

のいずれかの組み合わせになっていると思われます。このとき、

（１）ぜんぶの石が白とは限らない。

ということを教えられたとします。上の四つの組み合わせのうち、可能性のあるものに○、ないものに×をつけてください。○は必要ならいくつつけてもかまいません。

○○○○;40-47%、×○○○;24-38%、○○○×;19-8% sophomore, freshman

（２）ぜんぶの石が白というわけではない。

○○○○;6%、○○○×;60.6%、×○○○;9.1%、×○○×;24.2%

（３）「○○○×」という状態を表す文を「ぜんぶ」を入れて作ってください。

ぜんぶの石が白ではない。ぜんぶの石が白と言うわけではない。ぜんぶの石が白ということはない。ぜんぶの石が白とはかぎらない。

9. 「ならば、っていうこと」

右に曲がると駅がある。これができたらごほうびをあげるよ。これができれば天才だ。雨が止んだらでかけよう。花は桜木、人は武士。

彼が行くなら僕も行く。¡-¿ 僕が行くなら彼も行く。

この人なら、太郎だ（含意)、これを押すとブザーがなる（因果)、冬が終わる春になる（時間の前後)、ここが神田なら次は東京（空間の前後)、雪がとけると、水になる（状態の推移)、雪がとけると春になる（状況の変化）

数学で使っている「ならば」文は、ふつうに信じられているほどには、論理的に明快とはいえないように思う。

10. 「『ならば』は、なぜ、難しい」

明日晴れなら動物園へ行く。裏を引きずる。

雨が降れば、かえるが鳴く。かえるがなかなければ雨が降らない。

夏が来れば尾瀬を思いだす。尾瀬を思いださなければ、夏が来ない。

$p \to q$ で q が行動または、判断のとき注意が必要。p というスイッチがついた行動・判断

if P then Q

未成年の子が婚姻をするには、父母の同意を得なければならない。（民法第７３７条）

成年の子の婚姻には、父母の同意は要しない。（反対解釈）

11. 「及びと並びに」

ＡかＢとＣ

Ａ定食かハンバーグとライス。おにぎりかサンドイッチと飲み物。

ＡかＢかつＣ、ＡまたはＢとＣ

短い語は長い語よりも強く結合すると約束したらよい？

12. 「２２日か２３日」「２３日か２２日」（列挙でも順番に意味がある場合がある）

13. 「そのつぎに小さい数」

ここに5個の数があります。それは、10，20，30，40，50 です。そこで質問です。

(1) 10 の次に小さい数はいくつですか。
(2) 50 の次に小さい数はいくつですか。
(3) 30 の次に小さい数はいくつですか。

14. 「５日まで」

今年は最初のゴミの収集日は１月６日です。

５日までゴミを出さないでください。６日までゴミを出さないでください。

15. 「だぁれもなんにも見なかった」

三重否定

16. 「ないものはない」
17. 「なければならない」
18. 「お弁当にしゅうまいはいかがですか」

    お弁当にお茶はいかがですか。お弁当にサンドイッチはいかがですか。

19. 「国語辞典と反例」

    counter-example OED にはあるが、日本の辞書にはない。

20. 「法則と理論」

    法則：守らなければならないきまり、おきて。一定の条件のもとでは、どこでも成り立つ事物相互の関係。

2.4.5 法科大学院適性試験問題：論理的判断力問題

1. 次の主張のなかで、論理的に正しいものを選びなさい。

   (1) 火のないところには絶対に煙は立たないものとする。いま、煙は立っていないとすると、火はないと判断することができる。

   (2) 風が吹けば必ず桶屋が儲かるものとする。いま、桶屋が儲かっていないならば、風は吹かなかったと判断することができる。

   (3) 夕焼けがあれば、必ず翌日は晴れるものとする。今日は、夕焼けがなかったら、明日は晴れないと判断することができる。

   (4) 鳥は多くの場合空を飛ぶものとする。チコは空を飛ばないとすると、チコは鳥ではないと判断することができる。

   (5) 故意または過失があれば罪になるものとする。いま扱っている事件では、加害者は故意または過失がないから、彼は罪にはならないと判断することができる。

2. 次の文章を読み、下の問いに答えよ。

   ある大学で入学試験を行なった日に雪が降った。その地方ではめったに雪が降ることはなかったので、交通機関に遅れが生じ、多くの遅刻者が出ることになった。このことについて、次の A, B, C の三つの主張が三人から出された。

   A. 遅刻した人は電車とバスを両方利用していた。

   B. 電車もバスも利用しなかった人は遅刻しなかった。

   C. 電車を利用しなかった人は遅刻しなかった。

   問: A, B, C の主張相互の論理的関係として正しいものを、次の (1)–(6) のうちから一つ選べ。

(1) A が正しいとき、必ず B も正しい。また、B が正しいとき、必ず C も正しい。
(2) A が正しいとき、必ず C も正しい。また、C が正しいとき、必ず B も正しい。
(3) B が正しいとき、必ず A も正しい。また、A が正しいとき、必ず C も正しい。
(4) B が正しいとき、必ず C も正しい。また、C が正しいとき、必ず A も正しい。
(5) C が正しいとき、必ず A も正しい。また、A が正しいとき、必ず B も正しい。
(6) C が正しいとき、必ず B も正しい。また、B が正しいとき、必ず A も正しい。

3. 次の文章を読み、したの問い（問１、問２）に答えよ。

新しい接続表現「とんで」を次のように定義する。

> **定義：** 文 x が真であり、かつ文 y が偽である場合、文「x とんで y」は真とし、それ以外の場合、すなわち、文 x が偽であるか、文 y が真である場合には、文「x とんで y」は偽とする。

ここで、x, y などの文は、真又は、偽のいずれかであるとする。また、「x とんで y」も一つの文であるから、それと文 z を「とんで」で接続して、「(x とんで y) とんで z」や、「z とんで (x とんで y)」のような文を作ることができる。

問１ 次の文 A, B, C の真偽の組合せとして正しいものを、下の (1) – (6) のうちから一つ選べ。ただし、イワシ、カラス及びタヌキの分類については常識に従うものとする。

A.　（イワシは魚だ、とんで、カラスは鳥だ）、とんで、タヌキはほ乳類だ。
B.　イワシは魚だ、とんで、（カラスは鳥だ、とんで、タヌキはほ乳類だ）。
C.　イワシは魚だ、とんで、（カラスは両生類だ、とんで、タヌキはは虫類だ）。

(1) A は真、B と C は偽である。
(2) B は真、A と C は偽である。
(3) C は真、A と B は偽である。
(4) B と C は真、A は偽である。
(5) A と C は真、B は偽である。
(6) A と B は真、C は偽である。

問２ 次の (1) – (5) の中から誤っているものを一つ選べ。

(1) 「x とんで x」は、x の真偽によらず常に偽である。
(2) 「(x とんで y) とんで x」は、x と y の真偽によらず常に偽である。
(3) 「x とんで (y とんで x)」は、x の真偽と同じである。
(4) 「(x とんで y) とんで y」は、「x とんで y」の真偽と同じである。
(5) 「x とんで (x とんで y)」の真偽は、「y とんで (x とんで x)」 の真偽と同じである。

法科大学院の適性試験に興味のあるかたは：

- http://www.jlf.or.jp/
- 朝日新聞 2003 年 9 月 2 日 朝刊

解答：1. (2) 正解率 35.6%　 2. (2) 3-1. (4), 3-2 (5).

どうですか、ICU の一般学習能力試験を思い出した方、こういう問題は得意だという方、ちんぷんかんぷんな方、いろいろでしょう。これは、数学の論理の問題からとられていることは確かですね。少し時間をかけて適性試験手にはいるものは解いてみましたが、数学的に考えると難しいと思える問題はありませんでした。しかし、少し問題も感じましたので、ひとこと。それは、日常語、自然言語を用いる危なさですね。法科大学院のためだから、法律家を目指す人に動機を失わさないようにするには、純粋に数学の言葉で書くことはできないのでしょうが、曖昧さを含むことになります。

たとえば最初の問題を考えてみることにしましょう。

> 火のないところには絶対に煙は立たないものとする。いま、煙は立っていないとすると、火はないと判断することができる。

これは、逆命題は一般的には成り立たないから、これは正しくないというのが、ここでの「正解」です。しかし、正解でないというためには、こう判断することができない状況が存在して（反例があって）はじめてこの命題は正しくないはずです。では、どのような状況が考えられるのでしょうか。一応、数学的に考えるため、単純化しましょう。

命題 P:　火がない

命題 Q:　煙がない

このもとで最初の仮定は「$P \Rightarrow Q$」と考えることができると思います。正しいかどうか判断する結論は「$Q \Rightarrow P$」。ですから反例があるとすると「$P \Rightarrow Q$」が True で、「$Q \Rightarrow P$」が False という場合です。あとの方が False となるのは、P が False で Q が True の場合だけで、確かに、その場合は最初の命題は、True ですから、もしそのような状況があるとすると、「$P \Rightarrow Q$」が True で、「$Q \Rightarrow P$」が False。すなわち、次の命題は False となります。

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$$

では、P が False で Q が True とはどのような状況でしょうか。「火はないが、煙はある」という状態です。「火がある」とはどういう状態で、「煙がある」とはどういう状態かを定義しなければ議論にならないといいきるのはへ理屈でしょうか。確かに「火は消えたけれどまだ煙はくすぶっているよ」なんてことは日常的には良くいいますね。「でも、それはまだ火が完全には消えていないということでしょう」といわれると、言い返すのは難しい。何を言っているかわかりますか。煙があるときはまだ火があるのだとすると、$Q \Rightarrow P$

は True であることになります。最初の問題を正しいとした人もおそらく、そういうことを考えたからなのでしょう。ですから、

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$$

という数学の命題をいつでも真 (True) とするのは間違いですが、最初の問題を論理的に正しくないというかどうかは単純ではありません。まあ他の問題を見ると、比較において、正しくなさそうなのがあるから、まあこれは誤りだと出題者は言いたいのでしょう。と出題者に愛をもって接さないと痛い目にあうかもしれませんね。

日常語でこの論理の話しをすると、いまのような難しいこと（数学ではない問題）を多く含んでしまいます。でも、同時に、数学を純粋にすることによって、上のような反例はどのような場合かをはっきりさせることができるのも確かですね。

最後に、ICU に 10 年程前までおられた野崎先生がよく使われていたという命題。

怒られないと勉強しない。

これを $P \Rightarrow Q$ の形であらわしてその対偶 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg Q)$ を考えてみましょう。最初の命題が真であることと、対偶が真であることは同値なはずです。

勉強すると怒られる。

こうなりましたか。なんか変な気はしませんか。この話しをしたら、わがやでは「起こさないと起きない」を今のように言い換えると「起きたら起こされる」になって絶対におかしい。でも何がおかしいのだろうと言うことになってしまいました。行動に関係した、時間的前後関係があるときは、気をつけないといけないと言うことですね。注意して表現すると「勉強しているのは、怒られたからだ。」「起きたのは、起こされたからだ。」となるわけですね。そう考えると上で考えた「あす晴れならピクニックへ行く」というのも時間的前後関係が含まれていますから、注意しないといけないことになりますね。これを「ピクニックにいかなければ明日は晴れない。」と同じだと思う人はいないでしょうけれど。

2.4.6　いつも数学・もっと Google

- Google 検索は大文字・小文字の区別はしません。

  ICU と icu は同じ検索結果です。

- 検索語は 10 語まで。space を入れなくても、勝手に単語に区切るので、続ければ良いというわけではありません。

- 複合検索はできない組合せもあります。

“*phrase*”　Quatation marks で囲むと一続きの言葉として検索します。

“International Christian University” とすると、International Christian University の検索結果の 1/200 になります。

AND space または、AND は logical and $\wedge$ を意味し、キーワード全てが含まれているものを探します。

“International Christian University” AND “国際基督教大学” とすると、上のさらに 1/30 になります。

OR OR または、| は logical or $\vee$ を意味し、キーワードのどちらかを含むものを探します。

“International Christian University” OR “国際基督教大学” とすると、“International Christian University” の検索の 3 倍ぐらいヒットします。

(*keys*) 括弧を使うこともできます。たとえば次のように使います。

(“International Christian University” OR ICU) AND Mitaka

これは次のものとも同じです。

(“International Christian University” | ICU) Mitaka

縦棒と I (ninth letter) は違いますから気をつけて。

- minus はそれを含まないという意味です。negation $\neg$ そのものは無いのですが、これを使えば、同じことができます。

教養学部 - (“国際基督教大学” “東京大学”)

ちょっと注意が必要です。論理的には、(教養学部 - “国際基督教大学”) | (教養学部 - “東京大学”) と同じはずですが、– においては、教養学部 - “国際基督教大学” - “東京大学” を検索するようです。

これ以外にも、任意の文字列を表す “*” や、AND や OR のような予約語や、THE や A の様に短いものを自動的に省いてしまうことを避ける、+ もありますが、詳しくは下のサイトなどで調べて下さい。

特別構文を少し説明します。intitle:, allintitle:, intext:, allintext:, inurl:, allinurl:, inanchor:, allinanchor:, site:, link:, cash:, daterange:, filetype:, related:, info:, phonebook:, rphonebook:, bphonebook:, stocks: などです。

“phonebook:, rphonebook:, bphonebook:” はアメリカの電話番号が調べられるというものですし、“stocks: ” は株ですから、これらは日常的にはあまり関係ないでしょう。説明を必要とするものもあるので、少しだけ言葉の解説。

“*http://douweosinga.com/projects/googlehacks/*” は “Google Hacks” という本のホームページの住所ですが、この様な住所を URL (Uniform Resource Locator) といいます。これに対して、以下で SITE といっているのは、douweosinga.com または、www.icu.ac.jp のことで、domain 名とか、host 名とか普通言われるものです。ホームページが置いてある機械の住所と思って下さい。つまり、url のほうが細かいと思って下さって構いません。

site: colon が必要です。site 名の最後が、jp なら日本、国を表したり、com という commercial site を表したりいまでは、たくさんできましたから簡単ではありませんが、日本の学術機関は最後が、ac.jp アメリカは、edu 他の国は、ac.+ 国名のところと、edu. + 国名のところとあるようです。

教科書検定 site:mext.go.jp

これは、文部科学省内の、教科書検定という項目を含むところを探します。

(ICU | 国際基督教大学) -site:icu.ac.jp

これは、icu.ac.jp 以外のところで、最初の keyword のどちらかを含むところを探します。

ビスフェノール site:ac.jp

「ビスフェノール A」は環境ホルモンまたは、内分泌攪乱物質とよばれるものですが、これは安全だということを主張している企業も多くあります。学術的にはどういっているのかをみるときは、site などで絞るのも良いでしょう。-site:(com co.jp) も一つの方法です。

inurl: URL の中に限定して調べます。site と同じようにも使えますが、例えば、help を探そう等と言うときにも有効です。

Google inurl:help site:ac.jp

これは、Google という言葉を含み、URL に help を含むものを ac.jp の中から検索します。

地球温暖化 (inurl:ac.jp | inurl:go.jp), (ICU | 国際基督教大学) (inurl:co.jp | inurl:com)

上にも書いたように、site も使えます。

link: そのページにリンクされているページを検索します。

link:www.icu.ac.jp

filetype: filetype は、例えば、Hypertext Markup Language で書かれたものは、file の最後に、html や、htm がついていてそれを認識するようになっている場合が多く、最後に doc とついているとは Microsoft Word の文書などとなっているわけです。詳しくは、

http://nic.phys.ethz.ch/readme/113 などを見て下さい。

filetype:pdf site:icu.ac.jp

とすると、icu.ac.jp がつくサイトにある、pdf file を見つけてくれます。

w3.icu.ac.jp の中などアクセス制限がある場合には、Google 検索は使えません。現在は、Namazu という全文検索システムが一応使える状態にありますが、十分ではないようです。

他にもいろいろとありますが、電卓機能は便利なので、書いておきます。

電卓機能：　通常の電卓よりはかなり便利で、換算などは、オススメです。太字の答えを返してくれます。

70 * 3 * 10 + 120

(70 * 3 * 10) + 120 = 2 220

seventy times three times ten plus one hundred and twenty

(seventy times three times ten) plus one hundred and twenty = two thousand two hundred twenty

50 * 45 minutes in hours

50 * 45 minutes = 37.5 hours

18 degree c in f

18 degree Celsius = 64.4 degrees Fahrenheit

42.195 km in mile

42.19500 kilometers = 26.2187575 mile

2 pint in cc

2 US pint = 946.35295 cc

Google で運営するサイト：　次のものは、その中で検索もまた使えます。directory, groups, images, news, catalogs, froogle　これらの言葉のあとに、google.com をつけて下さい。

Google 検索結果の視覚化:　次のサイトで、Enter Starting URL に、たとえば、www.icu.ac.jp とでも入れてみて下さい。少し待つと、ちょっと感激するかな。上のボタンの Title だと日本語が化けるので、url を選んだ方がおもしろいかも知れません。

http://touchgraph.com/TGGoogleBrowser.html

Page Rank Algorithm:　Google でどのようなものを一番上にリストするかは、重要ですよね。特に宣伝の為には、このページの評価点を与えるのが、次の計算式です。

$$PR(A) = (1-d) + d\left(\frac{PR(T1)}{C(T1)} + \cdots + \frac{PR(Tn)}{C(Tn)}\right)$$

- $T1, \ldots, Tn$ は page A にリンクを張っているページです。
- $PR(A)$ は page A の PageRank です。
- $PR(T1), \ldots, PR(Tn)$ は page $T1, \ldots, Tn$ の PageRank です。
- $C(T1), \ldots, C(Tn)$ は、page $T1, \ldots, Tn$ から外に向けられているリンクの数。
- d は $0 < d < 1$ である制動係数といわれるもので、通常は、0.85 となっています。

被リンクが多く、リンクしてくれているところの PageRank が大きく、かつ、そのページのリンク数が少ないとき、自分の PageRank が大きくなりますね。

この節の内容は [1, 2, 3, 4, 5] を参考にしました。現在は、Google も maps や、earth も登場し、さらに世界が広がっています。

このあと、たてつづけに Google 関連の書籍および、ネット検索に関するものが出版されています。図書館にもかなり入っていますので、調べてみて下さい。

注意：論理式を使った検索で $(key1) - (key2, key3)$ とした場合、単に論理式を翻訳すると $(key1) \wedge \neg(key2 \wedge key3)$ となりますが、実際には、$(key1) \wedge \neg(key2 \vee key3)$ が検索されます。いろいろとためしてみて下さい。

モンティ・ホール・ジレンマ

これは、数学者も簡単な論理を間違えるという例として引用されるものです。

> マリリンへ「あなたがゲーム番組に出ていて、3 つのドアのうち一つを選ぶとします。一つのドアの後ろには車があって、あとの二つのドアの後ろには山羊がいます。あなたは、ドアを一つ、たとえば一番のドアを選んだとします。番組の司会者は残った二つのドアのうち、一つ、たとえば三番のドアを開けます。司会者は、それぞれのドアの後ろに何があるのかを知っています。三番目のドアには山羊がいました。ここで司会者はあなたに、「二番目のドアに変えますか。」と聞きます。さて、二番のドアに変えた方がいいでしょうか。」（クレイグ・F・ウィタカー）
>
> クレイグへ「はい、変えるべきです。最初に選んだドアで車にあたる確率は 1/3 ですが、二番目のドアであたる確率は 2/3 です。次のように考えるとわかりやすいでしょう。たとえば、100 万のドアがあったとします。あなたは、その中から一番のドアを選びました。司会者はドアの後ろに何があるか知っていて、賞品の入っているドアは開けません。司会者は 77 万 7777 番のドアをのぞいて、のこりすべてのドアを開けました。あなただったら、すぐに 77 万 7777 番に変えるでしょう。

これには、たくさんの数学者が反論。結局、マリリンが正しいことが証明された有名な問題。日常の問題を数学語に厳密に翻訳することが、数学者にも難しいことをあらわす一例。

「気がつかなかった数字の罠　論理思考力トレーニング法」マリリン・ヴォス・サヴァント (Marilyn vos Savant) 著、東方雅美訳 中央経済社 ISBN4-502-36500-9 [18].

2.5　練習問題

Quiz 1, 2005

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	x
T	T	T			F
T	T	F			F
T	F	T			T
T	F	F			F
F	T	T			F
F	T	F			T
F	F	T			F
F	F	F			T

[**判定と理由**]

2. $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\wedge$ は使わないこと。

3. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。

$$\begin{aligned} x \quad \equiv \quad & ((((\neg\, p) \underline{\quad} (\neg\, q)) \underline{\quad} (\neg\, r)) \ \vee \\ & (((\underline{\quad}\, p) \underline{\quad} (\neg\, q)) \ \wedge \ (\underline{\quad}\, r))) \underline{\quad} \\ & (((\underline{\quad}\, p) \ \wedge \ (\underline{\quad}\, q)) \underline{\quad} (\underline{\quad}\, r)) \end{aligned}$$

Quiz 1, 2005, 解答

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$(p$	$\vee$	$q)$	$\Rightarrow$	r	$(p$	$\Rightarrow$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)$	x
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F
T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	F
T	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F
F	T	F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	F	T

[**判定と理由**]

二つの論理式の真理値が、p, q, r の真理値に関わらず等しいから、等値である。すなわち、上の式は成立する。

2. $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\wedge$ は使わないこと。

   解：一般的に $a \Rightarrow b \equiv (\neg a) \vee b$。上の二つの論理式は等しいから、前の式を書き替えると、次のようになる。

$$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r \equiv (\neg(p \vee q)) \vee r$$

3. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。

$$\begin{aligned} x \quad \equiv \quad & ((((\neg\, p) \underline{\wedge} (\neg\, q)) \underline{\wedge} (\neg\, r)) \ \vee \\ & (((\underline{\quad} p) \underline{\wedge} (\neg\, q)) \ \wedge \ (\underline{\quad} r))) \underline{\vee} \\ & (((\underline{\neg} p) \ \wedge \ (\underline{\quad} q)) \underline{\wedge} (\underline{\neg}\, r)) \end{aligned}$$

Quiz 1, 2004

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

[**判定と理由**]

2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\vee$ は使わないこと。

3. *key1* または *key2* を含み、かつ *key3* は含むが、*key4* は含まない項目を Google で検索したい。どのような検索式をインプットすれば良いか。ここで、*key1* などは検索語を表すものとする。

Quiz 1, 2004, 解答

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\Rightarrow$	r	p	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)$
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	T	F	F
T	F	T	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
T	F	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	F
F	T	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
F	T	F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	F
F	F	T	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
F	F	F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	F

[**判定と理由**]

解：成立しない。p, q, r の真理値がそれぞれ F, T, F である場合は、$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ の真理値は F であるが、$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ の真理値は T であり、等しくない。したがって、真理値が同じではない場合があるので、等値ではない。

2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\vee$ は使わないこと。

   解：一般に、命題 x, y について $x \Rightarrow y \equiv (\neg x) \vee y$ であること、$\neg(\neg x) = x$、$\neg(x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y)$ であることを用いる。

$$\begin{aligned}(p \Rightarrow q) \Rightarrow r &= \neg(p \Rightarrow q) \vee r = \neg((\neg p) \vee q) \vee r \\ &= (p \wedge (\neg q)) \vee r = \neg(\neg((p \wedge (\neg q)) \vee r)) \\ &= \neg(\neg(p \wedge (\neg q)) \wedge (\neg r))\end{aligned}$$

3. *key1* または *key2* を含み、かつ *key3* は含むが、*key4* は含まない項目を Google で検索したい。どのような検索式をインプットすれば良いか。ここで、*key1* などは検索語を表すものとする。

   解：

$$(\ \textit{key1}\ \ \mathrm{OR}\ \ \textit{key2}\ )\quad \mathrm{AND}\quad \textit{key3}\ -\ \textit{key4}$$

   または、

$$(\ \textit{key1}\ \mid\ \textit{key2}\ )\quad \textit{key3}\ -\ \textit{key4}.$$

Quiz 1, 2003

1. p, q を命題とする。このとき、下の真理表のような真理値をもつ命題 x, y を p, q, $\neg$, $\vee$ を用いて表せ。$\wedge$ や $\Rightarrow$ は使ってはいけないが、括弧は使っても良い。(p, q, $\neg$, $\vee$ や括弧は何度用いても良い。)

p	q	x	y
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	F

$x \quad \equiv$

$y \quad \equiv$

2. p, q, r を命題とする。このとき、下の真理表を完成することによって、次の式が成り立つかどうか判定せよ。理由も記せ。

$$(p \vee q) \Rightarrow (\neg r) \equiv \neg(p \vee (q \wedge r)).$$

p	q	r	$(p \vee q) \Rightarrow (\neg r)$	$\neg (p \vee (q \wedge r))$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

[**判定と理由**]

Quiz 1, 2003, 解答

1. p, q を命題とする。このとき、下の真理表のような真理値をもつ命題 x, y を p, q, $\neg$, $\vee$ を用いて表せ。$\wedge$ や $\Rightarrow$ は使ってはいけないが、括弧は使っても良い。(p, q, $\neg$, $\vee$ や括弧は何度用いても良い。)

p	q	x	y
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	F

$$x \equiv (\neg p) \vee q$$

$$y \equiv \neg((\neg p) \vee (\neg q))$$

気付いた方が多いと思いますが、$x \equiv p \Rightarrow q$, $y \equiv p \wedge q$ です。これらが $\neg$, $\vee$ だけで書き直すことができることは、$\Rightarrow$ や $\wedge$ は使わなくても等値な式を表すことができることを意味しています。同様に、$p \vee q \equiv \neg((\neg p) \wedge (\neg q))$ ですから、$\neg$ と $\vee$ のかわりに $\neg$ と $\wedge$ を使うこともできることがわかります。しかし、すこし余分に記号を用いた方が意味がわかり易かったり、式が短くなったりしますね。どのような論理記号を用いるのが、ある目的のために有効かというのは、コンピュータなどの回路を設計する時に非常に重要な問題です。

2. p, q, r を命題とする。このとき、下の真理表を完成することによって、次の式が成り立つかどうか判定せよ。理由も記せ。

$$(p \vee q) \Rightarrow (\neg r) \equiv \neg(p \vee (q \wedge r)).$$

p	q	r	$(p$	$\vee$	$q)$	$\Rightarrow$	$(\neg$	$r)$	$\neg$	$(p$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r))$
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	F

太字の部分がそれぞれの真理値。

[**判定と理由**] 成立しない。なぜなら、p, q, r の真理値がそれぞれ、T, T, F であるとき、$(p \vee q) \Rightarrow (\neg r)$ の真理値は T であるのに対し、$\neg(p \vee (q \wedge r))$ の真理値は F で異なるから。（これか一つでも異なればことなるので、一箇所示せば良いことに注意。）

Quiz 1, 2002

1. 右の図は、集合 A, B, C, D を表したものである。

   (1) E は $\star$ のついている 6 つのマス目の部分で表される部分集合とする。E を A, B, C とそれらの補集合 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ および $\cap, \cup$ を用いて表せ。括弧（かっこ）は用いて良いが、D や、$\overline{D}$ は用いないこと。

   (2) 一般に S, T を集合とするとき $S \triangle T = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$ とする。このとき、$((A \triangle B) \triangle C) \triangle D$ の部分を斜線で表せ。

	1	2	3	4
a				
b	$\star$	$\star$		
c	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
d				

A はタテ 1,2 列、B はヨコ a, b 行、C はヨコ b, c 行、D は タテ 2,3 列からなるそれぞれ 8 個のマス目の部分で表される部分集合とする。

2. p, q, r を命題とする。このとき、

(1) $r \Rightarrow ((\neg p) \wedge q)$ の真理表を完成せよ。

p	q	r	$r \quad \Rightarrow \quad ((\neg \quad p) \quad \wedge \quad q)$	x
T	T	T		T
T	T	F		F
T	F	T		T
T	F	F		F
F	T	T		F
F	T	F		F
F	F	T		T
F	F	F		F

(2) 真理値が上の表の最後の列となるような論理式 x を $p, q, r, \neg, \wedge, \vee$ を用いて表せ。括弧は良いが、$\Rightarrow$ は用いないこと。

Quiz 1, 2002, 解答

1. 右の図は、集合 A, B, C, D を表したものである。

(1) E は $\star$ のついている 6 つのマス目の部分で表される部分集合とする。E を A, B, C とそれらの補集合 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ および $\cap, \cup$ を用いて表せ。括弧（かっこ）は用いて良いが、D や、$\overline{D}$ は用いないこと。

$E = (A \cup \overline{B}) \cap C$. ただし答えはこれだけではありません。いくつか書いておきましょう。$E = (A \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) = (A \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = (A \cap B \cap C) \cup (\overline{B} \cap C)$. いくつかの集合にまたがって補集合をとっているものは、点をひきました。最初のものが、一番短い書き方で、短い書き方はそれなりに重要ですが、単に、表すだけなら、星のついているところを一つずつ表す方法があります。すなわち、A, B, C すべてに入っているところ $A \cap B \cap C$ と、A と C には入っているが、B に入っていないところ、$A \cap \overline{B} \cap C$ と、A と B には入っていないが、C に入っているところ $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ を合わせたものだから、$E = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$ と表すことができます。ちょっと長いですが。3 つの集合を表すだけなら、2, 3 列はなくても良かったことになります。注意しないといけないのは、括弧です。$A \cup \overline{B} \cap C$ と書くと、$(A \cup \overline{B}) \cap C$ なのか $A \cup (\overline{B} \cap C)$ なのか分かりませんね。この後の方だと、違う部分を表します。どこの部分を表しているか分かりますか。

(2) 一般に S, T を集合とするとき $S \triangle T = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$ とする。このとき、$((A \triangle B) \triangle C) \triangle D$ の部分を斜線で表せ。

右の図で $*$ をつけたところを表します。$A \triangle B$ は論理関数の方では、和を表しますといいました。そう考えると、1 の場所が奇数個の時、1 そうでない時、0 となりますから、A, B, C, D のうち、奇数個に入っているところだけが、斜線で塗られることになり、A, B, C, D のうち偶数個に入っているところは、入らないことになります。このことを考えると市松模様が出来上がります。和と同じだと考えれば、括弧の付け方によらないことも分かりますから、$((A \triangle B) \triangle C) \triangle D = (A \triangle B) \triangle (C \triangle D)$ となり、授業で説明した、昨年度の小テストと同じ問題になります。

	1	2	3	4
a				
b	$\star$	$\star$		
c	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
d				

	1	2	3	4
a		$*$		$*$
b	$*$		$*$	
c		$*$		$*$
d	$*$		$*$	

2. p, q, r を命題とする。このとき、

(1) $r \Rightarrow ((\neg p) \wedge q)$ の真理表を完成せよ。

p	q	r	r	$\Rightarrow$	$((\neg$	$p)$	$\wedge$	$q)$	x
T	T	T	T	**F**	F	T	F	T	T
T	T	F	F	**T**	F	T	F	T	F
T	F	T	T	**F**	F	T	F	F	T
T	F	F	F	**T**	F	T	F	F	F
F	T	T	T	**T**	T	F	T	T	F
F	T	F	F	**T**	T	F	T	T	F
F	F	T	T	**F**	T	F	F	F	T
F	F	F	F	**T**	T	F	F	F	F

答えは、太字の二重線で囲まれた五列目。

(2) 真理値が上の表の最後の列となるような論理式 x を $p, q, r, \neg, \wedge, \vee$ を用いて表せ。括弧は良いが、$\Rightarrow$ は用いないこと。

x の真理値が (1) の答の真理値と逆であることに気づけば、答えは、$\neg(r \Rightarrow ((\neg p) \wedge q))$ しかし、$\Rightarrow$ は使えないので、$s \Rightarrow t = (\neg s) \vee t$ を用いると、$\neg((\neg r) \vee$

$((\neg p) \wedge q))$ となります。論理式の性質を用いると、これから、

$$
\begin{aligned}
&\neg((\neg r) \vee ((\neg p) \wedge q)) \\
&\quad = \quad \neg(\neg r) \wedge \neg((\neg p) \wedge q)) = r \wedge \neg((\neg p) \wedge q)) \\
&\quad = \quad r \wedge ((\neg(\neg p)) \vee (\neg q)) = r \wedge (p \vee (\neg q)) = (p \vee (\neg q)) \wedge r
\end{aligned}
$$

となります。じつは、p が真である集合を A、q が真である集合を B、r が真である集合を C とすると、x の真理値が T である部分が 3 箇所ありますから、それらを最初の問題の図で表してみるとそれは、1(1) と同じになります。そこから、1(1) の答を翻訳し直すと、答が得られます。または、x が T という値をとるところを表すと、$p \wedge q \wedge r$ が T となる場合か、$p \wedge (\neg q) \wedge r$ が T となる場合か、$(\neg p) \wedge (\neg q) \wedge r$ が T となる場合のいずれかですから、結局、次のようにも書けます。

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge (\neg q) \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge r).$$

これらもかっこの付け方によって、違うものを表しますから、気をつけて下さい。

Quiz 1, 2001

1. 右の図（省略）は、集合 A, B, C, D を表したものである。
   (1) $\star$ の部分を A, B, C, D とそれらの補集合 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ および $\cap, \cup$ で表せ。
   (2) 一般に S, T を集合とするとき $S \triangle T = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$ とする。このとき、$(A \triangle B) \triangle (C \triangle D)$ の部分を斜線で表せ。
   A : 左 2 行、B : 上 2 行、
   C : 中 2 行、D : 中 2 行

	1	2	3	4
a				
b				
c		$\star$		
d				

A はタテ 1,2 列、B はヨコ a, b 行、C はヨコ b, c 行、D は タテ 2,3 列からなるそれぞれ 8 個のマス目の部分で表される部分集合とする。

2. p, q を命題とする。このとき、
   (1) $\neg(p \wedge q)$ と $(\neg p) \vee (\neg q)$ の真理値は等しいことを示せ。（真理表を作れ）
   (2) (1) の結果を命題 p, q に具体的な言葉を当てはめて説明せよ。

第3章　線形代数

3.1　連立一次方程式

3.1.1　連立一次方程式とその解

ここで学ぶのは線形代数と言われるものです。線形代数の一番の基本は連立一次方程式を考えることです。線形代数は微分積分とともに数学の基礎をなすもので、自然科学でも、社会科学でも使われている理論であり、考え方です。応用という面からも、連立一次方程式の理論は、重要です。このあと連立一次不等式、線形計画法へと進んで行く土台もこの連立一次方程式の理論です。

連立一次方程式とは次のようなものです。

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

これは n 個の変数（$x_1, x_2, \ldots, x_n$）に関する m 個の 1 次方程式からなる連立一次方程式です。英語では A system of linear equations と言います。$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ など a に添字のついたものは、数で、係数 (coefficients) と呼ばれます。また、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数と呼びます。x_1, x_2 など変数がすべて 1 乗で x_1^2 などが現れないので「一次」といいます。これに対して、$x^2 - x - 2 = 0$ は二次方程式です。x^2 が入っており、それよりも高い次数の項 x^3 や、x^{100} などは入っていないからです。次数については、多項式のところで学びます。n 個の数の組で $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に代入した時、上の m 個の方程式すべてを満たす（成立させる）ものを解 (solution) といいます。 例えば、

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & - & 3x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \end{array}\right.$$

は、変数 x_2 と x_2 に関する連立一次方程式で、$n = 2$, $m = 2$ となっています。$x_1 = 8$, $x_2 = 2$ とすると（x_1 に 8 を、x_2 に 2 を代入すると）

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 8 & - & 3 \cdot 2 & = & 2 \\ 8 & + & 2 \cdot 2 & = & 12 \end{array}\right.$$

となるので、$x_1 = 8,\, x_2 = 2$ は、この方程式の解であると言うわけです。変数に使う記号は $x_1, x_2, \ldots$ ではなく他の記号を用いることもあります。たとえば x, y を用いれば、

$$\begin{cases} x & - & 3y & = & 2 \\ x & + & 2y & = & 12 \end{cases}$$

と、なじみのあるものとなります。ここでは、変数がたくさんある場合も一緒に扱いたいので、x, y, z などではなく、$x_1, x_2, x_3, \ldots$ を使っているわけです。

さて、ここで考えたいのは以下の問題です。

1. 解き方、アルゴリズム（算法）[必ず解ける方法]
2. 解はいくつ（何組）あるか。解がいくつあるかはどうやって分かるか。
3. 解はどんな形をしているか。

3.1.2　行に関する基本変形

まず次の連立方程式を解いてみましょう。これは、二元連立一次方程式です。変数（未知数）が x と y の二つだからです。右の列に書いたものは、方程式の係数だけを取り出して書いたものです。$+$ と $=$ は省いてありますが、-3 のところは、$+(-3)$ と考えて -3 としてあることに注意して下さい。

$$\begin{cases} x & - & 3y & = & 2 \\ x & + & 2y & = & 12 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

- 2 式から、1 式を引く。　　第 2 行から第 1 行を引く。 $([2, 1; -1])$

$$\begin{cases} x & - & 3y & = & 2 \\ & & 5y & = & 10 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

- 2 式を $\frac{1}{5}$ 倍する。　　第 2 行に $\frac{1}{5}$ をかける。$([2, \frac{1}{5}])$

$$\begin{cases} x & - & 3y & = & 2 \\ & & y & = & 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 2 式の 3 倍を 1 式に足す。　　第 1 行に第 2 行の 3 倍を加える。 $([1, 2; 3])$

$$\begin{cases} x & & & = & 8 \\ & & y & = & 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

上の変形を追ってみれば分かりますが、x とか y とかいう変数を書かなくても、係数だけに注目すれば、良いことが分かります。

このように数を矩形に並べたものを行列と呼びます。横に並んだものを行、縦を列と言います。例えば、最後の行列の第一行は $[1\,0\,8]$、第三列の第一行目は 8、第二行目は 2 となっています。数を矩形にならべた周りを括弧でくくってありますが、それは、他のものと区別するためで重要ではありません。

この方程式を他の方法で解くこともできますが、いま使った操作は以下のいずれかです。2 は用いていませんが。

連立方程式に対する以下の変形を基本変形という。

1. 1 次方程式を何倍かする。（0 倍はのぞく。）
2. 2 つの方程式を交換する。
3. ある方程式に別の方程式を何倍かして加える。

これを行列の変形の言葉に変えると以下のようになります。

以下の変形を行列の「**行の基本変形**」という。

1. ある行に 0 でない定数をかける。
2. 2 つの行を交換する。
3. ある行に、別の行を何倍かして加える。

最初の二つはそう難しくありませんが、3 つ目の操作はちょっとなれないと難しいかも知れません。次の様に言い換えてみましょう。

「第 i 行に第 j 行の c 倍を加える。」

この変形で大切なのは、変わるのは第 i 行だけで、第 j 行は変わらないことです。3.1.2 節の最初の例で行なった１つめと３つめの変形をこの言葉を使って言い換えてみると、次のようになります。

- 「2 式から、1 式を引く」→「第 2 行に第 1 行の -1 倍を加える」
- 「2 式の 3 倍を 1 式に足す」→「第 1 行に第 2 行の 3 倍を加える」

3.1.2 節での例では、一番右に対応する記号が書いてありますが、上のそれぞれに対応する部分には、$[2,1;-1]$, $[1,2;3]$ とあります。これはこの記号によってどんな操作をしているかをわかるようにしているわけです。

もう少し正確に、それぞれの操作を表す記号も一緒に定義してみましょう。

定義 3.1.1 m 行 n 列の行列に関する以下の三つの操作を、行に関する基本変形とよぶ。

$[i;c]$**:** 第 i 行の成分をすべて c 倍する。(但し c は $\underline{0 \text{ でない}}$ 数で、$1 \leqq i \leqq m$)

$[i,j]$**:**　第 i 行と第 j 行を交換する。(但し、$1 \leqq i, j \leqq m$)

$[i,j;c]$**:**　第 i 行に第 j 行の c 倍を加える。(但し、c は任意の数で、$1 \leqq i, j \leqq m$)

「任意」の英語は arbitrary ですが、any、all、every を使うこともあります。何でもよいと言う意味です。

練習問題 3.1.1 次の問題を行列表示を用い、行の基本変形のみを用いて解いてみましょう。

$$\begin{cases} 3x + y &= 17 \\ 2x - 5y &= 3 \end{cases}$$

解は $x = \frac{88}{17}$, $y = \frac{25}{17}$ です。

次の連立方程式を解いてみましょう。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 11x & - & y & + & 5z & = & 17 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

- 1 式と、2 式を交換する。$[1,2]$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ 11x & - & y & + & 5z & = & 17 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 11 & -1 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

- 2 式から 1 式の 3 倍を引く（-3 倍を加える)。$[2,1;-3]$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -2y & - & z & = & 1 \\ 11x & - & y & + & 5z & = & 17 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 11 & -1 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

- 3 式から 1 式の 11 倍を引く（-11 倍を加える)。$[3,1;-11]$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -2y & - & z & = & 1 \\ & & -12y & - & 6z & = & 6 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -12 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

- 3 式から 2 式の 6 倍を引く（-6 倍を加える)。$[3,2;-6]$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -2y & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これは、解が一つに決まらない形をしています。例えば $z = 4$ とすると、$y = -2$ となり、それを用いると、$x = -1$ となります。すなわち、$x = -1, y = -2, z = 4$ は解です。しかし、z が他の値であったも、それぞれに、y, x が決まり、そこから解が得られます。すなわち、解は無限組、得られます。このような場合は、パラメター (媒介変数 (parameter)) を使って解を表示します。そのためもう少し変形してみましょう。

- 2 式を -2 で割る（$-\frac{1}{2}$ をかける）。$[2; -\frac{1}{2}]$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1 式から 2 式を引く（-1 倍を加える）。$[1, 2; -1]$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & \frac{1}{2}z & = & \frac{3}{2} \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

- これは、$z = t$ として、解をパラメターを使って表すと以下のようになります。

$$\left\{\begin{array}{ccl} x & = & -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ y & = & -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

一番最後の形をベクトル表示と言います。これについては、行列のところで詳しく説明します。

この例でもわかるように三元連立一次方程式で、方程式が 3 個であっても、解が無限個存在する場合もあることがわかりました。中学校・高等学校では、答が一つに決まる場合が殆んどで、たまにそうでない「変な」問題が混ざっている程度でそれは無視してもどうにかなりましたが、上の例でも実際は単純ではなくいろいろと複雑な問題をはらんでいることを示唆しています。

上の解き方は行列の形に直してあと、変形に制限をつけただけで、いままで勉強してきたものとそうかわっていないと思います。では、最後に x, y, z を求めましたが、それは、本当に最初の連立方程式を満たしているのでしょうか。つまり最初の方程式の解となっているのでしょうか。もちろんそうでなければ一所懸命解いた意味がありません。これは、代入してみれば、確かめることができます。ちょっと確かめて見て下さい。だいたい変な答が出たのですから。解が無限個などという。もう一つ問題があります。それは、最後にもとめたもの以外には、最初の連立方程式の解はないのでしょうか。そういうことも考えていきたいと思います。

3.1.3　既約ガウス行列と基本定理

n 変数の 1 次方程式 m 個からなる連立一次方程式は、

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

の形に表すことができます。ここで、a_{ij}、b_k は定数。係数を表すのには、a_{ij} のような 2 重添字 (double index) を用います。上のように変形して解を求めるときは、x, y, z や、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ などの変数の係数のみが変化するから、他の部分を省略し、長方形（矩形）に書いたものを考えます。これを、連立一次方程式の「**拡大係数行列 (Augmented Matrix or Extended Coefficient Matrix)**」といいます。実際、この係数の変化のみを拡大係数行列を使って書いたものを上の変形の右に並べて書いてみました。上の一般の連立一次方程式の場合は、以下のようになります。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

また、$b_1, b_2, \cdots, b_m$ の部分をのぞいたものを「**係数行列 (Coefficient Matrix)**」といいます。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

練習問題 3.1.2 次の二つの連立一次方程式の拡大係数行列を書き、上に行った方法で解いてみてください。よくイメージがわかないときは、方程式の変形をし、それと並べて、行列の変形をしてみましょう。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ 9x & - & y & + & 5z & = & 6 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 11x & - & y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right.$$

左上の方程式の解は、ただ一組で、$x = -4, y = -2, z = 8$、右上の方は解は解がありません。

次はどうでしょうか。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & - & 9y & - & 6z & = & -3 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

これより、$x = 3t + 2u - 1, y = t, z = u$、となります。この場合には、2 つのパラメターによって解が表示されました。即ち、自由度は 2 個あります（正確な意味は後述)。このように解が無いもの、解がちょうど一個（一組：変数がたくさんあるわけですからこのような言い方の方が正確ですが）のもの、解が無限個（無限組）ありそれらがいくつかの自由変数によって表されるものがあることが分かりました。では、解がちょうど二組あるような連立一次方程式はあるのでしょうか。実は次のことが成り立っています。

「連立一次方程式の解は、ないか（0 個)、1 個か、無限個である。」

さてこれまで見てきたように連立一次方程式解法のアウトラインは、連立一次方程式の「拡大係数行列」に、3 種類の「行の基本変形」だけを行って、今まで見てきたような「簡単な行列」にし、そこから機械的に解を読みとることである。そこで、「簡単な行列」とは何かを定義します。

定義 3.1.2 次のような行列を「**既約ガウス行列 (Reduced Echelon Form)**」という。

1. もし、ある行が 0 以外の数を含めば、最初の 0 でない数は 1 である。（これを先頭の 1 (the leading 1) という。）
2. もし、すべての数が 0 であるような行が含まれていれば、それらの行は下の方によせて集められている。
3. すべてが 0 ではない 2 つの行について、上の行の先頭の 1 は、下の行の先頭の 1 よりも前に存在する。
4. 先頭の 1 を含む列の他の数は、すべて 0 である。

(3.1)、(3.2) の行列も、(3.3) の拡大係数行列を変形して得られた、右側の行列も、上の 4 つの条件を満たしているので、すべて、既約ガウス行列です。3 番目までの条件を満たす行列をガウス行列または、階段行列と呼ぶこともありますが、ここでは、基本的には既約ガウス行列にまで変形して解を考えることにします。英語の Echelon という単語は軍隊での階級を表す言葉だそうです。ガウスはドイツの数学者で、正規分布曲線と呼ばれる釣り鐘型の曲線（ガウス曲線とも呼ばれる）の絵とともに、以前は 5 マルク札にも肖像が使われていました。

次の定理は、どんな行列であっても、定義 3.1.1 で定義した行に関する 3 種類の基本変形を何回か施すと、定義 3.1.2 で定義した既約ガウス行列にする事ができることを主張したものです。

定理 3.1.1 任意 (arbitrary) の行列は、行に関する基本変形を何回か施して、既約ガウス行列に変形することができる。

証明. まず、大体の方針を述べましょう。一番左の列から見ていき、零ではないものがあれば、その零でない「行」を、行の入れかえ（2 番目の操作）を使って、一番上に移動

する。その行を、１番目の操作で何倍かし（または ある数で割っ）て、一番左の零でない成分が丁度１になるようにする。この行（第一行目）の何倍かを他の行から引く（または加える）こと（３番目の操作）により、この列は、この行にある 1 以外はすべて零にすることができる。一行目以外で、零ではない成分のある列を選び、また、行の入れ替えで、零ではない成分のある行を第二行目に移動する。その零ではない成分を何倍かして、1 にする。この行（第二行）を何倍かして、他の行から引くことにより、その列の他の成分をすべて零にする。１行目、２行目以外で、零ではない成分のある列を見つけ...と続けていくと、最終的には、既約ガウス行列にたどり着きます。

行の基本変形を何回か施して、既約ガウス行列にする算法（アルゴリズム）を以下に述べる。

1. すべての成分が 0 ならその行列は既約ガウス行列だから、その場合は良い。すべての成分が 0 ではない最初の列を i_1 とする。行の順序を入れ替え（２番目の操作を何回か施すことによって得られる）、第 1 行第 i_1 列に零でない成分が来るようにする。それを c_1 とする。

2. 第 1 行を c_1 で割る（$[1, 1/c_1]$)。すると第 1 行の最初の零でない成分は i_1 列目でそれは、1（先頭の 1) である。他の行の零でない成分は、i_1 列目以降である。第 j 行の i_1 列目に零でない成分 c があれば、第 1 行の $-c$ 倍を、第 j 行に加える $([i_1, 1; -c])$ と、第 i_1 列で零でないのは、第 1 行目にある先頭の 1 だけになる。

3. 2 行目以降がすべて 0 ならそれは既約ガウス行列である。第 2 行目以降ですべての成分が 0 ではない最初の列を i_2 とする。行の順序を入れ替え、第 2 行第 i_2 列に零でない項が来るようにする。それを c_2 とする。

4. 第 2 行を c_2 で割る。すると第 2 行の最初の零でない成分は i_2 列目でそれは、1（先頭の 1) である。3 行目以降の零でない成分は、i_2 列目以降である。第 j 行（第 1 行も含めて）の i_2 列目に零でない成分 c があれば、第 2 行の $-c$ 倍を、第 j 行に加えると、第 i_2 列で零でないのは、第 2 行目にある先頭の 1 だけになる。

5. 3 行目以降がすべて 0 ならそれは既約ガウス行列である。第 3 行目以降ですべての成分が 0 ではない最初の列を i_3 とする。行の順序を入れ替え、第 3 行第 i_3 列に零でない成分が来るようにする。それを c_3 とする...
   これを続けていけば良い。

この方法で、必ず、既約ガウス行列が得られるので、定理が証明された。 ■

厳密な証明にするには、最後に、既約ガウス行列になるこをと確かめないといけませんが、煩雑になるので、ここでは、省略します。この方法で、実際に、行列を、既約ガウス行列に変形してみて下さい。定理の証明を理解することができると思います。この方法は、必ずしも、既約ガウス行列に変形する最善の方法ではない場合がありますが、大切なのは、必ずできること。もう一つは、これをコンピュータに理解できる言葉に書き替えれば、コンピュータにもこの変形をさせることができる事です。アルゴリズムはコンピュー

タのプログラムの基礎をなすものです。論理的なギャップがないように、その方法を書き下すこと。証明を書くことはその訓練にもなります。

では、次に、既約ガウス行列から解を求める、または、読み取ることを考えましょう。連立一次方程式の拡大係数行列から出発して、既約ガウス行列が得られれば、解をほぼ自動的に書き下すことができます。まずは、解がどのくらいあるかを記述するための用語の定義をします。

定義 3.1.3 行の基本変形で得た既約ガウス行列の 0 でない行の数をその行列の**階数 (rank)** と言い、行列 A に対して、$\mathrm{rank}\ A$ と書く。

大切なのは、２点です。まず、階数は、すべての行列に対して定義されていること。つまり、連立一次方程式の拡大係数行列の階数も、係数行列の階数も定義されていることです。さらに、その行列が、連立一次方程式と関係していなくても、階数は定義されています。二番目のことは、すぐには証明できませんが、どのような道筋をたどって既約ガウス行列にたどり着いても、階数は一通りに決まり、変形の道筋によって違う階数が得られることは無いと言うことです。それほど難しくないので、あとで証明します。もう少し考えると、既約ガウス行列に至る過程は種々あっても、最後に行きつく既約ガウス行列自体はまったく同じであることも分かります。こちらはちょっと面倒なので、ここでは証明しません。

さて、次に、連立一次方程式の解についての定理を述べますが、その前に、係数行列と、拡大係数行列の階数について考えておきましょう。係数行列と、拡大係数行列は最後に一列加わったかどうかだけの差です。さらに、行に関する基本変形をしているので、拡大係数行列に行に関する基本変形を施せば、それは、係数行列の部分の行に関する基本変形にもなっています。さらに、最後にできた、行列は、拡大係数行列の部分が、既約ガウス行列になっていれば、その最後の一列をのぞいたものが、係数行列から変形して得られた、既約ガウス行列になっています。既約ガウス行列の定義から確かめてみましょう。3.1.2 における例も参考にすると良いでしょう。最後に、階数は、行の基本変形で得られた、既約ガウス行列の零ではない、行の数ですから、拡大係数行列の階数と、係数行列の階数は同じか、一つ違うかのどちらかで、既約ガウス行列の定義から、もし、この二つの階数が異なるときは、拡大係数行列の最後の列に、先頭の 1 があり、その行はその 1 以外すべて零となっていることが分かります。

では、定理を述べましょう。

定理 3.1.2 n 変数の連立一次方程式の解について以下が成立する。但し r は係数行列の階数とする。

(1) 拡大係数行列と係数行列の階数が異なれば、その連立一次方程式は解を持たない。

(2) 拡大係数行列と係数行列の階数が等しく、その階数が n ならば、その連立一次方程式はただ一組の解を持つ。

(3) 拡大係数行列と係数行列の階数が等しく、 $r < n$ ならば、その連立一次方程式の解（の組）は無限個あり、$n - r$ 個の媒介変数（パラメター）を用いて表すことができる。

注.

1. 最後の列にのみ 1 があると言うことは、先頭の 1 が最後の列にあるということ、すなわち、$[0, 0, \cdots, 0, 1]$ といった行があると言うことです。方程式から拡大係数行列を作ったことを考えてみるとこれは、左辺が 0 なのに、右辺は 1 だということを意味しています。たしかにこのようになっていれば、解はありません。

2. 既約ガウス行列の階数は 0 でない行の数ですが、それは「先頭の 1 の数」と言い換えても同じです。0 でない行には必ず先頭の 1 があるわけですから。

3. 方程式の解を書き上げる時は、既約ガウス行列の先頭の 1 のある列に対応する変数はそのままとして、先頭の 1 の無い列に対応する変数を t_1 から順に t_2, t_3 とおいていくと階数を r とした時 $n - r$ のパラメタをおくことができます。最後の列は変数とは関係なかったですね。すると簡単に解を書くことができます。例 3.1.2 で見てみると、先頭の 1 に対応しないのは x_2, x_5 ですからこれらをパラメターとします。

4. なぜ上のようにおくと良いのでしょうか。これは既約ガウス行列の定義と関係します。第 i 行の先頭の 1 のある列に対応する変数をたとえば x_j とします。すると、第 i 番目の方程式だけに x_j が出てきます。かつその係数は 1 です。かつこの方程式にはパラメタにとった変数以外は出てきません。（なぜだか分かりますか。）ですから x_j はパラメターだけで書くことができるわけです。

例で確認しましょう。

例 3.1.1 以下の行列を係数拡大行列とする、連立一次方程式の解は何でしょうか。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

変数を x_1, x_2, x_3 とすると、左は、$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$、中は、$x_1 = 2 - 5t, x_2 = 1 - t, x_3 = t$、右は、解なし。

例 3.1.1 の各行列を B で表し、最後の列を除いた部分を A で表すことにします。A は係数行列です。既約ガウス行列となっていないものはどれでしょうか。最後のものは、既約ガウス行列ではありません。これをさらに変形して既約ガウス行列にすると、他の列（縦の並び）は変わらず最後の列だけ $0, 0, 1$ となります。変数の個数は拡大係数行列の列の数を一つへらしたものですからこれら三つとも $n = 3$ です。最後の列は方程式の右辺

に対応するものであることを思い出して下さい。係数行列の列の数が変数の数 n だとしても良いですね。

最初の例では、$n = \text{rank } B = \text{rank } A = 3$ ですから、上の定理により、解をもち解は一組のみ。たしかに、$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ と決まります。

2 番めの例では、$n = 3 > \text{rank } B = \text{rank } A = 2$ ですから、上の定理により、解を無限個持ち、それは $n - \text{rank } B = 1$ 個のパラメターで表されます。今の場合、先頭の 1 に対応する列は 1 番目と 2 番目ですから それ以外の列に対応する変数は x_3 ですから x_3 を t というパラメターにおきました。ちょうど一個のパラメターで解は $x_1 = 2 - 5t, x_2 = 1 - t, x_3 = t$ と表すことができました。

3 番目の例では、$n = \text{rank } B = 3 > \text{rank } A = 2$ ですから、解を持ちません。

行列 B と A の違いは最後の列だけですから、最後の列にだけ零でない数がある行があるかどうかで、解があるかどうかが決まることになります。そう考えると、3 番目のものは、既約ガウス行列まで変形しなくても、解がないことはわかると思います。ですから、上でも既約ガウス行列ではない例が上げてあります。解を読みとるように自動的に書くためには、既約ガウス行列にしたほうが間違いが少ないと思います。階数だけで、解が丁度一個か、パラメターがいくつ必要かなどが決まるわけですから、階数を求めることは重要です。それは、実は、既約ガウス行列まで求めなくてもわかりますが、ここでは、混乱を避けるためすべて既約ガウス行列に持っていくことを勧めておきます。

特に、定理の (3) は少し難しいので、もうすこし複雑な例で確認しましょう。

例 3.1.2 次の行列を拡大係数行列とする方程式の解は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

この例では、先頭の 1 に対応しない列は $2, 5$ ですから、$x_2 = t$, $x_5 = u$ とおいています。

定理の証明

さて、定理 3.1.2 の証明ですが、いますぐにはできません。しかし、拡大係数行列が、既約ガウス行列になっていれば、定理が成り立つことはそれほど難しくはありません。簡単に見てみましょう。まず、階数は既約ガウス行列に変形して、その零でない行の数でしたが、いまは、すでに既約ガウス行列になっていますから、単にその零でない行の数です。

(1) 拡大係数行列の階数と、係数行列の階数が違うとします。係数行列は、拡大係数行列の最後の列を省いた部分でした。階数（零でない行の数）がことなると言うことは、最後の列に 1（先頭の 1）がありあとはすべて零という行があることを意味しています。これは方程式で考えると、$0 = 1$ を意味しているわけですから、解はありません。

(2) 拡大係数行列の階数と、係数行列の階数が同じで、それが変数の数 n と等しいとします。すると、係数行列の部分は、一番下にいくつか 0 ばかりの行が並ぶかも知れませんが、それ以外の部分は、正方形で、対角線に 1 が並んだ形になっていることがわかります。これは、方程式で考えると、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が拡大係数行列の最後の列の対応する部分の値になることを意味していますから、解は一通りに決まります。

(3) 拡大係数行列の階数と、係数行列の階数が同じで r、変数の数は n で $n > r$ となっているとします。係数行列の列の数は変数の数と同じしたから n。先頭の 1 のある列は r 列ですから、先頭の 1 がない列は $n - r$ 列あることになります。その列に対応する変数をパラメタとしておきます。先頭の 1 に対応する変数については、先頭の 1 のある行が表す方程式を考えると、その行の 0 でないものは、先頭の 1 に対応していない変数の列ですから、パラメターで表すことができます。これから、解を $n - r$ 個のパラメターで表すことができることがわかりました。今の決め方から、$n - r$ 個の変数の部分は何をとっても解が一組決まりますから、解は無限個、かつ、$n - r$ 個の媒介変数が必要であることがわかります。

3.2　行列

3.2.1　行列の定義と演算

今まですでに、何度も「行列 (Matrix)」という言葉を使ってきましたが、ここで、改めてその定義を述べます。

定義 3.2.1　1. $m \times n$ 個の数を長方形（矩形）に並べた

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を (m, n) **行列、又は、**$m \times n$ **行列** と言う。上の行列を略して、$A = [a_{ij}]$ などと書くこともある。

2. 二つの行列は、そのサイズ (m, n) が等しく、かつ、その成分（矩形に並べた $m \times n$ 個の数）が等しいときに等しい。

3. $1 \times n$ 行列 $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ を n **次行ベクトル**、$m \times 1$ 行列、

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

を m **次列ベクトル**という。

4. 上の行列 A において、左から、j 番目の縦に並んだ、

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

を A の **第 j 列**と言い、上から、i 番目の横に並んだ、

$$\boldsymbol{a}'_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$$

を A の**第 i 行**と言い、A を次のようにも書く。

$$A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_m \end{bmatrix}$$

5. 第 i 行 第 j 列を (i,j) **成分**と呼ぶ。上の行列 A は、(i,j) 成分が a_{ij} であるような行列である。

ベクトルも行列の一種だと考えることができます。2 次や、 3 次のベクトルは、平面や、空間の点を対応させて、扱うこともありますが、ここでは、行列の一種と考えて、連立一次方程式の理論のなかで考えます。

次に行列に演算（足し算とスカラー倍と積）を定義する。

定義 3.2.2 A、B を共に同じ型（$m \times n$）の行列、c を数（スカラー）とする、**和** $A+B$、**スカラー倍** cA を成分での和と、c 倍とで定義する。すなわち、

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}, cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

ここで、連立一次方程式の解に戻ってみましょう。解を、以下のように書いたのは、上の行列の和とスカラー倍の定義を使って書いたものであることがわかると思います。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ y & = & -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ z & = & t \end{array} \right. \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

定義 3.2.3 $A = (a_{i,j})$ を (m, r) 行列、$B = (b_{k,l})$ を (r, n) 行列とする。このとき、(m, n) 行列 $C = (c_{s,t})$ の各成分は次のようにして定義されたものとする。

$$c_{s,t} = \sum_{u=1}^{r} a_{s,u} b_{u,t} = a_{s,1} b_{1,t} + a_{s,2} b_{2,t} + \cdots + a_{s,r} b_{r,t}.$$

このとき、$C = AB$ と書き、**行列 A と B の積**という。

$$C = AB = \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^{r} a_{1,u} b_{u,1} & \sum_{u=1}^{r} a_{1,u} b_{u,2} & \cdots & \sum_{u=1}^{r} a_{1,u} b_{u,n} \\ \sum_{u=1}^{r} a_{2,u} b_{u,1} & \sum_{u=1}^{r} a_{2,u} b_{u,2} & \cdots & \sum_{u=1}^{r} a_{2,u} b_{u,n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ \sum_{u=1}^{r} a_{m,u} b_{u,1} & \sum_{u=1}^{r} a_{m,u} b_{u,2} & \cdots & \sum_{u=1}^{r} a_{m,u} b_{u,n} \end{bmatrix}$$

積は複雑なのでゆっくり見ていきましょう。まず、行列 A と 行列 B をかけるときには、それぞれの行列のサイズが重要です。最初の行列 A の列の数と、後の行列 B の行の数が等しいときだけ積 AB が定義されます。列は縦並びのもので、行は横並びでした。上の定義では、A は (m, r) 行列、B を (r, n) で確かに、A の列の数は r、B の行の数は r で等しいのでかけることができます。サイズは行の数、列の数の順です。「行列」だからまず行の数そして列の数と覚えれば良いでしょう。行という漢字は横の線が多いから行は横、列という漢字は縦の線が多いから列は縦を表すと説明する人もいるようです。到底 universal ではありませんが、確かに覚えるのにはいいかも知れません。さて、かけた結果は、最初の行列の行の数と同じ行の数、後の行列の列の数と同じ数の列をもった行列になります。定義においては、結果は (m, n) 行列になるわけです。さて、成分は、定義では (s, t) 成分が書いてあります。これは、結果の行列の s 行 t 列にある数のことです。結果の行列の s 行 t 列を計算する時には、最初の行列 A の 第 s 行と、後の行列 B の第 t 列を使います。A の 第 s 行は $a_{s,1}, a_{s,2}, \ldots, a_{s,r}$ が横にならんでいます。B の第 t 列は $b_{1,t}, b_{2,t}, \ldots, b_{r,t}$ が縦にならんでいます。結果は、これらの 1 番目と 1 番目、2 番目と 2 番目、とかけてそれらの和をとったものです。それと、つぎのように表しています。

$$c_{s,t} = \sum_{u=1}^{r} a_{s,u} b_{u,t} = a_{s,1} b_{1,t} + a_{s,2} b_{2,t} + \cdots + a_{s,r} b_{r,t}.$$

うまくこの計算ができるためには、A の第 s 行にある列の数 r と、B の第 t 列にある行の数 r が等しくないといけません。それが実は、最初の積が定義できる条件でした。ここで現れる $\sum_{u=1}^{r} a_{s,u} b_{u,t}$ ですが、最初の $\sum$ はギリシャ語の σ (シグマ) の大文字で英語の s にあたります。和は summation と言いますから、和をとるといういみで Σ が用いられています。その後ろの式、$a_{s,u} b_{u,t}$ のうち u の部分を 1 から順に r まで動かして得られる

$$a_{s,1} b_{1,t}, a_{s,2} b_{2,t}, \ldots, a_{s,r} b_{r,t}$$

の和を表すものです。結果として、右辺に現れる和となります。

なかなか複雑です。例を見てみましょう。次の例では、A は $(2, 3)$ 行列、B は $(3, 2)$ 行列です。

例 3.2.1 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 3+2\cdot 4 & 1\cdot 5+0\cdot 6+2\cdot 7 \\ 0\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4 & 0\cdot 5+1\cdot 6+1\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 1+5\cdot 0 & 2\cdot 0+5\cdot 1 & 2\cdot 2+5\cdot 1 \\ 3\cdot 1+6\cdot 0 & 3\cdot 0+6\cdot 1 & 3\cdot 2+6\cdot 1 \\ 4\cdot 1+7\cdot 0 & 4\cdot 0+7\cdot 1 & 4\cdot 2+7\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \\ 4 & 7 & 15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

このように、AB と、BA は、そのサイズすら違います。また、たとえサイズが等しくても、殆どの場合、$AB \neq BA$ となることに注意して下さい。

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ とすると、

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 11x_1 - x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}$$

従って、$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$ とすると最初に扱った方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書くことができます。行列が等しいのは、サイズが等しくそれぞれの成分がすべて等しいということでした。ですから、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は連立方程式を表しているわけです。連立一次方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ というようなコンパクトな形に書けるようにしたのも、積を、上のように定義した一つの理由です。

3. 一般には、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書ける。その意味は、

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

が成り立つ事と、各成分が等しいこととが同値だからです。

Note.

1. ２つの行列に対して、積がいつも定義できるわけではありませんが、A, B を共に、(n, n) 行列とすると、AB も、BA も共に定義することが出来、どちらも (n, n) 行列となります。この様に、行の数と、列の数が等しい行列はとくに重要です。これを n 次正方行列、又は、単に 正方行列と言います。

2. すべて成分が零の (m, n) 行列を 零行列と言い、$\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m,n}$ と書きます。A を $m \times n$ 行列とすると、

$$A + \mathbf{0}_{m,n} = \mathbf{0}_{m,n} + A = A,\ A\mathbf{0}_{n,l} = \mathbf{0}_{m,l},\ \mathbf{0}_{l,m}A = \mathbf{0}_{l,n}$$

が成り立ちます。すべての成分が 0 ですから当たり前ですね。$\mathbf{0}_{n,n}$ を簡単に $\mathbf{0}_n$ と書くこともあります。零行列は、行列の世界に於ける「0 もどき」です。どんな行列に加えても変わりませんし、この行列をかけると必ず零行列になります。しかし、それぞれの場合に、どのサイズの零行列を意味しているか、注意して下さい。同じように 0 と書いてあっても、違うサイズの場合もあります。

3. 正方行列において、i 行 i 列の成分（(i, i) 成分）を対角成分と言います。正方行列を矩形に書くと、行の数と列のかずが同じですが、その左上から右下に伸びる対角線の部分に (i, i) 成分があるからです。n 次正方行列で、対角成分がすべて 1 他は、すべて 0 であるような行列を、単位行列と言い、$I = I_n$ とかきます。（高校の教科書など、教科書によっては、$E = E_n$ を使っているものもあります。しかしかけ算の 1 に対応するものですから、I をここでは使うことにします。）簡単に確かめられるように、A を (m, n) 行列、B を (n, m) 行列とすると、$A \cdot I = A$、$I \cdot B = B$ となっています。単位行列は「1 もどき」です。単位行列はいつでも、正方行列です。ただし、零行列のときと同じように、サイズは変化することがありますので、注意して下さい。

行列の演算に関しては、通常の数の場合と同じように次のような性質が成り立ちます。

命題 3.2.1 行列の演算に関して次の諸性質が成り立つ。

(1) $A + B = B + A$　　　（加法に関する交換法則）

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ （加法に関する結合法則）

(3) $A(BC)=(AB)C$ （乗法に関する結合法則）

(4) $A(B+C)=AB+AC$、$(A+B)C=AC+BC$ （分配法則）

(5) $cA=(cI)A$

細かい条件を書いてありませんが、たとえば、$A(BC)=(AB)C$ は、行列 A,B,C において、B と C さらに、A と BC をかけることができ、右辺もこの順番でかけることができれば、等しい。と言う意味です。行列はいつでも、加えたり、かけたりする事ができるわけではないことに注意して下さい。

証明もそう難しくはありませんが、ここでは省きます。大切なのは割算を除いて大体の計算が数の場合と似た法則にしたがってできること、しかし積に関しては交換法則 $AB=BA$ が（必ずしも）成り立たないことです。もちろん、成り立つ場合もあります。たとえば A を n 次正方行列、$I=I_n$、$O=O_n$ とすれば、

$$A\cdot I=A=I\cdot A,\ A\cdot O=O=O\cdot A.$$

もう一つ、積においては、行列のサイズに常に注意して計算をしないといけないと言うことです。

3.2.2 行列の積と連立一次方程式

連立一次方程式について考えてきました。もう一度道筋を復習してみましょう。

Step 1. 連立一次方程式の拡大係数行列を作りそれを B とする。

Step 2. B に行に関する基本変形を何回か施して既約ガウス行列 C を得る。

Step 3. C から得られる情報をもとに、基本定理を適用して、解の存在・非存在、一つにきまるかどうか、無限個の場合のパラメーターの数を決定する。

ここで問題がありました。

1. C を拡大係数行列として求めた解は、本当に最初の B を拡大係数行列とする連立一次方程式の解になっているのか。（C の解 $\Rightarrow$ B の解？）

2. B を拡大係数行列とする連立一次方程式の解はすべて最後の C を拡大係数行列として求めた解に含まれているのか。（B の解 $\Rightarrow$ C の解？）

さて、一番簡単な一次方程式を考えてみましょう。たとえば $2\cdot x=4$。これを解くには、両辺を 2 で割ります。連立一次方程式は、A を係数行列とすると、行列の積を用いて $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と表すことができることを前の節で見ました。それなら A で割ることによって

$\boldsymbol{x}$ を求める方法はないでしょうか。上に掲げた問題とともにこの問題を考えるのが、これからの主題です。

もう一度簡単な一次方程式を考えてみましょう。$ax = b$ これから $x = b/a$ を導くのですが、正確には条件があり、$a \neq 0$ が必要でした。いま考えたいのは、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ですから、$1/A$ のようなものが存在する A の条件も考えないといけなそうです。

さて、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考えたとき、A に対して $BA = AB = I$ となるような B があったとしましょう。I は大体 1 の働きをしていましたからこの B が $1/A$ の働きをするものです。すると、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = BA\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b}.$$

逆に、

$$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b} \Rightarrow A\boldsymbol{x} = AB\boldsymbol{b} = I\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

これは何を言っているのでしょうか。最初の方は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において、$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{b}$ に左から B をかければ求めることができます、ということです。後の方は、$B\boldsymbol{b}$ を $A\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{x}$ に代入すると、$\boldsymbol{b}$ が得られ、$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b}$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす、行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であることを言っているわけです。したがって、このような B が存在する場合は、一番最初の問題 1, 2 についても言及していることに注意して下さい。上のような B を A の逆行列といい、$B = A^{-1}$ と書きます。逆行列が次のトピックですが、逆行列について理解すると、1, 2 の解答も同時に得られることになります。それについては、またあとでまとめることにしましょう。

3.2.3　逆行列

連立一次方程式は、行列を用いて、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書けるのでした。ここで、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

さて、この方程式を一次方程式 $ax = b$ を解くのに、a で割るように、A で割ると言うことを考えられないかを考えます。そのため、以下のような定義をします。

定義 3.2.4 正方行列 A について、$AB = BA = I$ を満たす正方行列 B が存在するとき、A は、**可逆**である（又は、可逆行列 (invertible matrix) [**正則行列** (nonsingular matrix)] である）と言う。B を A の逆行列と言い $B = A^{-1}$ と書く。

実際 A が可逆で、$B = A^{-1}$ とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から B をかけると、

$$B\boldsymbol{b} = BA\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

逆に、$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b}$ とすると、$A\boldsymbol{x} = A(B\boldsymbol{b}) = (AB)\boldsymbol{b} = I\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$。従って、$B\boldsymbol{b}$ が解で、解は、$B\boldsymbol{b}$ の形に限る。すなわち、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は、ただ一つです。すなわち、このような B が存在するのは特殊な場合であることをまず言っておきます。上の定義自体、正方行列について逆行列を定義していることに注意して下さい。

次の定理は、複雑な形をしていますが、逆行列存在の判定条件と、実際に逆行列をもとめる方法の両方を与えるものです。

定理 3.2.2 A を n 次正方行列、$I = I_n$ を n 次単位行列とし、$C = [A, I]$ なる、$n \times 2n$ の行列を考える。この行列 C に、行に関する基本変形を施し、既約ガウス行列に変形する。その結果を D とする。もし、$D = [I, B]$ の形になれば、$B = A^{-1}$ である。もし、D の左半分が、I で無ければ、A は、逆行列を持たない。とくに、A が逆行列を持つことと、$\mathrm{rank}\ A = n$ であることとは、同値である。

上の定理の証明はあとに回し、実際にこの方法で逆行列を求めてみましょう。

例 3.2.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ に対して、} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおき、次のように行の基本変形を施します。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2,1;-2]} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3,1;-3]} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2,3;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1,2;-2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[3,2;4]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2,3;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

これより、A は、可逆行列で、その逆行列は、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

となります。これが、$A^{-1}A = I = AA^{-1}$ となることを確かめてみて下さい。

上の例では、定理に書いてある方法で A^{-1} を求めましたが、こんな風に求まってしまうのは、驚きではないですか。私は最初正直感動しました。A^{-1} の成分を未知数として方程式を立て解こうとするととても大変ですから。

例 3.2.3

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ に対して、} C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおき、行の基本変形を施す。

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

これは、この後、いくら変形しても、この既約ガウス行列は、$[I, B]$ の形にならないことは、明らかである。実は、rank $A = 2$ で（ここまでで分かるのは、rank $A \leq 2$）rank $A \neq 3$ なので、A は、逆行列を持たない。

上の例からも分かるように、可逆かどうかを判定するだけなら、A をそのまま、変形して、rank A を求めれば良いことが分かりました。それには、既約ガウス行列まで変形しなくても、ガウス行列（既約ガウス行列の条件の 1-3 を満たすもの）まで変形すれば十分です。

既約ガウス行列と、ガウス行列の定義（定義 3.1.2）を確認しておきましょう。ガウス行列のほうは、3 までを満たすものです。

次のような行列を **(既約) ガウス行列**という。

1. もし、ある行が 0 以外の数を含めば、最初の 0 でない数は 1 である。（これを先頭の 1 という。）
2. もし、すべての数が 0 であるような行が含まれていれば、それらの行は下の方によせて集められている。
3. すべてが 0 ではない 2 つの行について、上の行の先頭の 1 は、下の行の先頭の 1 よりも前に存在する。
4. (先頭の 1 を含む列の他の数は、すべて 0 である。)

定理から関連して得られる命題を数学では「系」というので、上で得たことを系として書いておこう。

系 3.2.3 A を正方行列とするとき、A が可逆すなわち、A に逆行列が存在することと、A から行に関する基本変形によって得られる既約ガウス行列が単位行列 I となることとは同値である。

証明. まず、G は、n 次正方行列で、既約ガウス行列とするとき、$n = \mathrm{rank}\ G$ であれば、0 だけからなる行が一つもなく、$G = I$ である。逆に、$G = I$ であれば $\mathrm{rank}\ G = n$ である。

A に行に関する基本変形を施して I が得られたとすると、$[A, I]$ に同じ基本変形を施すと $[I, B]$ の形の行列になる。すると定理により B は A の逆行列である。また、A に行に関する基本変形を施して得られた既約ガウス行列 G が I ではないとすると、$[A, I]$ に同じ基本変形を施すと $[G, B]$ の形の行列になる。最初に述べたことから、$\mathrm{rank}\ G \neq n$。したがって、G の一番下の行はすべて 0 である。 したがって、さらに変形して既約ガウス行列を得ても、左半分は I にはならない。したがって定理より、A は逆行列を持たない。 ■

3.2.4 基本変形と行列

既約ガウス行列を求めるのに、行列の行に関する「基本変形」を用いましたが、この基本変形について、もう少し考えてみることにします。

もう一度、例を見てみましょう。最初、$[2, 1; -2]$ を施しました。この意味は、「第 2 行に第 1 行の -2 倍を加える」と言うことでした。しかしこれは、次の行列の計算でも得られることがわかります。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同様に、次のステップでは、$[3, 1; -3]$ すなわち「第 3 行に第 1 行の -3 倍を加える」ことですが、これは

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

その後は、それぞれ、$[2, 3; -1]$, $[1, 2; -2]$, $[3, 2; 4]$, $[3; -1]$, $[2, 3; -1]$ を施していますが、これらはそれぞれ、次の行列を左から順にかけても同じ効果が得られることがわかります。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このように行に関する基本変形は左からある行列をかけることによっても実現できます。そこで、基本変形にあわせて、そのような行列に名前をつけましょう。

$P(i;c)$: 第 i 行を c 倍する行列。$(c \neq 0)$

$P(i,j)$: 第 i 行と第 j 行を交換する行列。

$P(i,j;c)$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える行列。

これらはもちろん考えている行列のサイズによるわけですが、たとえば上の例のように、行の数が 3 のときは、次のようになります。

$$P(2,3;-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P(1,2;-2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P(3,2;4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P(3;-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ P(2,3;-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上で出てこなかった行の入れ換えをする行列も書いておきましょう。

$$P(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P(1,3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

実は、これらは、I に、求めたい行に関する基本変形を施すと、求める行列がえられるという仕組みになっています。たとえば、$P(2,3;-1)$ は、I の第 2 行に第 3 行の -1 倍を加えたもの、$P(3;-1)$ は、I の第 3 行に -1 をかけたもの、$P(1,2)$ は I の第 1 行と第 2 行を入れ換えたものです。

なぜでしょうか。例えば $P = P(i,j;c)$ としましょう。$P \cdot I$ は I に $[i,j;c]$ を施したものになってほしいわけです。しかし、単位行列 I の性質から $P \cdot I = P$ でしたから、P は確かに I に $[i,j;c]$ を施したものになっているわけです。

実は、$P(i,j;c)$ は、(i,j) 成分が c であとは、I と同じ行列になっています。最初に $[i.j;c]$ などの名前を決める時、このようになることを最初から考えて決めていたわけです。わかってしまえば行列を書くのも簡単ですね。

このことを用いると、さらに以下の事が分かります。

命題 3.2.4 (1) $P(i;c)P(i;1/c) = P(i;1/c)P(i;c) = I$。すなわち、$P(i;c)^{-1} = P(i;1/c)$。

(2) $P(i,j)P(i,j) = I$。すなわち、$P(i,j)^{-1} = P(i,j)$。

(3) $P(i,j;c)P(i,j;-c) = I$。すなわち、$P(i,j;c)^{-1} = P(i,j;-c)$。

特に、基本変形に対応する行列、$P(i;c), P(i,j), P(i,j;c)$ はすべて可逆である。

証明. $P(i;c)P(i;1/c) = P(i;c)P(i;1/c)\cdot I$ はまず I の第 i 行を $1/c$ 倍し、次に同じ第 i 行を c 倍しますから、結局何もしないのと同じで、結果は I となります。他のものも同じですから、自分で証明してみて下さい。 ■

例 3.2.4 上の例で出てきた $P(2,1;-2)$ の逆行列が $P(2,1;2)$ であることを確かめてみましょう。

$$P(2,1;-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P(2,1;-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ですから、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

これを用いて逆行列を求める計算の基本変形を行列の積で書いてみましょう。

例 3.2.5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ に対して、} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおき、行の基本変形を施す。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{[1,2]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{[3,1;-3]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{[1,2;-2]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{[3,2;4]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{[3,-1]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \overset{[2,3;-1]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

これより、A は、可逆行列で、その逆行列は、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

となります。

3.2.5　連立一次方程式と可逆性

さて、行に関する基本変形を行列で表しましたが、これを用いていくつかのことを考えてみよう。

まずは、次の補題から。（定理の準備をする命題を補題といいます。）

補題 3.2.5 P, Q を 可逆な n 次正方行列とすると、P^{-1} も可逆で $(P^{-1})^{-1} = P$。また、積 PQ も可逆で $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$ である。さらに、$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ をすべて可逆な n 次正方行列とすると、積 $P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1$ も可逆で、

$$(P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1)^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}\ldots P_{n-1}^{-1}P_n^{-1}.$$

証明. $Q^{-1}P^{-1}PQ = Q^{-1}Q = I,\ PQQ^{-1}P^{-1} = PP^{-1} = I$ より、$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$。一般の場合も同様。 ■

補題 3.2.6 A を $m \times n$ 行列とし、A に行に関する基本変形を行って、行列 B が得られたとする。すると、m 次可逆行列 P で、$PA = B$ となるものがある。

証明. 上で見たように、ある行列に行に関する基本変形を施すことは、それに対応する基本行列を左からかけることであった。A に施した基本変形に対応する基本行列を、$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ とする。$P = P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1$ とすると、

$$B = P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1A = PA.$$

さらに $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ は、命題 3.2.4 で見たように可逆だから、補題 3.2.5 により、P は、可逆である。 ■

ここで、定理 3.2.2 の証明する。まず、定理を再掲する。

> A を n 次正方行列、$I = I_n$ を n 次単位行列とし、$C = [A, I]$ なる、$n \times 2n$ の行列を考える。この行列 C に、行に関する基本変形を施し、既約ガウス行列に変形する。その結果を D とする。もし、$D = [I, B]$ の形になれば、$B = A^{-1}$ である。もし、D の左半分が、I でなければ、A は、逆行列を持たない。とくに、A が逆行列を持つことと、rank $A = n$ であることとは、同値である。

定理の証明: X, Y を n 次正方行列とし、行列 $[X, Y]$ に行に関する基本変形を施し、その基本変形に対応する基本行列を P とする。すると、行に関する基本変形を、X、Y それぞれを変形することと同じだから、結果は、$P[X, Y] = [PX, PY]$ である。このことを用いると、行列、$C = [A, I]$ に行に関する基本変形を施し、$D = [I, B]$ を得たとする。C に施した基本変形に対応する基本行列を、$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ とする。$P = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1$ とすると、

$$[I, B] = D = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1 C = P[A, I] = [PA, P].$$

従って、$PA = I$、$B = P$。P は、可逆行列の積だったから P も可逆。$PA = I$ より、

$$P^{-1} = P^{-1}I = P^{-1}PA = A$$

より、$B = P = A^{-1}$ である。

さて、既約ガウス行列 D の左半分を $L = PA$ とし、L が I でなければ、既約ガウス行列の定義から、L の第 m 行（一番下の行）はすべて 0 である。即ち、rank $L = r < n$。さて、定理 3.1.2 は次のようなものであった。

> n 個の変数を持つ連立一次同次方程式の拡大係数行列の階数を r とする。すると、これは係数行列の階数とも等しい。$n = r$ ならば、この連立一次同次方程式の解は、$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ のみであり、$n > r$ ならば、$n - r$ 個のパラメターを用いて解を書くことができる。とくに解は、無限個ある。

これにより、n 次列ベクトル $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ で $L\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ となるものが存在する。ここで、もし A が可逆であるとすると、$L = PA$ も可逆だから、

$$\mathbf{0} = L^{-1}\mathbf{0} = L^{-1}L\boldsymbol{y} = I\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$$

となり、これは矛盾。従って、A は、可逆ではない。 ■

系 3.2.7 A, B を n 次正方行列とする。このとき、$AB = I$ ならば、A も B も可逆行列で、$BA = I$ である。可逆行列は、基本行列の積で書ける。

証明. B が可逆でないとすると、n 次列ベクトル $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ で、$B\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ となるものが存在する。すると、

$$\mathbf{0} = A\mathbf{0} = AB\boldsymbol{y} = I\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$$

となり、矛盾。従って、B は、可逆である。これより、

$$B^{-1} = IB^{-1} = ABB^{-1} = A$$

となり、$BA = BB^{-1} = I$。最後の部分は、A の行による基本変形で、階数が、n より小さい既約ガウス行列が得られると、n 次列ベクトル $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ で、$A\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ となるものが存在するから、上と同様にして、矛盾が得られる。これから、結果が得られる。 ■

連立一次方程式に戻る。

$$Ax = \boldsymbol{b}$$

と行列で表示する。拡大係数行列を、$[A, \boldsymbol{b}]$ とし、これに基本変形を次々に施すと、それに対応する基本行列の積を P として、$P[A, \boldsymbol{b}] = [PA, P\boldsymbol{b}]$ となる。これは、$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ に関する拡大係数行列である。P は、可逆であることから、次のことが分かる。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}.$$

すなわち、$\boldsymbol{x}$ が、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たせば、$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ を満たし、逆に、$\boldsymbol{x}$ が、$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ を満たせば、 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす。従って、基本変形を行っても解は、変わらないのであった。

定理 3.2.8 A を n 次正方行列とする。次は同値である。

(i) $BA = AB = I$ を満たす n 次正方行列 B が存在する。

(ii) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は、$\boldsymbol{b}$ を一つ決めるといつもただ一つの解を持つ。

(iii) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はただ一つの解を持つ。

(iv) A に行の基本変形を施し得られる既約ガウス行列はいつでも単位行列 I である。

(v) A に行の基本変形を施すと単位行列 I が得られる。

(vi) A は、基本行列のいくつかの積で書くことが出来る。

(vii) ($\det A \neq 0$。)

3.2.6 2×2 行列*

$(2, 2)$ 行列についてまとめておく。

例 3.2.6 2×2 行列の逆行列は簡単に求められます。

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

実際、

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = I$$

同様にして、

$$A^{-1}A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = I$$

例えば、

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

従って、$ad - bc \neq 0$ ならば、逆行列を持つことがわかりました。逆行列を持てば、いつでも、$ad - bc \neq 0$ でしょうか。一つの方法は、行列式と言われるものを使う方法です。一般に、2×2 行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

について、$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ と定義します。成分が a, b, c, d の時は、$ad - bc$ となります。すると、

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= \det A \det B \end{aligned}$$

であることに注意すると、$AB = I$ ならば、$\det I = 1$ ですから、

$$\det A \det B = \det I = 1$$

となります。従って、$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ となります。以下に命題の形でまとめておきます。

命題 3.2.9 2×2 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ に対して、$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ と定義する。

(1) A, B を 2×2 行列とすると、$\det AB = \det A \det B$。

(2) A が可逆であることと、$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ とは、同値であり、そのとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

それでは、行列が、2×2 よりも大きいときは、どうでしょうか。その場合も行列式と言われる det に対応するものが定義できて、大体、上の命題に対応する事が成り立ちます。それは、線形代数学 I などで勉強して下さい。

3.2.7 連立一次方程式まとめ

以下に連立一次方程式についてまとめる。

1. 連立一次方程式は行列方程式で表すことができる。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

   に対しては、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

   とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書ける。

2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列は $B = [A, \boldsymbol{b}]$ であった。これに、基本変形を何回か施して、$C = [A', \boldsymbol{b}']$ となったとしよう。それは可逆行列 P をかけることと同じであった。したがって、

$$[PA, P\boldsymbol{b}] = P[A, \boldsymbol{b}] = PB = C = [A', \boldsymbol{b}'],$$

   これより、$A' = PA,\ \boldsymbol{b}' = P\boldsymbol{b}$ である。

   さて、次を証明する。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'.$$

   まず、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とする。これに、P を左からかけると、$A'\boldsymbol{x} = PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$ すなわち、$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ が得られた。逆に、$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ とする。P は可逆行列だったから逆行列が存在する。それを P^{-1} とかき、これを $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ に左からかけると、$P^{-1}A'\boldsymbol{x} = P^{-1}PA\boldsymbol{x} = IA\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ 一方、$P^{-1}\boldsymbol{b}' = P^{-1}P\boldsymbol{b} = I\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ だから、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が得られた。

   これは何を言っているのだろうか。$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ を満たし、逆に $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす。これは、とりも直さず、宿題になっていた問題の答となっている。

   (a) C を拡大係数行列として求めた解は、本当に最初の B を拡大係数行列とする連立一次方程式の解になっている。（C の解 $\Rightarrow$ B の解）

   (b) B を拡大係数行列とする連立一次方程式の解はすべて最後の C を拡大係数行列として求めた解に含まれている。（B の解 $\Rightarrow$ C の解）

3. $\boldsymbol{x}_0$ は、$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ を満たす n 次列ベクトルとする。$\boldsymbol{x}$ が、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすとすると、
$$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$
だから、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ とおくと、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ で、$\boldsymbol{y}$ は、$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ を満たす n 次列ベクトルになっています。$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の形のものすなわち、$\boldsymbol{b}$ に対応する部分が $\boldsymbol{0}$ になっているものを同次方程式とよびます。逆に、$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{y}$ を取ると、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす。
$$A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}.$$
この様に、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす解一つと、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす解すべてが分かれば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解はすべて分かる。$\boldsymbol{x}_0$ を**特殊解** と言い、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ の形のすべての解を表すものを**一般解**と言います。

   例えば一番最初に考えた連立一次方程式、
$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$$
の場合、一般解は、
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$
と書くことができますが、特殊解は、いろいろとあり、例えば、$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ です。一方、$t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす解の一般形という形になっています。

4. 一般解を求めたり、解の存在非存在を決定するのには、拡大係数行列を考えて、これに行に関する基本変形を施し、ガウス行列、又は、既約ガウス行列にすることによって求めることができます。

   (a) 行に関する基本変形は 3 種類 $P(i;c)$、$P(i,j)$、$P(i,j;c)$ の基本行列という可逆な行列を左からかけることによって実現しました。これより、基本変形によって、解は変わらないことが示せました。すなわち、基本変形前の拡大係数行列に対応する解と、基本変形後の拡大係数行列に対応する解は、同じものである。

   (b) 係数行列の階数と、拡大係数行列の階数が等しいときは、解が存在し、それらが等しくないときは解は存在しない。

   (c) 解が存在する場合は、変数の数と、拡大係数行列の階数の差が、解を表すときの自由変数（パラメター）の数である。

3.3　お茶の時間

3.3.1　経済における均衡分析

均衡分析 (Balance Analysis) と言われるものを紹介しましょう。

市場均衡モデル

ある商品市場は、需要 (demand) の量 D と、供給 (supply) の量 S、および価格 (price) P によって決まる。需要 D は価格 P が増加するにつれ、減少する傾向にある。ここでは、a, b を正の定数として、

$$D = a - bP$$

と表せると仮定しよう。逆に、供給 S は価格 P が増加すれば増加する傾向にあるので、正の定数 c と d に対し

$$S = c + dP$$

によって与えられるものと仮定する。このような市場では、需要と供給のバランスがとれることによって、均衡を保つと考えられる。したがって、

$$D = S$$

が成り立っている。これらを連立方程式で表せば

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} D & & & + & bP & = & a \\ & & S & - & dP & = & c \\ D & - & S & & & = & 0 \end{array}\right.$$

となる。この拡大係数行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -d & c \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

行に関する基本変形を行なってみましょう。

$$\begin{aligned}
[3,1;-1] \quad &\to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -d & c \\ 0 & -1 & -b & -a \end{bmatrix}. \\
[3,2;1] \quad &\to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -d & c \\ 0 & 0 & -b-d & -a+c \end{bmatrix}. \\
[3;\frac{-1}{b+d}] \quad &\to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -d & c \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a-c}{b+d} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$[1,3;d] \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{ad+bc}{b+d} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a-c}{b+d} \end{bmatrix}.$$

$$[2,1;-b] \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{ad+bc}{b+d} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{ad+bc}{b+d} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a-c}{b+d} \end{bmatrix}.$$

これより、

$$D = S = \frac{ad+bc}{b+d},\ P = \frac{a-c}{b+d}$$

が得られる。$D = S$ は最初からわかっていましたから、ちょっと遠回りをしました。変形にもう少し工夫はありますか。

もう少し複雑な市場を考えてみよう。二つの商品の価格 P_1 と P_2 の一次関数として、需要量 D_1, D_2 および供給量 S_1, S_2 が決まるものと仮定する。もちろん、需要と供給の均衡条件を満たしているものとする。

$$\begin{cases} D_1 &= S_1 \\ D_1 &= a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 \\ S_1 &= b_0 + b_1P_1 + b_2P_2 \\ D_2 &= S_2 \\ D_2 &= \alpha_0 + \alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 \\ S_2 &= \beta_0 + \beta_1P_1 + \beta_2P_2 \end{cases}$$

ここで、$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ はすべて定数である。未知数を D_1, S_1, D_2, S_2, P_1, P_2 として、この連立方程式の拡大係数行列を書くと、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\beta_1 & -\beta_2 & \beta_0 \end{bmatrix}$$

ここで、既約ガウス行列に変形すれば解がえられます。または、

$$Q_1 = D = S_1,\ c_1 = a_1 - b_1, \gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1, c_0 = a_0 - b_0$$

$$Q_2 = D = S_2,\ c_2 = a_2 - b_2, \gamma_2 = \alpha_2 - \beta_2, \gamma_0 = \alpha_0 - \beta_0$$

とおくと、

$$\begin{aligned} c_1P_1 + c_2P_2 &= -c_0 \\ \gamma_1P_1 + \gamma_2P_2 &= -\gamma_0 \end{aligned}$$

これを解くのは、それほど難しくありません。$P_1,\ P_2$ をまず求めて、それから、他のものを求めてみて下さい。

さて、三つ以上の商品の価格、需要量、供給量の場合はどうでしょうか。もう手に負えませんか。実は、方程式自体が簡単な形をしているので、一般に n 個の商品の場合にも、解を求めることができます。ここでは、方的式だけ書いておきましょう。

$$\begin{cases} Q_i &= D_i = S_i \\ D_i &= a_{0i} + a_{1i}P_1 + a_{2i}P_2 + \cdots + a_{ni}P_n \\ S_i &= b_{0i} + b_{1i}P_1 + b_{2i}P_2 + \cdots + b_{ni}P_n \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

ケインズによる国民所得モデル

消費 (consumption) の量 C は、所得 (income) Y の増加関数と考えられるので

$$C = a + bY\ (0 < a,\ 0 < b < 1)$$

と仮定することができよう。消費量 C に投資 (investment) の額 I を付け加えたものが所得 Y と均衡するので

$$Y = C + I$$

でなくてはならない。一方、貨幣のある経済社会では、金利 R が上がれば、投資額 I は減少すると考えられるので

$$I = c - dR\ (0 < c,\ 0 < d)$$

と仮定することができる。他方、貨幣の需要 M_d は所得 Y の増加関数で、金利 R の減少関数と考えられるので

$$M_d = e + fY - gR\ (0 < e,\ 0 < f,\ 0 < g)$$

と仮定しておく。

貨幣の供給 M_s は中央銀行の政策によって決められると考えられるから、その供給値を一定値 M_0 とすると、

$$M_s = M_0$$

である。さらに、貨幣の需要と供給は均衡しているとすれば

$$M_d = M_s$$

である。以後、簡単のため、$M_0 = M_d = M_s$ とし、M_0 を定数扱いとする。C, Y, I, R についての連立方程式を考えると、

$$\begin{cases} C & -bY & & & = & a \\ -C & +Y & -I & & = & 0 \\ & & I & +dR & = & c \\ & fY & & -gR & = & M_0 - e \end{cases}$$

これを、条件を用いて解くと、

$$\begin{aligned} C &= \frac{bd(M_0-e)+bcg+ag+adf}{g(1-b)+df} \\ Y &= \frac{d(M_0-e)+g(a+c)}{g(1-b)+df} \\ I &= \frac{(1-b)(d(M_0-e)+cg)-adf}{g(1-b)+df} \\ R &= \frac{-(1-b)(M_0-e)+f(a+c)}{g(1-b)+df} \end{aligned}$$

となる。

C, Y, I での M_0 の係数はすべて正であるが、R での M_0 の係数だけは負である。したがって、中央銀行は、貨幣の供給量 M_0 を増やすことにより、金利 R を下げ、その結果、投資 I をうながし、さらに、所得 Y を増大させることによって、消費 C をも助長できることを示している。

政府と外国貿易

こんどは、政府の関与および外国貿易が介在する場合を考えてみる。

所得 Y に対し、一定の税率 t を掛けたものを税金 (tax) T として徴収する社会を考える。

$$T = tY \ (0 < t < 1)$$

可処分所得 Y_d とは、税引き後の所得であるから

$$Y_d = Y - T = (1-t)Y$$

が成り立つ。消費 C は Y の増加関数というよりも、Y_d の増加関数と見るべきであるから、

$$C = a + bY_d = a + b(1-t)Y \ (0 < a,\ 0 < b < 1)$$

と修正される。さらに、国民所得 Y は、消費 C と投資 I の和だけでなく、政府による支出 G を加えなければならないし、輸出 X と輸入 M との差 $X - M$ を加えなければならない。したがって、所得方程式は

$$Y = C + I + G + X - M$$

によって与えられる。

一方、輸入 M は可処分所得 Y_d に比例する。

$$M = mY_d = m(1-t)Y \ (0 < m).$$

これを上の所得方程式に代入すると、

$$(1 + m(1-t))Y = C + I + G + X$$

がえられる。

あとは、前の節で見たように、投資 I は金利 R の減少関数として表せるし、貨幣の需要 M_d と供給 M_s は、中央銀行の供給量 M_0 と一致し、それは所得 Y の増加関数で、金利 R の減少関数と考えることができよう。

$$I = c - dR \quad (0 < c,\ 0 < d)$$

$$M_0 = M_d = M_s = e + fY - gR$$
$$(0 < e,\ 0 < f,\ 0 < g)$$

これまでの式を整理する。ここでの小文字 $a, b, c, d, e, f, g, m, t$ などはすべて正の定数（他の条件によって決まる一定の定数）で、b と t は 1 より小さい。さらに、a は所得 Y に比べて無視できる程小さな定数で $b > m$ と考えて差し支えない。なぜなら、所得 Y に対する消費 C の平均増加率 C/Y は微小所得変動量 ΔY に対する、微小消費変動量 ΔC の比 $\Delta C/\Delta Y$ に等しいとする根拠があるからである。これを認めれば

$$b(1-t) = \frac{\Delta C}{\Delta Y} = \frac{C}{Y} = \frac{a}{Y} + b(1-t)$$

がえら得るので $a/Y = 0$ と考えられる。

一方、消費輸入量 M は総消費額 C より小さいので

$$C - M = a + (b-m)(1-t)Y > 0$$

この a は Y に比べて小さいので $(b-m)(1-t) > 0$ でなければならない。したがって $m < b < 1$ である。

以下の連立方程式において、M_0, G, X を定数としてあつかうとする。すると、未知数は C, Y, I, R の四つである。

$$\begin{cases} C - b(1-t)Y = a \\ -C + (1 + m(1-t))Y - I = G + X \\ I + dR = c \\ fY - gR = M_0 - e \end{cases}$$

$0 < b-m < 1,\ 0 < 1-t < 1$ より $(b-m)(1-t) < 1$ を利用しこれを解くと、$D = g(1-(b-m)(1-t)) + df$ とおいて、

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{D}(bd(1-t)(M_0-e) + bg(1-t)(G+X+c) \\ &\quad + ag(1+m(1-t)) + adf) \\ Y &= \frac{d(M_0-e)+g(G-X+a+c)}{D} \\ I &= \frac{1}{D}((1-(b-m)(1-t)) \times \\ &\quad (d(M_0-e)+cg) - df(G+X+a)) \\ R &= \frac{1}{D}(-(1-(b-m)(1-t))(M_0-e) \\ &\quad + f(G+X+a+c) \end{aligned}$$

小文字はすべて正で、$0 < 1-t,\ 0 < b-m < 1,\ 0 < (b-m(1-t)) < 1$ などを利用すると次の事実がわかる。

1. 消費 C、所得 Y と投資 I は、中央銀行の貨幣発行額 M_0 の増加関数であり、金利 R のみが M_0 の減少関数である。

2. 消費 C、所得 Y と金利 R は、政府助成金 G と輸出額 X の増加関数であるが、投資額 I のみは、G と X の減少関数となっている。

   ここで $t = m = G = X = 0$ とすれば前節の国民所得モデルと一致する。

以上の分析は極めて単純であった。増加関数であるときは、一次増加関数と考え、減少関数であると考えられる時には、一次減少関数と考えて処理した。したがって複雑な経済減少を扱うには、あまりにも単純化しすぎていて、実態にそぐわないのではないかと考えられるかも知れない。しかし、このように単純化したものであっても、最後の計算結果は、何がしかの新しい情報をわれわれに与えてくれていることは極めて興味深い。

今後の考察の方法としては、非線形として扱うことであり、他面では微積分を利用した局所的扱いをすることも考えられよう。

この節の内容は、[6] から取っています。

3.3.2 オーディオ CD のなかの線形代数

誤り訂正符号

これが、今日のタイトルのオーディオ CD です。[1]CD は皆さんもご存知のように、コンパクト・ディスクの略です。最近良く利用されているのは、他にも DAT や、MD が一般的でしょうか。もっと大容量の記憶装置を持っているものも出てきています。DAT は、デジタル・オーディオ・テープ、MD は ミニ・ディスクでしょうか。これらに共通のもの

[1]2003 年度 ICU オープンキャンパスでの模擬授業の一部を改編。

は、保存されているデータがすべて「デジタル」だということです。デジタルという言葉は、世の中に溢れていますね。ちょっと広辞苑で調べてみましたら、「ある量またはデータを、有限桁の数字列（例えば2進数）として表現すること。アナログの対語とあります。アナログは「ある量またはデータを、連続的に変化しうる物理量（電圧・電流など）で表現すること。」となっていました。デジタル化されているとは、数字になっていると言うことだと思いますが、たとえばオーディオの場合、なぜデジタルなのでしょうか。昔のレコード盤でも良いのではないでしょうか。今も、もちろんその愛好家もいるわけですが。みなさんはなぜだと思いますか。なぜ、デジタルなのでしょうか。

さて、理由は、いろいろとありますが、今日はその中の誤り訂正という話しをしようと思います。実は、デジタル化によって誤り訂正という技術が非常に有効に使われるようになっているのです。

誤り訂正？:

$$\boxed{\textbf{music data}} \Rightarrow \boxed{\textbf{encoder}} \Rightarrow \boxed{\textbf{CD, MD}} \Rightarrow \boxed{\textbf{decoder}} \Rightarrow \boxed{\textbf{player}}$$

途中が問題ですが、エラーは、CD の場合には、ホコリや傷に対応します。ノイズが関係する場合もあります。このことからも容易に想像できるように、携帯電話や、衛星放送などの通信技術にこの技術が利用されています。皆さんは、携帯電話を英語で何と呼ぶか知っていますか。“cellular phone” とか “cell phone” と呼びますね。“portable telephone” とか、“mobile phone” ということばも一部の地域では使われているようですが。これは地域を小さなセル（小さく区切った部屋）に分けて、その中にアンテナをおいて通信をするわけです。この話しも誤り訂正の基本理論ととても関係があるので、時間があればあとで少しお話します。

Hamming Code:

ともかく、どんなふうになるかちょっとやってみましょう。

最初に必要なのは、二つの行列です。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

さて、データは2進4桁とします。0, 1 が 4つ並んだものです。今日は、$(3,8)$ という二つの数を取り上げてみましょう。ここでは、もともと数を扱いましたが、これが音のデータだったりするのです。この2進表示は、$(0011),(1000)$ となります。一番下の位は、$1=2^0$、次は $2=2^1$、次は、$4=2^2$、一番上の位が $8=2^3$ を表します。こういうことは知っているよと言う人はどのくらいいますか。これは2進表示といいますが、それでは、負の数や、少数は2進では、どうあらわしたらよいかわかりますか。考えてみて下さい。今日は、それは必要ありませんから、先にいきましょう。

これを CD に書き込むと、noise 汚れや傷がついて、0 が 1 または、1 が 0 に変わると、他の数を表すことになりますから、これにちょっと付け加えて送ります。a のかわりに、$a\cdot G$ を使います。0 と 1 の世界の足し算を、次のように約束しておきます。

$K=\{0,1\}$ の足し算：

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

そして、$(0011)\cdot G$ は、G の第3行目と第4行目を、それぞれの列ごとに、足すと考えて下さい。桁あがりなどはありませんよ。$1+1=0$ ですから。すると、

$$\begin{aligned}3 &: (0011)\cdot G=(0010110)+(0001111)=(0011001)\\ 8 &: (1000)\cdot G=(1000011)\end{aligned}$$

0, 1 のかけ算を

$$0\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=0,\ 1\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1$$

としておけば、これは、行列のかけ算をしていることだということもわかると思います。

さて、noise があり、これらが変わったとして、そこで得たものが x だとしましょう。このとき、今度は、$x\cdot H$ を計算します。これも同じです。1 のあるところの行を足すと考えて下さい。例えば、

$$(0011001)\to(0011011)\cdot H=(011)+(100)+(110)+(111)=(110)$$

これは2進数の 6 を表しますから 6 番目にノイズが入ったことがわかります。

ではなぜうまくいくのかを考えてみましょう。

	u	$u \cdot G$	wt
0	0000	0000000	0
1	0001	0001111	4
2	0010	0010110	3
3	0011	0011001	3
4	0100	0100101	3
5	0101	0101010	3
6	0110	0110011	4
7	0111	0111100	4
8	1000	1000011	3
9	1001	1001100	3
A	1010	1010101	4
B	1011	1011010	4
C	1100	1100110	4
D	1101	1101001	4
E	1110	1110000	3
F	1111	1111111	7

(3.4)

$$\begin{aligned} C &= \{u \cdot G \mid u \in K^4\} \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} (0000000), & (0001111), & (0010110), & (0011001), \\ (0100101), & (0101010), & (0110011), & (0111100), \\ (1000011), & (1001100), & (1010101), & (1011010), \\ (1100110), & (1101001), & (1110000), & (1111111) \end{array} \right\} \subset V = K^7 \end{aligned}$$

とすると、

$$c + c' \in C \quad \text{for every } c, c' \in C$$

となっています。保存されるのは、C の要素ということになります。Code word と呼ばれますから、その全体を C で表しています。このことを、C は足し算に関して閉じているといいます。

実は、$\cdot$ という演算が、

$$u \cdot G + v \cdot G = (u + v) \cdot G \tag{3.5}$$

を満たすことがわかると、その理由もわかります。

さらに、$c \in C$ とすると、いつでも、

$$c \cdot H = O$$

であることがわかります。実は、G の各行 g について、$g \cdot H = (000)$ であることを確かめれば、あとは、性質 (3.5) からわかります。行列の積を使えば、

$$G \cdot H = O$$

を確かめて、あとは、$c \cdot H = (u \cdot G)H = d \cdot (GH)$ ということからもわかります。結局、普通に送られたものに、H をかけてみると (000) がえられるということです。これが送られてくれば、0 列目にあやまりがありますよ。という意味だったわけです。さて、ここで、

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1000000) \\
e_2 &= (0100000) \\
e_3 &= (0010000) \\
e_4 &= (0001000) \\
e_5 &= (0000100) \\
e_6 &= (0000010) \\
e_7 &= (0000001)
\end{aligned}
$$

としましょう。$c \in C$ とし、i 番目の bit に error が起こった時は、$c + e_i$ が得られるので、$(c + e_i) \cdot H$ を計算すると、性質 (3.5) から、$e_i \cdot H$ が得られ、H の 第 i 列めが得られます。しかし、 H の第 i 列は、2 進数の i を表しているから、i を特定することができる。したがって、一箇所にしか error が起こっていない時は、その位置を特定し、修正することが可能だということです。

なぜ、うまくいくかを、他の面から考えてみましょう。$x, y \in V = K^7$ とし、

$$\mathrm{dist}(x, y) = \text{ことなる成分の個数}$$

で定義すると、

$$\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(x - y, 0) = x - y \text{ のゼロでない成分の個数} = wt(x - y)$$

となります。$c, c' \in C$ を $c \neq c'$ とすると、$c - c'$ はゼロではない、C の要素だから、表から $\mathrm{dist}(x - y, 0) \geq 3$ となっている。つまり C の要素はお互いに、距離 3 以上離れているので、一箇所ぐらい変わっても、もとの位置を特定できる。という関係になっているのです。

冗長さが、誤り訂正の働きをしてくれる。実は、これは、日常生活の中でもあることで、自然言語を使う場合、冗長さを持つことにより、完全に聞きとることができなくても、また話者のことばが完全ではなくても、必要な内容は伝えることができる場合が多い。

余談ですが、DNA に含まれる塩基列の解明が進み、そのなかに組み込まれている遺伝情報が読みとれるようになってきていますが、そのなかで遺伝情報に関係していない、intron という部分がかなりの部分を占めています。しっかりとは理解できていませんが、細胞内で合成するタンパク質についての情報をもった RNA を転写して DNA からつくり出す時に使われない部分がたくさんあるということではないかと思います。高等生物であっても、下等生物であっても、遺伝子の数はそれほどちがわないが、intron は大分違っている。これは、進化の過程の「試行錯誤」のなかで不要になったもの、ともいわれているようですが、ひょっとして、今ここでお話した、誤り訂正などのために働いてはいないかなと夢のような話しも生物のかたと話す時に考えています。

CD の符号:

今、紹介したのは Hamming (7,4,3) 符号というものです。1950 年ごろに作られたものです。長さが 7、情報の場所が 4 桁、最小距離が 3 と言う意味です。どういう符号がいい符号でしょうか。長さに対して、情報の場所が大きくかつ最小距離も大きいものがよい符号です。

実際に CD や MD で使われているのは、2 重符号化 Reed-Solomon Code と言われているものです。最初に、$K = \{0, 1\}$ に足し算とかけ算を定義しましたが、Read-Solomon Code の場合には、要素が 2^m の集合に、四則演算を定義します。四則演算が定義された集合を体といいますが、これをつかって符号を定義するのです。それには、もう少し、複雑な代数が必要です。

Perfect Code:

$C \subset K^n$ 長さが n の e-重誤り訂正符号。C の要素のお互いの距離が $d = 2e + 1$ 以上離れていることが必要です。$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in C$ とすると、x との距離が 1 ということは、x と成分がどこか一つことなるということでしたから、そのようなものの数は、n 個。距離が 2 離れている点は、${}_nC_2$ だけありますから、そのようにして考えると、

$$\bigcup_{c \in C} B_e(c) \subset V \quad \text{(disjoint)}$$

から

$$|C| \cdot \sum_{i=0}^{e} {}_nC_i \leq |K^n| = 2^n$$

となっているはずです。今の場合は、$e = 1$、$d = 3$ だから

$$2^4 \cdot \sum_{i=0}^{1} {}_7C_i = 2^4(1 + 7) = 2^7 = |K^7|$$

ですから、単に不等式になっているのではなく、等式になっているわけです。これは、各 C の要素から距離が $0, 1, \ldots, e$ の点を合わせるとすべての K^n の点が得られるという場合です。この様に上の等式を満たす符号 (code) を完全符号 (perfect code) と呼びます。上の Hamming (7,4,3) 符号は perfect code の例になっています。

長さ n、符号の次元が k、最小距離が d である（2 元）線形符号を (n, k, d) 符号といいます。$d \geq 2e + 1$ のとき、この符号は e 重の誤り訂正をすることができます。

Golay Code:

もう一つすごい符号を紹介しましょう。

$$
G = \begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{bmatrix}
$$

11 で割ったあまりを考え、あるかずの 2 乗になっているものを考えると

$$\{0\} \cup \{1, 3, 4, 5, 9\}$$

これを使って作った行列です。この G を使って作った Binary Golay Code (23, 12, 7) は 3 重誤り訂正符号。

$$2^{12}(1 + {}_{23}C_1 + {}_{23}C_2 + {}_{23}C_3) = 2^{12}(1 + 23 + 253 + 1771) = 2^{12} \cdot 2^{11} = 2^{23}$$

Perfect Codes はあまり存在しないことがわかっています。

Theorem 非自明な（Binary) e-error correcting code ($e \geq 1$) は、Binary Golay Code か、Hamming code と同じパラメター $((2^m - 1, 2^m - m - 1, 3))$ を持つものしか存在しない。

携帯電話と球詰め問題:

皆さんは、携帯電話は、英語で "cellular phone" とか "cell phone" と呼びますね。これは地域を小さなセル（小さく区切った部屋）に分けて、その中にアンテナをおいて通信をするわけです。こちらには、ある円であまり重なりはないけれど、すべてをおおいたいという問題があります。先ほどの符号の問題は、重なりがない円をどれだけたくさんいれることができるかという問題を考えていたとも言えます。どちらも実は、球詰め問題という同じ問題に関係しています。大きな箱にピンポン球をたくさんいれたい。どのくらいの密度でいれることができるだろうか。という問題は、まだ解決がされていません。キッシングナンバーも、1, 2, 3, 8, 24 が解決していますが、それ以外については、わかっていません。情報科学とも関係の深いこれらの問題が、数学的にもとても深い問題と関係していると言うのは、とても面白いことだとは思いませんか。

人間の問題:　今日お話した、符号理論は、暗号理論 (cryptography) [security と関係] とともに情報科学・数学で重要な分野をなしています。わたしは、この符号理論の背景にあるものが好きです。

誤りは避けられない。誤りを指摘されるのは、いやだが、誤りをそっと直しておいてくれるのは何とも嬉しい。通常は無駄なものが癒しを与えてくれる。というのは人間的だと思いませんか。効率が重視される工学でも、世の中の実際の問題を考える時には、われわれが完全ではないということ、人間についてよくわかっていないと、すぐ問題がおこってしまうのです。

3.4　練習問題

Quiz 2, 2005　行列の行に関する三つの基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。

$[i; c]$: 第 i 行を c 倍する (ただし $c \neq 0$). $[i, j]$: 第 i 行と第 j 行を交換する.

$[i, j; c]$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -6 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{}$　(B) $\boxed{}$　(C) $\boxed{}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。(e) (a)-(d) のいずれでもない。

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

Quiz 2, 2005, 解答　行列の行に関する三つの基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。

$[i;c]$: 第 i 行を c 倍する (ただし $c \neq 0$). $[i,j]$: 第 i 行と第 j 行を交換する.

$[i,j;c]$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -6 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{[4,1;2]}$　(B) $\boxed{[2,1;1]}$　(C) $\boxed{[2,3]}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

   解：右下の行列が求める既約ガウス行列である。

$$\xrightarrow{[4,2;2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1,3;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。 <u>(e) (a)-(d) のいずれでもない。</u>

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

   解：

$$\begin{cases} x_1 &= 1 - s - 4u, \\ x_2 &= 3 + 2s - 3t + u, \\ x_3 &= s, \\ x_4 &= t, \\ x_5 &= -2 + u, \\ x_6 &= u. \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   s と t と u はパラメター

Quiz 2, 2004　行列の行に関する三つの基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。

$[i;c]$: 第 i 行を c 倍する (ただし $c \neq 0$). $[i,j]$: 第 i 行と第 j 行を交換する.
$[i,j;c]$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -15 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -15 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{\qquad\qquad}$　(B) $\boxed{\qquad\qquad}$　(C) $\boxed{\qquad\qquad}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。(e) (a)-(d) のいずれでもない。

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

Quiz 2, 2004, 解答　行列の行に関する三つの基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。

$[i;c]$: 第 i 行を c 倍する (ただし $c \neq 0$). $[i,j]$: 第 i 行と第 j 行を交換する.
$[i,j;c]$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -15 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -15 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

(A) $\boxed{[1,4]}$ (B) $\boxed{[2;-\frac{1}{3}]}$ (C) $\boxed{[3,1;1]}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

解：右下の行列が求める既約ガウス行列である。

$$\xrightarrow{[1,4;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[4,2;2]} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

(a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

<u>(d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。</u>(e) (a)-(d) のいずれでもない。

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

解：

$$\begin{cases} x_1 &= -1-3s-2t, \\ x_2 &= s, \\ x_3 &= 5-t, \\ x_4 &= -1+t, \\ x_5 &= t, \\ x_6 &= 8. \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

s と t はパラメター

Quiz 2, 2003　行列の行に関する基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。
1. 第 i 行を c 倍する（ただし $c \neq 0$）: $[i;c]$ （例：$[2;3]$: 第 2 行を 3 倍する）
2. 第 i 行と第 j 行を交換する: $[i,j]$ （例：$[2,3]$: 第 2 行と第 3 行を交換する）
3. 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える: $[i,j;c]$（例：$[2,3;4]$: 第 2 行に第 3 行の 4 倍を加える）
（カンマとセミコロンに注意！）

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -15 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{}$ (B) $\boxed{}$ (C) $\boxed{}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を施して得られる、既約ガウス行列を書け。

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。(e) (a)-(d) のいずれでもない。

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

Quiz 2, 2003, 解答　行列の行に関する基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。
1. 第 i 行を c 倍する（ただし $c \neq 0$）: $[i; c]$　2. 第 i 行と第 j 行を交換する: $[i, j]$　3. 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える: $[i, j; c]$

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -15 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{[4; -\frac{1}{3}]}$ (B) $\boxed{[2, 3; 2]}$ (C) $\boxed{[2, 3]}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を施して得られる、既約ガウス行列を書け。

   $[1, 4; -1]$ を施すと右の行列を得る。これは、既約ガウス行列である。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   <u>(d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。</u>(e) (a)-(d) のいずれでもない。

未知数の数 = 6、拡大係数行列の階数 = 4、係数行列の階数 = 4 であるから、Theorem 2.2 (3) の場合となり、解は存在し、パラメーター $6-4=2$ 個。

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s+t+3 \\ 2s-2t+4 \\ s \\ t+2 \\ -5t-1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

先頭の 1 が今の場合は、第 1, 2, 4, 5 列にありますから、先頭の 1 が無い列に対応する、未知数 x_3, x_6 をパラメーターにします。あとは、拡大係数行列の意味を考えればわかると思います。

Quiz 2, 2002　行列の行に関する基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。
1. 第 i 行を c 倍する（ただし $c \neq 0$）：$[i; c]$ （例：$[2; 3]$: 第 2 行を 3 倍する）
2. 第 i 行と第 j 行を交換する: $[i, j]$ （例：$[2, 3]$: 第 2 行と第 3 行を交換する）
3. 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える: $[i, j; c]$（例：$[2, 3; 4]$: 第 2 行に第 3 行の 4 倍を加える）
（**カンマとセミコロンに注意！**）

1. 以下のように行列に行に関する基本変形を施して、既約ガウス行列を得た。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(1) (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

(A) $\boxed{}$　(B) $\boxed{}$　(C) $\boxed{}$

(2) 上の行列がある連立一次方程式の拡大係数行列を表す時、その解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

2. 次の連立一次方程式を考える。

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -4x_4 & = & 1 \\ x_1 & +3x_2 & +7x_3 & +2x_4 & = & 2 \\ x_1 & -12x_2 & -11x_3 & -16x_4 & = & -1 \end{cases}$$

(1) 拡大係数行列を右上に書け。

(2) 解はないか、ちょうど一個か、無限個あるか判定し、無限個のばあいは、解を表すパラメターの数も記せ。解を求める必要はない。

Quiz 2, 2002, 解答　行列の行に関する基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。
1. 第 i 行を c 倍する（ただし $c \neq 0$）: $[i;c]$ （例：$[2;3]$: 第 2 行を 3 倍する）
2. 第 i 行と第 j 行を交換する: $[i,j]$ （例：$[2,3]$: 第 2 行と第 3 行を交換する）
3. 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える: $[i,j;c]$（例：$[2,3;4]$: 第 2 行に第 3 行の 4 倍を加える）
（**カンマとセミコロンに注意！**）

1. 以下のように行列に行に関する基本変形を施して、既約ガウス行列を得た。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(1) (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

(A) $\boxed{[3,2;-2]}$　(B) $\boxed{[3,4]}$　(C) $\boxed{[3;-\frac{1}{3}]}$

(2) 上の行列がある連立一次方程式の拡大係数行列を表す時、その解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-t+2 \\ s \\ t+1 \\ -2t-1 \\ t \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. 次の連立一次方程式を考える。

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -4x_4 & = & 1 \\ x_1 & +3x_2 & +7x_3 & +2x_4 & = & 2 \\ x_1 & -12x_2 & -11x_3 & -16x_4 & = & -1 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & -12 & -11 & -16 & -1 \end{bmatrix}}$$

(1) 拡大係数行列を右上に書け。

(2) 解はないか、ちょうど一個か、無限個あるか判定し、無限個のばあいは、解を表すパラメターの数も記せ。解を求める必要はない。

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & -10 & -12 & -12 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{階数 2 だから} \\ \text{解は無限個} \\ \text{パラメータ 2 個} \end{array}$$

既約ガウス行列にしなくても、上の形から階数は 2 であることが分かります。計算はなるべく少ないものにしたつもりでしたが、どうでしたか。

Quiz 2, 2001

1. 次の連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施し、既約ガウス行列にし、連立方程式を解くことを考える。

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 9x + y + 5z = 5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (B)$$

(1) (A) では、行に関する基本変形を 2 回行なっているが、何をしているか記せ。

(2) (B) で得られる既約ガウス行列を書け。また、その階数はいくつか。

(3) (2) で求めた既約ガウス行列を用いて最初の連立一次方程式の解を求めよ。

2. 次の命題が正しければ、証明し、誤っていれば反例（成り立たない例）をあげよ。

「n 変数の 1 次方程式 m 個からなる連立一次方程式が無限個解を持つならば、$m < n$ である。」

Quiz 3, 2005

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & -22 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -22 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とし（注：$C = [A\,I]$）以下の様にして行列 A の逆行列を求める。

$$C \rightarrow C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

ここで、C にある行列 S を左からかけると C_1 が得られ、C_1 に T を左からかけると C_2、C_2 に行列 U を左からかけると C_3 が得られるとする。

1. 行列 S の逆行列 S^{-1} を求めよ。
2. 行列 U と T の積 UT を求めよ。
3. 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。
4. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、A の逆行列を用いて x, y, z を求めよ。

Quiz 3, 2005, 解答

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 \to C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

ここで、C にある行列 S を左からかけると C_1 が得られ、C_1 に T を左からかけると C_2、C_2 に行列 U を左からかけると C_3 が得られるとする。

解：それぞれのステップで基本変形、$[2,1;1], [3,1;2], [2,3]$ を順に施したことがわかる。($[2,1;1], [2,3], [2,1;2]$ とも考えられる。)

1. 行列 S の逆行列 S^{-1} を求めよ。

   解：$S = P(2,1;1)$ は、$C_1 = SC = S[A,I] = [SA,S]$ より C_1 の右半分の行列だから、

   $$[S,I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   となる。これは、$P(2,1;-1)$ と表される行列である。

2. 行列 U と T の積 UT を求めよ。

   解：T は左からかけると $[3,1;2]$, U は左からかけると、$[2,3]$ で表される行に関する変形をするのだから、$UT = UTI$ より I に $[3,1;2]$、$[2,3]$ を順に施した得られる行列が UT である。従って、

   $$UT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ または、 } UT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   を計算しても得られる。

3. 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

   解：C_3 にさらに、$[3,2;-4]$, $[3;-1]$, $[1,3;3]$, $[2,3;6]$ を順に施すと、

   $$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 22 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 22 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 44 & -6 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ 従って } A^{-1} = \begin{bmatrix} 22 & -3 & 12 \\ 44 & -6 & 25 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、A の逆行列を用いて x, y, z を求めよ。

   解：$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ だから $\boldsymbol{b}$ に 上で求めた A^{-1} をかければよい。

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 22 & -3 & 12 \\ 44 & -6 & 25 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{cases} x &= -3 \\ y &= -6 \\ z &= -1 \end{cases}.$$

Quiz 3, 2004

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。（注：$C = [A\,I]$）

1. 上の行列の積 $A\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

2. 以下の様にして行列 A の逆行列を求める。

$$C \rightarrow C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

   (a) C にある行列 S を左からかけると C_1 が得られ、C_1 に T を左からかけると C_2 が得られる。行列 S と T を求めよ。（S、T はそれぞれ $SC = C_1$、$TC_1 = C_2$ を満たすもの。）

   (b) 行列 A の逆行列 $B = A^{-1}$ を求めよ。

   (c) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、A の逆行列を用いて x_1, x_2, x_3 を求めよ。

Quiz 3, 2004, 解答

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。（注：$C = [A\,I]$）

1. 上の行列の積 $A\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 + 6x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 \end{bmatrix}.$$

2. 以下の様にして行列 A の逆行列を求める。

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

(a) C にある行列 S を左からかけると C_1 が得られ、C_1 に T を左からかけると C_2 が得られる。行列 S と T を求めよ。（S、T はそれぞれ $SC = C_1$、$TC_1 = C_2$ を満たすもの。）

解：$C_1 = SC = S[A, I] = [SA, SI] = [SA, S]$ ですから、S は C_1 の右半分です。これは、$P(2,1;1)P(3,1;-2)$ を計算しても得られます。C_1 から C_2 は、$[2,3]$ を施してから $[1,2;3]$ を施して得られるから、この操作を I に施しても得られますし、または、$P(1,2;3)P(2,3)$ を計算しても得られます。

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) 行列 A の逆行列 $B = A^{-1}$ を求めよ。

解：$[1,3;6]$ をし $[2,3;4]$ を施すと次のようになります。この場合は、順番は影響ありません。

$$C_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、A の逆行列を用いて x_1, x_2, x_3 を求めよ。

解：$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{b}$ だから $A^{-1}\boldsymbol{b}$ を計算すればよい。したがって、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quiz 3, 2003

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。（注：$C = [A\ I]$）

1. 上の行列の積 $A\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

2. 以下の様にして行列 A の逆行列を求める。

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

(a) C にある行列 S を左からかけると C_1 が得られ、C_1 に T を左からかけると C_2 が得られる。行列 S と T を求めよ。(S、T はそれぞれ $SC = C_1$、$TC_1 = C_2$ を満たすもの。)

(b) 行列 A の逆行列を求めよ。

(c) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、x_1, x_2, x_3 を b_1, b_2, b_3 を用いて表せ。

Quiz 3, 2003, 解答

1. $A\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{bmatrix}.$$

2. (a) 行列 S と T を求めよ。

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$C_1 = SC = S[A, I] = [SA, SI] = [SA, S]$ ですから、S は C_1 の右半分です。これは、$P(2,1;-2)P(3,1;-2)$ を計算しても得られます。C_1 から C_2 は、第 2 行と第 3 行の交換で得られるから、$[2,3]$ という行に関する基本変形に対応しているので、$T = P(2,3)$ となります。

(b) 行列 A の逆行列を求めよ。

$$C_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots$$

である、最初は、$[1,2;-2]$, $[3,2;1]$ を施し、次は $[1,3;-3]$ を施している。これらの意味は、Quiz 2 参照。従って、$A^{-1}A = AA^{-1} = I$ となる行列 A^{-1} は、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 17 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、x_1, x_2, x_3 を b_1, b_2, b_3 を用いて表せ。

$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ だから、$\boldsymbol{b}$ に A^{-1} をかければよい。したがって、

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 17 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17b_1 - 3b_2 - 5b_3 \\ -2b_1 + b_3 \\ -4b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 &= 17b_1 - 3b_2 - 5b_3 \\ x_2 &= -2b_1 + b_3 \\ x_3 &= -4b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

Quiz 3, 2002

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。（注：$C = [B\ I]$）

1. (a) 上の行列の積 AB を計算せよ。

   (b) 行列 A は逆行列を持たない。理由を述べよ。

2. 以下の様にして行列 B の逆行列を求める。

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots$$

   (a) C_1 にある行列 T を左からかけると C_2 が得られる。T とその逆行列 S を求めよ。（T、S はそれぞれ $TC_1 = C_2$、$ST = TS = I$ を満たすもの。）

   (b) 行列 B の逆行列を求めよ。

Quiz 3, 2002, 解答

1. (a) 行列の積 AB。

$$AB = \begin{bmatrix} 1+1-0 & -2-2+3 & 0-1+3 \\ 3-1+0 & -6+2+1 & 0+1+1 \\ -1-2-0 & 2+4-5 & 0+2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(b) 行列 A は逆行列を持たない。理由を述べよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

既約ガウス行列が I ではないので、Proposition 3.3. の 4 を満たさないから逆行列は存在しない。（正方行列 A の rank A が行列のサイズと等しいことと、逆行列が存在することも同値であることが分かります。上の例では rank $A = 2 < 3$ ですから逆行列を持ちません。

[**別解：**] AB の第1列と第3列が等しいことに注目し、A に逆行列 A^{-1} があったとすると

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ の両辺に左から } A^{-1} \text{ をかけると } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となりこれは矛盾。したがって、A に逆行列は存在しません。

2. (a) C_1 にある行列 T を左からかけると C_2 が得られる。T とその逆行列 S を求めよ。（T、S はそれぞれ $TC_1 = C_2$、$ST = TS = I$ を満たすもの。）

このステップでは「第1行に第3行の2倍を加え」ていますから Quiz 2 の記号では $[1, 3; 2]$ でこれは $P(1, 3; 2)$ と表せる行列です。この逆行列は、$[1, 3; -2]$ を実現する $P(1, 3; -2)$。このことから、次のようになります。

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) 行列 B の逆行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

これは Theorem 3.2 より $[I \ B^{-1}]$ の形になっており、右半分が B の逆行列を表す。

Quiz 3, 2001

1. 次の連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施し、既約ガウス行列にし、連立方程式を解くことを考える。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 9x & + & y & + & 5z & = & 5 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (B)$$

   (1) (A) では、行に関する基本変形を 2 回行なっているが、何をしているか記せ。

   (2) (B) で得られる既約ガウス行列を書け。また、その階数はいくつか。

   (3) (2) で求めた既約ガウス行列を用いて最初の連立一次方程式の解を求めよ。

2. 次の命題が正しければ、証明し、誤っていれば反例（成り立たない例）をあげよ。

   「n 変数の 1 次方程式 m 個からなる連立一次方程式が無限個解を持つならば、$m < n$ である。」

第 4 章　微分積分

4.1　多項式と多項式関数

4.1.1　多項式

微分積分に入る前に、基本的な関数として多項式と多項式関数について学びます。ここで学ぶ多項式は、変数が一つだけの多胡式、$2x+3$ とか、$-3x^3+5x-2$ などです。x と y を変数とする、$2xy-x^2+3$ のようなものも多項式と呼びますが、ここでは扱いません。まず、多項式とその次数の定義をします。

定義 4.1.1 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ を数とする時、文字 x を含む式、

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

を（x に関する）多項式という。$c_n \neq 0$ のとき、$f(x)$ を 次数 n の多項式といい、$\deg f(x) = n$ と書く。x に数を代入して、$f(x)$ の値を考える場合は、$f(x)$ を多項式関数という。$\deg 0 = -\infty$ と約束する。

数を与えると、その値が決まる対応を、関数と言います。多項式関数はその一つです。多項式 $f(x)$ の x に数を代入すると、ある数が決まりますが、$c_0, c_1, \ldots, c_n$ はすでに決まった数ですから、これと、今代入した数のかけ算と足し算、または引き算だけで、その値を計算することができます。あとで、指数関数や、対数関数などについても学びますが、引き算は、負の数を足すと考えれば、和と積だけで、計算できる、簡単な関数です。すべての関数を、多項式で表すことはできませんが、値を多項式をつかって近似（近い値を求める）することはできます。

多項式に関しては、次の定理が基本的です。

定理 4.1.1 $f(x)$ を多項式とする。このとき、以下が成立する。

(1) $g(x)$ も多項式とすると、$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$。

(2) $g(x) \neq 0$ ならば、多項式 $q(x)$, $r(x)$ で

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),\ \deg r(x) < \deg g(x)$$

となるものが存在する。

(3) $f(a) = 0$ ならば 多項式 $g(x)$ で $f(x) = (x - a)g(x)$ をみたすものが存在する。

(3) $a_1, a_2, \cdots, a_m$ を相異なる数とする。$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_m) = 0$ ならば多項式 $g(x)$ で

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_m)g(x),\ \deg g(x) = \deg f(x) - m$$

をみたすものが存在する。

4.1.2　組み立て除法

$f(x)$ を n 次の多項式とし、$g(x) = x - a$ とすると、Theorem 4.1.1 (2) より

$$f(x) = q(x)(x - a) + r(x), \quad \deg(r(x)) < \deg(g(x)) = \deg(x - a) = 1.$$

となる多項式、$q(x)$ と $r(x)$ が存在する。ここで、$\deg(r(x)) < 1$ だから、$r(x)$ は定数である。そこで、$r(x) = r$ と書く。すなわち、$f(x) = q(x)(x - a) + r$。ここで $q(x)$ と r を求める方法の一つである組み立て除法 (sythetic division) を解説する。

まず、$f(x)$ が定数 f のときは、$q(x) = 0, r = f$ とおけば、$f(x) = q(x)(x-a)+r$ は成立するから $\deg(f(x))$ は 1 以上とする。 すると、$f(x) - r = q(x)(x - a)$ の左辺は $f(x)$ の次数と等しいから n、右辺は、Theorem 4.1.1 (1) を用いると、$\deg(q(x)) + \deg(x - a)$ だから、

$$n = \deg(f(x)) = \deg(f(x) - r) = \deg(q(x)(x - a)) = \deg(q(x)) + \deg(x - a) = \deg(q(x)) + 1.$$

すなわち $\deg(q(x)) = n - 1$。そこで $f(x)$ と, $q(x)$ を次のようにおく。

$$\begin{aligned} f(x) &= c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \\ q(x) &= b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

すると、

$$\begin{aligned} f(x) - r &= c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + (c_0 - r) \\ q(x)(x - a) &= (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0)(x - a) \\ &= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - b_{n-1}a)x^{n-1} + (b_{n-3} - b_{n-2}a)x^{n-2} + \cdots \\ &\quad + (b_0 - b_1 a)x + (-b_0 a) \end{aligned}$$

だから、$f(x) - r = q(x)(x - a)$ の両辺の x^n, $x^{n-1}, \ldots, x$ の係数と 定数項 (x^0 の係数) を比べると、

$$c_n = b_{n-1},\ c_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1}a,\ c_{n-2} = b_{n-3} - b_{n-2}a,\ \ldots,\ c_1 = b_0 - b_1 a,\ c_0 - r = -b_0 a$$

したがって、

$$b_{n-1} = c_n,\ b_{n-2} = c_{n-1} + b_{n-1}a,\ b_{n-3} = c_{n-2} + b_{n-2}a,\ \ldots, b_0 = c_1 + b_1 a,\ r = c_0 + b_0 a$$

である。すなわち、$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$ と r を求めるには、まず b_{n-1} は c_n ($f(x)$ の x^n の係数)、b_{n-2} は、c_{n-1} に、b_{n-1} に a をかけたものを足す、b_{n-3} は、c_{n-2} に、b_{n-2} に a をかけたものを足す、と順に求めていけば良く、最後、同じように、c_0 に、b_0 に a をかけたものを足したものが r になるという仕掛けになっている。これを計算しやすいように書くと次のようになる。

a	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	$\cdots$	c_1	c_0
		$b_{n-1}a$	$b_{n-2}a$	$\cdots$	b_1a	b_0a
	c_n	$c_{n-1} + b_{n-1}a$	$c_{n-2} + b_{n-2}a$	$\cdots$	$c_1 + b_1a$	$c_0 + b_0a\ (= r)$
	$(= b_{n-1})$	$(= b_{n-2})$	$(= b_{n-3})$	$\cdots$	$(= b_0)$	

例 4.1.1 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ とし $g(x) = x - 2$ として $f(x) = q(x)(x-2) + r$ となるような $q(x)$ と r を求める。
$\deg(f(x)) = 3$ だから $\deg(q(x)) = 2$ となるはずである。$r = f(2)$ だったから $f(x)$ の x に 2 を代入しても求められるが、組み立て除法で $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ と r を一度に求めてみる。右の表の最初の 3 行がこの計算の部分である。従って、$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 5)(x-2) - 4$, 同様にして、3 行目から 5 行目は、$x^2 - 5$ を $x - 2$ で割り $x^2 - 5 = (x+2)(x-2) - 1$ になることを意味し、5 行目から 7 行目は、$x + 2$ を $x - 2$ で割ると $x + 2 = (x-2) + 4$ と書けることの計算が組み立て除法でなされている。

2	1	−2	−5	6
		2	0	−10
2	1	0	−5	−4
		2	4	
2	1	2	−1	
		2		
	1	4		

これから

$$f(x) = (((x-2)+4)(x-2)-1)(x-2)-4 = (x-2)^3 + 4(x-2)^2 - (x-2) - 4$$

と $f(x)$ を $x - 2$ に関する多項式として書くことができた。これは、2 に非常に近い値を近似的にもめるときに便利である。たとえば $x = 2.01$ とすると $(x-2)^3 = 0.01^4$, $(x-2)^2 = 0.01^2$ と非常に小さい数となり、2 の近くでの $f(x)$ の値は、$-4 - (x-2)$ を計算すれば近い値が求まり、もう少し精度を上げようとすれば、$-4 - (x-2) + 4(x-2)^2$ と、$f(x)$ を計算するよりは、簡単な式で計算できるからである。

4.1.3 補間法

$a_1, a_2, \cdots, a_m$ を相異なる数とする。$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)$、$P_i(x) = P(x)/(x-a_i)$ とすると、$j \neq i$ のときは、$P_i(x)$ は $(x-a_j)$ の項を含むから $P_i(a_j) = 0$ となる。また、$P_i(a_i) \neq 0$ である。そこで $Q_i(x) = P_i(x)/P_i(a_i)$ とすると、$Q_i(a_j) = 0$、$Q_i(a_i) = 1$ となる。

命題 4.1.2 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ を相異なる数とする。このとき、

$$f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2, \cdots, f(a_m) = b_m$$

を満たす多項式 $f(x)$ が存在する。ある多項式 $h(x)$ を用いて、$f(x)$ は次のように書くことができる。

$$f(x) = b_1Q_1(x) + b_2Q_2(x) + \cdots + b_mQ_m(x) + h(x)P(x)$$

特に次数 $\deg f(x) \leq m$ を満たすものはただひとつだけである。

例 4.1.2

$$\begin{aligned} f(x) &= b_1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + b_2 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + b_3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= \frac{b_1}{2}(x-2)(x-3) - b_2(x-1)(x-3) + \frac{b_3}{2}(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

は、$f(1) = b_1, f(2) = b_2, f(3) = b_3$ を満たす多項式であり、逆に $f(x)$ をこの条件を満たす多項式とすると、ある多項式 $h(x)$ で

$$\frac{b_1}{2}(x-2)(x-3) - b_2(x-1)(x-3) + \frac{b_3}{2}(x-1)(x-2) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)$$

と書くことができる。

多項式によって定義される関数は「非常に滑らか」なので、それぞれの点 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ で与えられた値をとる関数を与える方法として上の方法が用いられる。補間法 (Interpolation) と呼ばれる。

例 4.1.3 $f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 14, f(4) = 30$ となる 3 次の多項式を求めてみましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \\ &\quad + 14 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(1-3)(2-3)(4-3)} + 30 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \\ &= -\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{5}{2}(x-1)(x-3)(x-4) \\ &\quad - 7(x-1)(x-2)(x-4) + 5(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1) \end{aligned}$$

これで原理的には、補間法によって、与えられた点を通る多項式を求めることができました。計算は面倒な部分も多いですが、最近はその部分は計算機が計算してくれます。原理を知っていること。補間法が何をしているのかを理解することは大切です。

4.1.4 数学的帰納法*

次が成り立つ。

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4.1}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \tag{4.2}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^i b^{n-i-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{4.3}$$

証明： (4.1) 2 倍にして考えると、

$$2(1 + 2 + \cdots + n) = (1+n) + (2+n-1) + \cdots + (n-1+2) + (n+1) = n(n+1)$$

ですから公式が得られます。

(4.2) (4.1) もそうですが、**数学的帰納法**を用いると、簡単に証明できます。数学的帰納法は次の原理によっているものです。

> 空でない自然数の集合は最小元を持つ。

「いくつかの自然数からなる集合にはいつでも一番小さい元がある」ということです。当たり前のことですね。この原理をもちいると次のことが証明できます。

> 自然数に関する命題 $P(n)$ において、$P(1)$ が真かつ、$P(k)$ が真であることを**仮定した時** $P(k+1)$ が真であれば、すべての自然数 n について $P(n)$ は真である。記号で次のようにあらわすこともあります。$\forall k$ の部分は 'for all k such and such hold' と読みます。
>
> $$(P(1) \land (\forall k)[P(k) \Rightarrow P(k+1)]) \Rightarrow (\forall n)P(n)$$

これを数学的帰納法の原理といいます。これが正しいことを証明してみましょう。

$$S = \{n \mid n \text{ は自然数で } P(n) \text{ は偽}\}$$

S は自然数からなる集合で $P(n)$ が真となる自然数すべてからなっているといういみです。ですから、S に入らない自然数 n については $P(n)$ が真となっています。(英語ではいくつかの自然数からなる集合のばあいは 'a set of positive integers' といいます。'the set of positive integers' は自然数全体からなる集合を意味します。さて上の S を英語で表現するとどうなるでしょうか。)

$S = \emptyset$ を示せば良いわけですから、$S \neq \emptyset$ とします。すると上の原理から、S に最小元 m が存在します。$m \in S$ ですから、$P(m)$ は偽です。$P(1)$ は真だと最初に仮定していますから、$m \neq 1$ です。m は 1 とはことなる自然数ですから、$m-1$ も自然数です。ところが、m は S の最小元でしたから、それより小さい $m-1$ は S に入りません。した

がって、$m-1 \notin S$ です。S に入っていない自然数については、命題は真のはずですから、$P(m-1)$ は真。ところが仮定より m の一つ前 $m-1$ で $P(m-1)$ が真なら、$P(m)$ も真でした。これは矛盾。したがって $S=\emptyset$。すなわち、すべての自然数 n について $P(n)$ は真です。

今、命題 $P(n)$ を次のようにおきます。

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$P(1)$ は真です。なぜなら左辺は、1 で右辺も 1 となります。$P(k)$ が真だとすると、

$$1^2+2^2+\cdots+k^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

です。これが成り立っていると仮定して、次の式を証明します。

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)$$

この式の左辺から出発すると、

$$\begin{aligned} LHS &= (1^2+2^2+\cdots+k^2)+(k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2 \ = \ \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) \ = \ \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

これが求める式でした。最初のところで、$P(k)$ が真であることを用いたことに注意して下さい。したがって、数学的帰納法により、すべての自然数について (4.2) が証明できました。

数学的帰納法による証明はなれると簡単ですが、最初から証明する式ができていないと、証明できません。つまり全体が把握されていないと証明に入れません。今の場合はそれが与えられていましたから、証明もできたという面が大きいのです。よく「証明することがわかれば、証明はそれほど難しくはない」といわれるゆえんです。(4.1) も同じように数学的帰納法で証明できます。証明を書いてみて下さい。

(4.3) この左辺を展開します。

$$\begin{aligned} &(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+a^ib^{n-i-1}+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) \\ &= a^n+a^{n-1}b+\cdots+a^{i+1}b^{n-i-1}+\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1} \\ &\qquad -a^{n-1}b-\cdots-a^{i+1}b^{n-i-1}-\cdots-a^2b^{n-2}-ab^{n-1}-b^n \\ &= a^n-b^n \end{aligned}$$

4.1.5 差分と多項式関数*

次のような数列を考えましょう。

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 3 & & 13 & & 34 & & 70 & & 125 & & 203 & & 308 & & 444 \\
& 0 & & 3 & & 10 & & 21 & & 36 & & 55 & & 78 & & 105 & & 136 & \\
& & 3 & & 7 & & 11 & & 15 & & 19 & & 23 & & 27 & & 31 & & \\
& & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & &
\end{array}$$

最初の数列を f_n、二番目を g_n、三番目を h_n とすると、

$$h_{n+1} - h_n = 4,\ g_{n+1} - g_n = h_n,\ f_{n+1} - f_n = g_n$$

となっていることがわかります。。新しい数列を作る方法を

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n = g_n,\ \Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta g_n = h_n, \ldots, \Delta^m f_n = \Delta(\Delta^{m-1} f_n), \ldots,$$

とすると、$\Delta f_n = g_n,\ \Delta^2 f_n = h_n,\ \Delta^3 f_n = 4,\ \Delta^4 f_n = 0$ となっています。同じように、$\Delta^2 h_n = 0$、$\Delta^3 g_n = 0$ となっている。さて、このとき、f_n などを n の関数のように表すことができないでしょうか。

$h_n = 3 + 4(n-1)$ です。この式で $h_1, h_2, h_3, \ldots$ の値があっていることを確かめて下さい。この数列を「公差 4、初項 3 の等差数列 (arithmetic sequence)」といいます。上の例の場合では、$g_{n+1} = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ だったので、

$$g_{n+1} = \frac{1}{2} n(4n+2) = n(2n+1),\ g_n = (n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1$$

となっています。g_{n+1} から g_n を得るところは g_m、$m = n+1$ したがって $n = m-1$ として導いた方が間違えが少ないかも知れません。では、f_n はどうなっているでしょうか。$f_{n+1} - f_n = 2n^2 - 3n + 1$ でしたから、

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= 0 + 3 + \cdots + (2n^2 - 3n + 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - 3k + 1) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \text{ ここで公式 (4.1), (4.2) を用いると} \\
&= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{1}{6} n(n-1)(4n+1) \\
f_n &= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3)
\end{aligned}$$

となります。

すこしまとめてみましょう。一般に $\{f_n\}$ を数列としたとき、

- $\Delta f_n = 0$ ならば $f_n = d$。
- $\Delta f_n = d$ ならば $f_n = c + d(n-1)$ で $c = f_1$。さらにこの場合は、$\Delta^2 f_n = 0$ となっています。f_n は n の一次式。$c_0 + c_1 n$ という形をしています。

定理 4.1.3 $\Delta^{m+1} f_n = 0$ ならば f_n は n の m 次式、すなわち次の形をしている。

$$f_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n^m.$$

逆にこの形をしていると、$\Delta^{m+1} f_n = 0$。

証明.　まず、$\Delta n^m = m \cdot n^{m-1} + c_{m-2} n^{m-1} + \cdots c_1 n + c_0$ となる定数 $c_0, c_1, \ldots, c_{m-2}$ がとれることを証明します。

$$\begin{aligned}
\Delta n^m &= n^m - (n-1)^m \text{ 公式 (4.3) を用いると} \\
&= (n-(n-1))(n^{m-1} + n^{m-2}(n-1) + \cdots + n(n-1)^{m-2} + (n-1)^{m-1}) \\
&= m \cdot n^{m-1} + (m-2 \text{ 以下の } i \text{ にたいする } n^i \text{ に係数がついた項})
\end{aligned}$$

これによって、最初にかいたような定数 $c_0, c_1, \ldots, c_{m-2}$ がとれることが分かりました。
それでは、数学的帰納法で、次の命題を証明しましょう。

$P(m) : \Delta^m f_n = 0 \Leftrightarrow f_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_{m-1} n^{m-1}$ となる定数 $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ がとれる

最初に $\Leftarrow$ を証明します。
$P(1)$: $f_n = a_0$ となる定数 a_0 があれば $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n = a_0 - a_0 = 0$ ですから、$\Delta f_n = 0$ を満たします。
$P(k)$ が成り立っているとします。すなわち、どんな数列も n に関して $k-1$ 次式で書けていれば、Δ^k をとると 0 になるとします。

$$\begin{aligned}
&\Delta^{k+1}(a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k) \\
&= \Delta(\Delta^k(a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1})) + \Delta^k(\Delta n^k) \\
&= \Delta 0 + \Delta^k(k n^{k-1} + c_{k-2} n^{k-2} + \cdots + c_1 n + c_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり証明できました。
次に $\Rightarrow$ を証明します。
$P(1)$: $\Delta f_n = 0$ とすると、$0 = \Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ ですから、$f_1 = a_0$ とすると、$f_n = a_0$ となる。
$P(k)$ が満たされていると仮定する。
$P(k+1)$: $\Delta^{k+1} f_n = 0$ とします。$g_n = \Delta f_n$ とおくと $\Delta^k g_n = \Delta^k \Delta f_n = \Delta^{k+1} f_n = 0$ だから $P(k)$ を仮定したことより、$g_n = b_0 + b_1 n + \cdots + b_{k-1} n^{k-1}$ となる定数 $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ をとることができます。ここで

$$h_n = f_n - \frac{b_{k-1}}{k} n^k$$

とおき、証明の最初に示したことを使うと、

$$\begin{aligned}\Delta h_n = h_{n+1} - h_n & \\ &= (f_{n+1} - \frac{b_{k-1}}{k}(n+1)^k) - (f_n - \frac{b_{k-1}}{k}n^k) \\ &= (f_{n+1} - f_n) - \frac{b_{k-1}}{k}((n+1)^k - n^k) \\ &= \Delta f_n - \frac{b_{k-1}}{k}\Delta n^k \; n^k \text{ に最初に示した式を用いると} \\ &= g_n - \frac{b_{k-1}}{k}(k \cdot n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + \cdots + c_1 n + c_0) \\ &= (b_{k-2} - \frac{b_{k-1}}{k}c_{k-2})n^{k-2} + \cdots + (b_1 - \frac{b_{k-1}}{k}c_1)n + (b_0 - \frac{b_{k-1}}{k}c_0)\end{aligned}$$

となり、Δh_n は $k-2$ 次になりますから、$\Leftarrow$ をもちいると、$\Delta^k h_n = \Delta^{k-1}\Delta h_n = 0$。帰納法の仮定より $P(k)$ を用いると、$h_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1}n^{k-1}$ となる定数 $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ があることが分かります。ここで、$a_k = b_{k-1}/k$ とおけば、$f_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k$ となることが分かります。 ■

4.2 極限と関数の連続性

4.2.1 数列の極限と級数

数列: 数列 (sequence) $1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots$ において n を大きくしていくと $1/n$ は小さくなり 0 に近づく。一般に、数列 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ が一定の値 α に近づく時、$\{a_n\}$ は α に収束 (converge) する、または $\{a_n\}$ の極限値は α であるといい、記号で

$$a_n \to \alpha \, (n \to \infty), \text{ または } \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と書く。従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ である。収束しない数列は発散する (diverge) という。発散する場合はさらに、「正の無限大に発散」(限りなく大きくなる時)、「負の無限大に発散」(負の値をとりながらその絶対値は限りなく大きくなる時)といい、いずれでもない場合「振動する」ということもある。

例 4.2.1

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n = \infty$: 正の無限大に発散.
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} -n = -\infty$: 負の無限大に発散.
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n n$: 発散:振動.

4. $a_n = r^n$ のときは次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty: \text{ 正の無限大に発散} & \text{if } r > 1 \\ 1: \text{ 1 に収束} & \text{if } r = 1 \\ 0: \text{ 0 に収束} & \text{if } |r| < 1 \\ \text{発散：振動} & \text{if } r \leq -1 \end{cases}.$$

命題 4.2.1 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき、以下が成り立つ。

(1) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = c\alpha,\quad (c \text{ は定数})$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta},\quad (b_n \neq 0, \beta \neq 0)$

例 4.2.2 1. $\lim_{n\to\infty} 2 - \dfrac{5}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} = 2 - 0 = 0.$

2. $\lim_{n\to\infty} \left(3 - \dfrac{1}{n}\right)\left(4 + \dfrac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} 3 - \dfrac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} 4 + \dfrac{1}{n}\right) = 3 \cdot 4 = 12.$

3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2-n}{3n-5} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n} - 1}{3 - \frac{5}{n}} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - 1}{\lim_{n\to\infty} 3 - \frac{5}{n}} = \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}.$

4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{0}{1} = 0.$

5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n^2}} = \dfrac{1}{2}.$

6. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+3}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n + 2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} n + 2 + \frac{3}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} n + 2 = \infty.$

7. $\lim_{n\to\infty} (-3)^n =$ 発散：振動.

8. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{7}\right)^n = 0.$

9. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1.$

級数:　数列 $\{a_n\}$ において、初項（最初の項）a_1 から第 n 項までの和を第 n 部分和といい s_n とおく。

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\{s_n\}$ が s に収束するとき 無限級数 (infinite series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

は収束し和が s であるといい、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ と書く。$\{s_n\}$ が発散するとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散するという。

公式 (5-1) で $a = 1$、$b = r$ とすると、

$$1 - r^n = (1 - r)(1 + r + \cdots + r^{n-i-1} + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1})$$

だから

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} ar^i = a\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

となる。これより等比数列 $\{a_n = ar^{n-1}\}$ に関して次の結果を得る。

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i = a\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & (-1 < r < 1) \\ \text{発散} & (r < -1,\ \text{or } r > 1) \end{cases} \tag{4.4}$$

例 4.2.3 無限等比級数の収束、発散。

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{81}{3^n} = 27 + 9 + 3 + 1 + \cdots = \frac{81}{1-\frac{1}{3}} = \frac{243}{2}$.
2. $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}2^n = 2 - 4 + 8 - 16 + \cdots$: 発散.

収束するということ：　もう少し複雑な数列や級数を扱うようになると、直観的な定義では不十分な場合が起こってくる。たとえば 数列 $\{a_n\}$ が α に収束すれば、平均をとってできる数列

$$s_1 = a_1,\ s_2 = \frac{a_1 + a_2}{2},\ s_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3},\ \cdots,\ s_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n},\ \cdots$$

は α に収束する。このような問題を扱うためにも n を大きくしていくと数列 $\{a_n\}$ が一定の値 α に近づくということを厳密に定義しておかなければならない。

定義 4.2.1 数列 $\{a_n\}$ が与えられた時、正の数 ϵ をどのように選んでも、$m \geq m_0$ であれば

$$|a_m - \alpha| < \epsilon$$

が成立するように m_0 を見つけることができるとき（m_0 は ϵ によって変わってくる)、数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と記す。

一般に $|a+b| \leq |a| + |b|$ が成り立つ。これと上の定義を用いて、命題 4.2.1 (2) を証明してみよう。

証明：　任意に正の数 ϵ が与えられたとする。このとき $m \geq m_0$ であれば

$$|(a_m + b_m) - (\alpha + \beta)| < \epsilon \tag{4.5}$$

が成立するような m_0 を見つけることができることを示す。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ だから、正である $\epsilon' = \epsilon/2$ について、$m \geq m_1$ であれば

$$|a_m - \alpha| < \epsilon' \tag{4.6}$$

が成立するような m_1 を見つけることができる。同様に、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ だから、$m \geq m_2$ であれば

$$|b_m - \alpha| < \epsilon' \tag{4.7}$$

が成立するような m_2 を見つけることができる。ここで m_1、m_2 の大きい方を m_0 とすると、$m \geq m_0$ であれば (4.6) も (4.7) も満たされる。したがって、

$$|(a_m + b_m) - (\alpha + \beta)| \leq |a_m - \alpha| + |b_m - \beta| < \epsilon' + \epsilon' = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立つ。したがって、$m \geq m_0$ であれば (4.5) を満たすような m_0 を見つけることができた。定義からこれは

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \alpha + \beta$$

がを意味する。 ■

上の議論では、収束の定義から ϵ が**何であれ**正の数であれば、それに対応してある条件をみたす、m_0 をとることができることが重要であった。ϵ は何であっても良かったので、$\epsilon' = \epsilon/2$ についても条件を満たす数を取ることができることを用いて、証明することができた。

4.2.2　関数の極限・連続性

定義 4.2.2 関数 $f(x)$ において 変数 x が a と異なる値をとりながら a に近づくとき、$f(x)$ が一つの値 α に近づくならば x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値は α であるといい、

$$f(x) \to \alpha \ (x \to a) \ \text{または} \ \lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

で表す。

　すなわち、ある区間 $c < x < d$ で定義された関数 $f(x)$ が与えられた時、正の数 ϵ をどのように選んでも、$0 < |x-a| < \delta$ であれば

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon$$

が成立するように δ を見つけることができるとき（δ は ϵ によって変わってくる)、α は、関数 $f(x)$ の a における極限であるといい、

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

と記す。

命題 4.2.2 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$、$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ のとき、以下が成り立つ。

(1) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = c\alpha \quad$ (c は定数)

(2) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \alpha + \beta$

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta} \quad (g(x) \neq 0,\ \beta \neq 0)$

　関数 $f(x) = x^2 + 1$ において変数 x が 2 と異なる値をとりながら 2 に近づく時 $f(x)$ は値 $f(2) = 5$ に近づく。$|a+b| \leq |a| + |b|$ を用いると、2 の近くでは $|x| < 3$ として良いから、

$$|f(x)-5| = |x^2+1-5| = |x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| \leq |x-2|(|x|+2) < 5|x-2|$$

であるから、$x \to 2$ すなわち $|x-2| \to 0$ のとき $|f(x) - 5| \to 0$ となる。従ってこの場合、$f(x)$ の 2 における極限値は、$x = 2$ における値 $f(2)$ になっている。

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5 = f(2).$$

定義 4.2.3 一般に関数 $f(x)$ において、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つ時、関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続 (continuous) であるという。また、関数が定義されている各点で $f(x)$ が連続であるとき、$f(x)$ は連続である、または連続関数であるという。

　このことは、a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$ について、次が成り立つことと同値である。

$$f\left(\lim_{n \to \infty} a_n\right) = \lim_{n \to \infty} f(a_n).$$

すなわち、f が lim 記号と「交換可能」であると表現することもできる。

例 4.2.4 定数関数 c、多項式（その他 $\sin x$、$\cos x$、e^x など）は、各点で連続、また、連続関数の和、差、定数倍、積も、連続関数。商も、分母が零にならない範囲で連続関数である。

例 4.2.5

1. $f(x) = (x^2+7x)/(x+1)$ の -2 での極限値と考える。x^2+7x も $x+1$ も多項式だから $x=-2$ で連続でかつ、分母の $x+1$ は $x=-2$ の近くで 0 にならないから、
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+7x}{x+1} = \frac{\lim_{x\to-2} x^2+7x}{\lim_{x\to-2} x+1} = \frac{(-2)^2+7(-2)}{(-2)+1} = \frac{-10}{-1} = 10.$$
この場合は $f(-2)=10$ だから $f(x)$ は $x=-2$ で連続である。

2. $g(x) = (x^2-5x+4)/(x-4)$ の 4 での極限値を考える。$x=4$ では分母が 0 になるので、$g(x)$ は $x=4$ で定義されていない。しかし、$x\neq 4$ では定義されている。分子は $x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$ だから $x\neq 4$ では $g(x)=x-1$ になる。従って、
$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x-4} = \lim_{x\to 4} x-1 = 4-1 = 3.$$
関数の a での極限は、$x\neq a$ で x が a に近づいて行くときの $g(x)$ の値が α に近づくとき $g(x)\to\alpha$ というのであった。$x\neq a$ の条件に注意。この関数は $x=4$ で定義されていないので、連続性は問えないが、別途 $g(4)=3$ と定義すれば、$g(x)$ は $x=4$ で連続。実際には分母が 0 になるのは、$x=4$ の時だけだったから、$g(x)$ は連続関数（すべての実数で連続）である。$g(4)=0$ などと定義すると、$g(x)$ はすべての実数で定義されているが、$x=4$ では連続ではない。となる。

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} x-1 = -1.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 = 4.$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+2 = 1+2 = 3.$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+1} = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+1} = 4.$

命題 4.2.3 閉区間 $[a,b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ において、C を、$f(a)$ と、$f(b)$ の間の値とすると、$f(c)=C$ となる点 c が、区間 $[a,b]$ 内にある。

例 4.2.6 $f(x)$ を奇数次数の多項式とすると、$f(x)=0$ は必ず根をもつ。

例 4.2.7 $f(x) = 4x^5-10x^4-20x^3+40x^2+16x-15$ とする。$f(-2)=-15$、$f(-1)=15$、$f(0)=-15$、$f(1)=15$、$f(2)=-15$、$f(3)=15$。従って、５つの区間 $[-2,-1]$、$[-1,0]$、$[0,1]$、$[1,2]$、$[2,3]$ の内部で、$f(x)=0$ となる点、すなわち根を少なくとも一つずつ持つ。$f(x)$ は、５次多項式だから、高々５個の実根を持つ。すなわち、この５個以外には、根を持たず、これらの区間に丁度一つずつあることも解ります。（なぜでしょう。）

命題 4.2.4 閉区間 $[a, b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ は、$[a, b]$ 上の最大・最小をとる。

Note. 上の命題で、閉区間でない場合は、必ずしも、最大・最小を持つとは限らない。
例えば、$f(x) = -x^2 + 2x + 1$、$(0 < x < 2)$ とすると、$1 < f(x) \leq 2 = f(1)$ だから、区間 $(0, 2)$ で最大値は取るが、最小値は取らない。

4.2.3 指数関数・対数関数

定義 4.2.4 [指数関数] $a > 0$ に対して $f(x) = a^x$ とした関数を（a を底とする）指数関数 (exponential function) という。a^x は次の (i) - (iii) によって定義する。

(i) $a^0 = 1,\ a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ times}},\ a^{-n} = (1/a)^n$（$n$ が自然数のとき）

(ii) $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ （p, q が整数で $q > 0$ のとき）

(iii) $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{b_n}$ （数列 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ が x に収束するとき）

たとえば、$a = 2$ としたとき、2^3, $2^{3.1}$, $2^{3.14}$, $2^{3.141}, \ldots$ の収束する値を 2^π とするのである。

命題 4.2.5 (指数法則) $a > 0$ とする。任意の実数 x, y に対して、次が成立する。

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

定義 4.2.5 [対数] $1 \neq a > 0$ とし、$b = a^x$ となるとき $x = \log_a b$ と書く。x を a を底 (base) とする b の対数 (logarithm) という。$b > 0$ ならば $b = a^x$ となる x が一つに決まるのでその x を $\log_a b$ と書く。

$a^0 = 1$ だから $\log_a 0 = 1$。また定義から $a^{\log_a x} = x$ である。

例 4.2.8 $a = 10$ とすると、$10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $100000 = 10^5$, $0.1 = 10^{-1}$, $0.01 = 10^{-2}$ だから

$$\log_{10} 10 = 1,\ \log_{10} 100 = 2,\ \log_{10} 100000 = 5,\ \log_{10} 0.1 = -1,\ \log_{10} 0.01 = -2.$$

$a = 2$ とすると、$2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $1024 = 2^{10}$, $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, $1/2 = 2^{-1}$ だから

$$\log_2 2 = 1,\ \log_2 4 = 2,\ \log_2 1024 = 10,\ \log_2 \sqrt{2} = 0.5,\ \log_2(1/2) = -1.$$

命題 4.2.6 $a > 0$ とすると次が成立する。

(i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(ii) $\log_a x^y = y \log_a x$.

(iii) $b>0$ とすると、$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

証明. (i) $b=\log_a x$, $c=\log_a y$ とすると、定義から、$x=a^b$, $y=a^c$ だから $a^{b+c}=a^b\cdot a^c=xy$。従って、$\log_a xy=b+c=\log_a x+\log_a y$.
(ii) $b=\log_a x^y$, $c=\log_a x$ とすると、$a^b=x^y$, $x=a^c$ だから $x^y=a^b=(a^c)^y=a^{cy}$。従って、$\log_a x^y=b=cy=y\log_a x$。
(iv) $c=\log_a x$, $d=\log_b a$ とする。$x=a^c$, $a=b^d$ だから $x=a^c=(b^d)^c=b^{cd}$ となり、

$$(\log_a x)(\log_b a)=cd=\log_b x,\ \text{従って}\ \log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

となる。 ■

例 4.2.9 $f(x)=c\cdot a^{bx}$ なる関数の a を底とする対数を表す関数を $g(x)$ とする。すると、

$$g(x)=\log_a(c\cdot a^{mx})=\log_a c+m\cdot x=m\cdot x+b,\ (b=\log_a c)$$

したがって、$g(x)$ は x に関する一次関数で表された。 このように指数関数で表されるものは、対数をとると、簡単な関数で表すことができるため、実際の値ではなく対数をとった値を使うことがある。

マグニチュード： 地震波のエネルギーの大きさはマグニチュードで表される。マグニチュードは、地震のエネルギーの対数を取ったものである。M8 の地震の地震波のエネルギーは $6.3\times10^{16}J$（J はエネルギーの単位ジュール）である。断層運動など全体のエネルギー（岩石を破壊したり、大地を動かしたりするエネルギー）はその 10 倍程度である。地震の強さの表現の仕方は様々であるが、エネルギーの対数を取って表すものが多い。マグニチュードが 1 大きくなるとエネルギーは 32 倍になる。日本で 1 年間に使われる電力エネルギーは M8.4 の地震全体のエネルギーに匹敵する。広島型の原爆は 20 kton（キロトン）爆弾で $8.4\times10^{13}J$ で大体 M6 の地震のエネルギーに相当する。（kton：トリニトロトルエン (TNT) 火薬 1000J/g に換算してどの程度のエネルギーかを表す爆弾の大きさを表す単位。）

4.2.4 Nepier の数（自然対数の底） e

$a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ とすると、$a_1=2$, $a_2=2.25$, $a_3=2.37,\ldots,a_n=2.59$, $a_{12}=2.61$, $a_{365}=2.71\ldots$ となる。この数列は増加しかつ 3 を越えないことから収束することが知られている。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.7182818284590\cdots \tag{4.8}$$

$(1+1)^1=2$, $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.37\cdots$, $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}=2.59\cdots$, $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}=2.61\cdots$, $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}=2.71\cdots$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{4.9}$$

4.2.5　三角関数*

半径1の円上の点で x-軸から反時計回りに角度をはかり、角度 x の点の座標を $(\cos x, \sin x)$ で表す。また $\tan x = \sin x / \cos x$ で表す。角度は、今後弧度 (radian) を用いる。弧の長さで角度を表す表し方で、円周の長さは 2π だから次のようになる。

$$0 = 0^\circ,\ \frac{\pi}{6} = 30^\circ,\ \frac{\pi}{4} = 45^\circ,\ \frac{\pi}{3} = 60^\circ,\ \frac{\pi}{2} = 90^\circ,\ \pi = 180^\circ,\ 2\pi = 360^\circ$$

定義から簡単に次のことが分かる。

(1) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$

(2) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

(3) $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$。慣習として $(\sin x)^n$ を $\sin^n x$、$(\cos x)^n$ を $\cos^n x$ と書くことが多い。

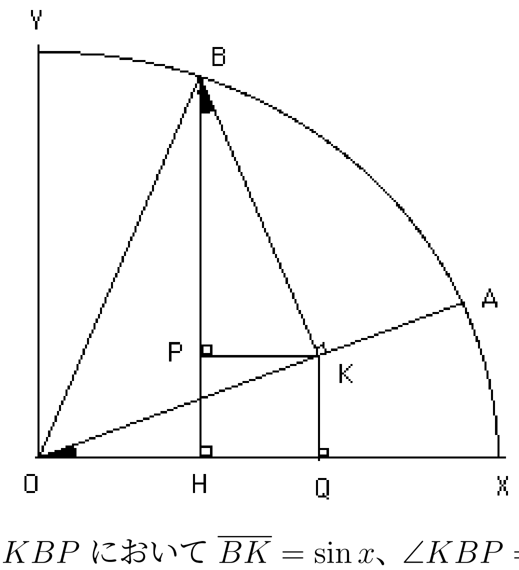
次の公式は三角関数の加法公式と呼ばれる。

(4) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$、$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$。

(5) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$、$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$。

三角関数の加法公式の証明:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad (4.10)$$



O を中心とした半径1の円弧を考え、x-軸と交わる点を X とし、A, B を $\angle AOB = x$、$\angle AOX = y$、$\angle BOX = x + y$ となるようにとる。B から OX に下ろした垂線が OX と交わる点を H、B から OA に下ろした垂線が OA と交わる点を K、K から OX に下ろした垂線が OX と交わる点を Q、K から BH に下ろした垂線が BH と交わる点を P とする。まず $\angle KBP = \angle KOQ = y$ であることを示す。$OX // PK$ で $\angle KOQ$ と $\angle OKP$ は錯角だから等しい。$\angle KBP + \angle BKP = \pi/2\ (= 90^\circ)$、$\angle OKP + \angle BKP = \pi/2 (= 90^\circ)$ だから $\angle KBP = \angle OKP = \angle KOQ = y$ となる。

$\triangle BOH$ を考えると $\overline{BH} = \sin(x+y)$。一方 $\triangle KBP$ において $\overline{BK} = \sin x$、$\angle KBP = y$ だから $\overline{BP} = \sin x \cos y$ である。今度は、$\triangle KOQ$ において $\overline{OK} = \cos x$ だから $\overline{KQ} = \cos x \sin y$。$\overline{PH} = \overline{KQ}$ だから次の式が得られる。

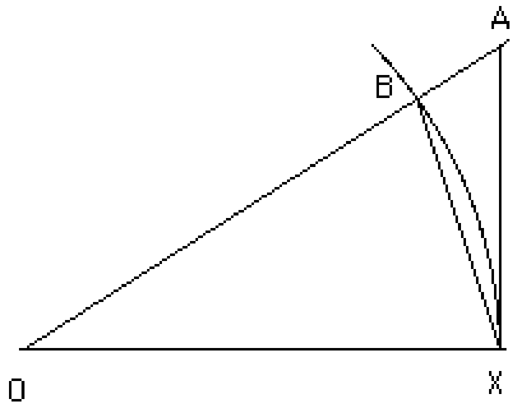
$$\sin(x + y) = \overline{BH} = \overline{BP} + \overline{PH} = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

従って、最初の式が得られた。後の式も $\overline{OH} = \overline{OQ} - \overline{PK}$ を表すことにより得られる。$x + y$ が $\pi/2$ より大きいときについても同様の議論ができる。 ■

極限:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \text{ ただし } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{4.11}$$

O を中心とした半径 1 の円弧を考え、x-軸と交わる点を X とし、B を $\angle BOX = x$ となるように円弧上にとる。また X を通る OX の垂線と OB の交わる点を A とする。ここで $\triangle BOX$、扇形 OBX、$\triangle AOX$ の面積の 2 倍を求めると次の式を得る。



$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

これより求める式を得る。

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{4.12}$$

例 4.2.10　1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3} \lim_{5x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{5}{3}.$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = \frac{2}{3}.$

4. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$

4.3　微分係数と導関数

次の二つの関数を考える。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x + 1 \\ g(x) &= x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

微分を利用する最初は、関数がどんな動きをしているかを調べることである。例えば具体的には次のような問題を考える。

A.　$f(x) = 0$ はいくつ解を持つでしょうか。$f(x)$ と $g(x)$ は何回交わるでしょうか。

B.　$x = 1$ の辺では $f(x)$ は増えているのでしょうか、減っているのでしょうか。

C.　$x \geq 0$ で $f(x)$ が一番小さくなるのはいつでしょうか。

まず $y = f(x)$、$y = g(x)$ が大体どのようなグラフかを書いてみるために、それぞれの x にたいする値を書いてみましょう。

	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$x^3 - x + 1$	$\cdots$	-5	1	1	1	7	25	$\cdots$
$x^2 - 2x - 1$	$\cdots$	7	2	-1	-2	-1	2	$\cdots$
$x^3 - x^2 + x + 2$	$\cdots$	-12	-1	2	3	8	$\cdots$	

これから大体予想できる。

a. $f(x) = 0$ は $-2 < x < -1$ に解を一個もつ。$0 < x < 1$ の間に解があるかも知れないがどうもあとはなさそうだ。
$h(x) = f(x) - g(x)$ を考えると、交わるのは $h(x) = 0$ の時だから $-1 < x < 0$ で交わる。あとは、交わらないようだ。

b. $f(x)$ が $x = 1$ の辺で増加しているか減少しているかを見るためには、h を小さな数として $f(1+h) - f(1)$ を考えてみるのが良いのではないでしょうか。

$$(f(1+h) - f(1) > 0 \text{ if } h > 0) \wedge (f(1+h) - f(1) < 0 \text{ if } h < 0) \Leftrightarrow \text{増加}$$

となっています。ここで、$\Delta f = f(1+h) - f(1)$ (Δ は Difference からとっています。前にも他のものを Δf で表しましたから注意して下さい）とおいて計算してみると、

$$\Delta f = f(1+h) - f(1) = (1+h)^3 - (1+h) + 1 - (1^3 - 1 + 1) = h((1+h)^2 + (1+h))$$

となり、$h > 0$ なら $\Delta f > 0$、$h < 0$ なら $\Delta f < 0$ ですから上のことから $f(x)$ は $x = 1$ で増加していることがわかります。ただこの Δf は h がゼロに近づくとやはりゼロになってしまいます（これは、$f(x)$ が連続という性質でした)。そこで、Δf ではなくこれを h で割ったものを考えると、一般に $x = a$ の近くで（すなわち小さい h に対して）

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0 \Leftrightarrow \ f(x) \text{ は } x = a \text{ の近くで増加}$$

となっています。では、h を 0 に近づける、すなわち極限をとって、それが正か負かで増加しているか、減少しているかが分かりそうです。

ほかの見方をすると、これは、$x = a$ における接線の傾きを考えていることになっています。

c. 一番ちいさくなっていたり、大きくなっていたりするところでは、減少から増加に変わったり、増加から減少にかわったりしていますから、$(f(a+h) - f(a))/h$ が h が 0 に近づいて来て負から正になるときに、負から正に変わったり、正から負に変わったりすることがわかります。ですから、この極限値が存在すれば、そこでは 0

になっているはずです。他の言い方では、接線が x-軸に平行になる点を求めれば、そのへんで一番ちいさくなっていたり、大きくなっていたりするところが分かりそうです。

A. グラフの概形を描きたい。

B. 関数の変化率を調べたい。

C. 山のテッペン、谷の底を知りたい。

D. もっと難しい複雑な関数も扱いたい。

E. x だけじゃなくて、y も含んでいるような関数、例えば、$f(x,y)=4xy-2y^2-x^4$ なんかについては、分からないの。

F. 微分てほかにどんなことに使えるの。

定義 4.3.1 関数 $f(x)$ が、点 $x=a$ 及びその近くで定義されていて、かつ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ \left(=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

が存在するとき、この値を $f(x)$ の点 a における微分係数と言い、$f'(a)$ と書く。関数 $f(x)$ が、各点 a で微分可能であるとき、a に $f'(a)$ を対応させる関数を $f(x)$ の導関数と言い、$f'(x)$、df/dx、Df で表す。関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求めることを、微分するという。

命題 4.3.1 (1) $h\neq 0$ が小さいとき常に $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$ であることと、$f(x)$ が $x=a$ で増加していることは同値。

(2) $h\neq 0$ が小さいとき常に $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}<0$ であることと、$f(x)$ が $x=a$ で減少していることは同値。

(3) $f'(a)>0$ ならば $f(x)$ は $x=a$ で増加。

(4) $f'(a)<0$ ならば $f(x)$ は $x=a$ で減少。

Note. (3), (4) の逆は成り立ちません。その例はあとで学びます。

最初の例では、

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}((1+h)^2+(1+h))=2>0.$$

ですから、$x=1$ で $f(x)$ は増加しています。

命題 4.3.2 関数 $f(x)$ が、点 a で微分可能ならば、点 a で、連続である。

証明. 関数 $\alpha(x)$ を次のように定義する。

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & x \neq a \\ f'(a) & x = a \end{cases}$$

すると、$\alpha(x)$ は、定義から、点 a で連続。従って、

$$f(x) = \alpha(x)(x-a) + f(a)$$

も、点 a で連続。 ■

Note. 上の命題において、逆は必ずしも成り立たない。すなわち、連続でも、微分可能とは言えない。例えば、$f(x) = |x|$。

$\lim_{x \to a} \alpha(x) = f'(a)$ だから a の近くでは $f(x)$ は $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ となっていることがわかります。この関数は、$g(a) = f(a)$ で傾きが $f'(a)$ の直線をあらわしています。これを $f(x)$ の $x = a$ における接線といいます。

命題 4.3.3 $f(x), g(x)$ を微分可能な関数、c を定数とすると以下が成り立つ。

(1) $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x),\ (cf(x))' = cf'(x)$

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

証明. まず、$f(x), g(x)$ が微分可能ということから、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),\ \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

が成り立っています。

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h)-f(x)) + (g(x+h)-g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

したがって (1) が得られます。(2) も同様に、

$$\begin{aligned}(cf(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\\ &= c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= cf'(x).\end{aligned}$$

(3) は少し複雑ですが、途中に式をはさむと、

$$\begin{aligned}&(f(x)g(x))' &(4.13)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} &(4.14)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h))+(f(x)g(x+h)-f(x)g(x))}{h} &(4.15)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &(4.16)\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x). &(4.17)\end{aligned}$$

(4.14) は定義です。(4.14) から、(4.15) は、分子の間に $-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)=0$ をはさんだだけですから、等しいですね。(4.15) から、(4.16) は式の変形です。ただ、左の項は、$g(x+h)$ をかっこでくくってから、二つの極限の積に書き替えました。(4.16) から (4.17) は、最初の項の、一つめが、$f'(x)$ になることと、一番最後が $g'(x)$ になることは、定義ですから大丈夫でしょう。するとあとは、$\lim_{h\to 0}g(x+h)$ の部分ですが、それは、$g'(x)$ が存在する、すなわち、$g(x)$ が微分可能であるためには、一番最後の、$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ が存在しないといけません。分母は 0 に近づくので、分子も 0 に近づく。すなわち、$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$ でないといけませんから、それを用いると、最後の式が導けます。最後のステップでは $g(x)$ が微分可能であることから、$g(x)$ は連続であり（命題 4.3.2)、したがって $\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$ が成り立つと表現することもできます。普通は、$(f(x)g(x))'=f'(x)g'(x)$ となりそうですが、こうならない理由を上の証明から考えて下さい。たとえば、

$$(x^2)'=(x\cdot x)'=(x)'x+x(x)'=x+x=2x$$

であって、$1=(x)'\cdot(x)'$ ではありません。(3) は二段階に分けて考えましょう。まずは、$f(x)=1$ の場合。

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{hg(x+h)g(x)}(g(x)-g(x+h))\\ &= \frac{1}{g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}\lim_{h\to 0}\left(-\frac{g(x+h)+g(x)}{h}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(g(x))^2}(-g'(x)) \\
&= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}
$$

ここで $f(x)/g(x) = f(x) \cdot (1/g(x))$ であることから、上に示したことと (2) を用いると、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}
$$

となり結果が得られます。 ■

例 4.3.1 1. （多項式の微分）$f(x) = x^n$ の、$x = a$ における、微分係数と導関数。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \\
&= na^{n-1}
\end{aligned}
$$

従って、$f(x) = x^n$ の導関数は、$f'(x) = nx^{n-1}$。

2. （三角関数の微分）$f(x) = \sin x$ の、$x = a$ における、微分係数と導関数。

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$x = a + h$ と置くと、

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h/2)\sin(h/2)}{h/2} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos(a+h/2) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} \\
&= \cos a
\end{aligned}
$$

従って、$f(x) = \sin x$ の導関数は、$f'(x) = \cos x$。ここで、以下の公式を用いている。

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

これは、単位円の扇形と、それを挟む、三角形の面積を用いた次の不等式から得られる。

$$\frac{1}{2}\sin\theta \le \pi \cdot \frac{\theta}{2\pi} \le \frac{1}{2}\tan\theta, \quad 1 \le \frac{\theta}{\sin\theta} \le \frac{1}{\cos\theta}$$

3. （指数関数の微分）$(e^x)' = e^x$。ここで、

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

とする。$e = 2.718281828459045235\ldots$ は、無理数のなかでも、特に、超越数と呼ばれ、どんな有理数係数の多項式の根にもなっていないことが知られている。

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h} = e^a\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

従って、$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ を示せばよい。

$e^h = 1 + 1/t$ とおく。$h = \log(1+1/t)$ だから、

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{1/t}{\log(1+1/t)} = \frac{1}{\log(1+1/t)^t}$$

従って、結局、$h \to 0$ のとき、$e^h \to 0$ のとき、従って、$t \to \infty$ で、$(1+1/t)^t \to e$ を言えばよい。実は、これは上の、自然対数 e の定義から得られる。

微分法復習

例 4.3.2 微分（導関数を求めること）。

1. $y = 4x^3 + 5x^2 - 3x$, $y' = 4\cdot(x^3)' + 5\cdot(x^2)' - 3\cdot(x)' = 12x^2 + 10x - 3.$
2. $y = x^2 - 3x + 1$, $y' = 2x - 3.$
3. $y = 3x^3 - 2$, $y' = 9x^2.$
4. $y = 2x^3 - 5x^2 - 3$, $y' = 6x^2 - 10x.$
5. $y = (3x+1)(x^2+x+2)$, $y' = 3(x^2+x+2) + (3x+1)(2x+1) = 9x^2 + 8x + 7.$
6. $y = (x+1)(3x-1)$, $y' = (3x-1) + 3(x+1) = 6x + 2.$
7. $y = (2x+1)(x^2-x-3)$, $y' = 2(x^2-x-3) + (2x+1)(2x-1) = 6x^2 - 2x - 7.$
8. $y = (x^2-x+1)(x^2-2x+3)$, $y' = (2x-1)(x^2-2x+3) + (x^2-x+1)(2x-2) = 4x^3 - 9x^2 + 12x - 5.$
9. $y = (x^2+1)(x^3-x^2)$, $y' = 2x(x^3-x^2) + (x^2+1)(3x^2-2x) = 7x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x.$
10. $y = \dfrac{1}{x^3}$, $y' = \dfrac{-3}{x^4}.$
11. $y = \dfrac{7x-6}{x^2+1}$, $y' = \dfrac{-7x^2+12x+7}{(x^2+1)^2}.$

12. $y = \dfrac{1}{x+3}, y' = \dfrac{-1}{(x+3)^2}$.

13. $y = x^2e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x},\ y' = (2x - x^2)e^{-x}$

練習問題 4.3.1 以下の関数を微分せよ。

1. $y = x^2 - 2x - 1$
2. $y = x^3 - x^2 + 2x + 1$
3. $y = -7x^5 + x^3 + 2x - 6$
4. $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$
5. $y = \dfrac{3x - 5}{x^2 + x + 2}$
6. $y = (2x + 3)^2$
7. $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$.
8. $y = \dfrac{x - 2}{2x - 1}$.
9. $y = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 2}$.
10. $y = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

4.3.1 合成関数の微分

命題 4.3.4 $g(x)$ は、点 a で微分可能、$f(x)$ は、点 $g(a)$ で微分可能とする。このとき、

$$\frac{d}{dx}f(g(a)) = f'(g(a))g'(a)$$

証明. $F(x) = f(g(x))$ とおく。すると、

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(g(a))g'(a) \end{aligned}$$

$g(x)$ は、点 $x = a$ で微分可能だから、連続、すなわち、x が、a に近づくとき、$g(x)$ は、$g(a)$ に近づく。 ■

この公式が使えるようになるととても便利です。英語では Chain Rule と言います。

例 4.3.3　1. $y = (3x+1)^4$。これは、展開して、$y = 81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1$ として、微分すると、$y' = 324x^3 + 324x^2 + 108x + 12$ となります。しかし、ここで、$f(x) = x^4$, $g(x) = 3x + 1$ とすると、$f(g(x)) = (3x+1)^4$ となりますから、上の公式を用いることができる状況にあります。$f(g(x))$ のいみは、$f(x) = x^4$ の x を $g(x) = 3x + 1$ で置き換えたと言う意味です。$f'(x) = 4x^3$, $g(x) = 3$ ですから、$y = f(g(x))$ のとき $y' = f'(g(x))g'(x) = 4(3x+1)^3 \cdot 3 = 12(3x+1)^3$ となります。すなわち、$3x+1$ をひとかたまりたとえば X とおいて（この場合は X^4 と考え）、X の関数だと思って全体を微分し、その結果（この場合は $4X^3 = 4(3x+1)^3$）に X の部分（この場合は、$3x+1$）を x で微分したもの（この場合は 3）をかけておくという形になっています。

2. $y = (1-2x^2)^3$。この場合は $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 - 2x^2$ とおくと、$f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = -4x$ ですから $y' = 3(1-2x^2)^2(-4x) = -12x(1-2x^2)^2$ となります。

3. $y = e^{-x^2}$ では、$f(x) = e^x$, $g(x) = -x^2$ と見ることができます。ですから、$y' = -2xe^{-x^2}$ となります。

4. $y = (2x+3)^5$, $y' = 5(2x+3)^4 \cdot 2 = 10(2x+3)^4$.

5. $y = (3x-2)^7$, $y' = 21(3x-2)^6$.

6. $y = \left(x - \dfrac{2}{x}\right)^6$, $y' = 6\left(x - \dfrac{2}{x}\right)^5\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)$

4.3.2　x^n の微分

$y = x^n$ の微分について考えましょう。

n が正の整数または 0 のとき:　$y = x^n$ とおくと、$y' = nx^{n-1}$ でした。$1 = x^0$ の微分は 0 です。

n が負の整数のとき:　$n = -m$ とおくと m は自然数になります。$y = x^n = x^{-m} = 1/x^m$ ですから、商の微分をつかうと、

$$y' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m}{x^{m+1}} = nx^{n-1},\ (x^n)' = nx^{n-1}.$$

すなわち、n が負のばあいもおなじ式が成り立つことがわかります。

n が分数のとき: $n = p/q$ ただし p は整数（負の整数の可能性も含む）q は 1 以上の整数とします。$y = g(x) = x^n = x^{p/q}$ から $g(x)^q = x^p$ となります。$f(x) = x^q$ とすると、$f(g(x)) = x^p$ となりますから、この微分を考えると、

$$px^{p-1} = f'(g(x))g'(x) = q(x^{p/q})^{q-1}g'(x) = qx^{\frac{p(q-1)}{q}}g'(x)$$

となります。ここで n が整数のときは、$(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つことを使っています。$g'(x)$ は分かりませんが、実にそれが求めたいものでした。そこで、

$$(x^n)' = g'(x) = \frac{px^{p-1}}{qx^{\frac{p(q-1)}{q}}} = \frac{p}{q}x^{p-1-\frac{p(q-1)}{q}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1}.$$

これは、$(x^n)' = nx^{n-1}$ が n が有理数（分数で表される数）の時も成り立つことを意味しています。

例 4.3.4

1. $y = \sqrt{x}$ とすると、$y = x^{1/2}$ のことですから、

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となります。

2. $y = \sqrt{x^2+1}$ は、$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2+1$。$y = f(g(x))$ ですから、上の場合と、合成関数の微分を用いて、

$$y' = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. $y = 1/(x+3)^2$ のときは、

$$y' = ((x+3)^{-2})' = (-2)(x+3)^{-3} = \frac{-2}{(x+3)^3}$$

となります。

4.3.3 対数関数の微分

$(x^n)' = nx^{n-1}$ は n がいろいろな場合に成り立つことが分かりました。ここで 逆に微分して x^n になる関数について考えてみましょう。たとえば、

$$y = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \longrightarrow y' = x^n$$

となっていることが分かります。しかし、うまくいかないところが一箇所あります。それが、$n+1=0$ すなわち、$n=-1$ のところです。すなわち、微分して $x^{-1} = 1/x$ になる関数は x^n の n をいくらいろいろな数にしてみても、係数をつけてみても、見つからな

いということです。しかし、すでに知っている関数で微分するとこの関数になるものがあります。実は、

$$y = \log_e x \longrightarrow y' = \frac{1}{x}$$

となっています。このことを見てみましょう。

log の定義から、

$$x = e^y \longleftrightarrow y = \log_e x$$

でした。ここで $f(x) = \log_e x$ とおくと、$x = e^{f(x)}$ です。この両辺を合成関数の微分をつかって微分すると、

$$1 = (x)' = (e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x) = x f'(x)$$

ですから、

$$f'(x) = (\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

が得られました。

この $\log_e x$ という関数はとても便利なので、数学では e を省いて、$\log x$ と書きます。ほかの自然科学では $\log_{10} x$ も良く使うので、$\log x = \log_{10} x$、$\ln x = \log_e x$ として用いることも良くあります。ここでは、$\log x = \log_e$ と約束しましょう。

例 4.3.5 $y = \log f(x)$ とすると、

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

4.3.4　x^n の微分再述

$y = x^n$ の微分についてもう一度考えましょう。

$x = e^{\log x}$ となっています。$y = \log x$ とおくと、$\log x = \log_e x$ ですから、$e^y = x$ という意味でした。したがって、最初の式が成り立っています。そこで、

$$f(x) = x^n = (e^{\log x})^n = e^{n \log x}$$

ですから、$h(x) = n \log x$、$g(X) = e^X$ をおくと、$f(x) = g(h(x))$ となっていますから、合成関数の微分を用いると、$h'(x) = n/x = nx^{-1}$ に注意すると、

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = e^{n \log x} \frac{n}{x} = \frac{n}{x} x^n = n \cdot x^{n-1}$$

となり、$(x^n)' = nx^{n-1}$ が得られました。上の計算では、最初に示した、$x^n = e^{n \log x}$ を用いています。

さて、公式ができましたが、これは、なにかいつでも成立しているようです。何か条件はいりますか。一般的には、$x > 0$ という条件が必要です。しかし、n はすべての実数について成立します。この公式を n が負の場合、分数の場合に証明しましたが、対数関数の微分と、合成関数の微分を用いると、このように一般の実数のの場合に同様の公式を得ることができます。

4.4　微分の応用：関数とグラフ

4.4.1　極限の計算

連続関数の商 $f(x)/g(x)$ の形になっているときの極限について復習しましょう。まず $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ すなわち、分母が 0 にならない時は、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}, \quad \text{if } \lim_{x\to a} f(x) = f(a),\ \lim_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0.$$

また、$\lim_{x\to a} g(x) = 0$ でかつ、$\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$ のときは、極限は存在しませんでした。この場合は、さらに無限大 $+\infty$ になるか負の無限大 $-\infty$ になるか、またはどちらにも決まらないかを調べることもありますが、ともかく、この場合は、発散 (diverge) といって、極限が一定の数になりません。

問題なのは、分母も分子も 0 になってしまう場合でした。この場合は、すぐには、極限が決定できません。

さて、前に例で取り上げたものにつぎのようなものがありました。

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-1)}{x-4} = \lim_{x\to 4} x-1 = 4-1 = 3.$$

この問題では、x に 4 を代入すると、分母も分子も 0 になっていました。そこで何らかの手を講じないといけなかったわけです。この場合は、因数分解をすることができ、x は $x \neq 4$ を維持しながら 4 に近づいていくことから、$x-4$ をキャンセルして、求める結果を得ました。

さて、$f(x) = x^2-5x+4$ とすると、$f(4) = 0$ です。そこで、$f'(4)$ の定義を書いてみましょう。

$$f'(4) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x-4}$$

となっています。上で $f(4) = 0$ を使いました。この最後の式は、最初に考えた極限ですから、結局この極限は $f'(4)$ だということになります。微分は簡単に計算できることも多くこの場合も、

$$f'(x) = (x^2-5x+4)' = 2x-5 \quad \text{これより } f'(4) = 3.$$

たしかに答えも同じになりました。

これは偶然でしょうか。連続関数の商の極限で 0/0 すなわち、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{かつ } f(a) = g(a) = 0$$

の場合を考えましょう。$f(x)$ も $g(x)$ も $x = a$ で微分係数をもつ、すなわち微分可能だとすると、分母・分子を $x-a$ で割り $f(a) = g(a) = 0$ に注意すると、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

となり、この場合も分子・分母をともに微分し $x = a$ での値を求めたものになっています。ですから $g'(a) \neq 0$ ならばこのようにして、極限を求めることができます。さらに、$f(x)$ も $g(x)$ も $x = a$ で何回も微分することが可能だとすると（例えば多項式などはそうですが）導関数も連続ですから、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

すなわち、分子・分母を微分しそれについて、考えれば良いことがわかります。そう考えると、最初の問題も、$f(x) = x^2 - 5x + 4$ などとおかなくても、

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{(x - 4)'} = \lim_{x \to 4} \frac{2x - 5}{1} = 3.$$

とすることができることがわかります。

因数分解を考えないですむメリットがあります。しかし、0/0 の形であることを確かめることは必要です。

（証明を、少し工夫すると、$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$、$\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ の場合も、同様のことが言えます。）

例 4.4.1

1. まず分子・分母がともに 0 に近づくことを確認して下さい。

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^3 - 8)'}{(x^2 - x - 2)'} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2}{2x - 1} = \frac{12}{3} = 4.$$

2. これも分子・分母がともに 0 に近づく場合ですが、微分をとっても分子・分母がともに 0 に近づくのでもう一度微分をとります。

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{6x - 4} = \frac{6}{2} = 3.$$

3. 次の例は分子が 0 に近づかないので、極限が存在しないのですが、微分をとると違うものになってしまう例です。

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \neq \lim_{x \to 1} \frac{2x - 1}{1} = 1$$

4. 次の例は分母が 0 に近づかないので、普通に極限がわかるのですが、微分をとると違うものになってしまう例です。

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{-2}{2} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 1}{1}.$$

5. $e^0 = 1$、$(e^x)' = e^x$ でした。つぎの例は、0/0 型ですから分母・分子を微分して求めることができます。

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} = \frac{e^x}{1} = 1.$$

ただこの極限は、e^x の微分を求める時に使ったものでした。ここで微分を使うのは、問題ですが、実際にいろいろな場面で、この微分を使う極限の計算はとても便利です。

6. 三角関数などを含む難しいものに適用すると非常に効果的です。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

このばあいは、一回の微分では、決定できず、また 0/0 となっているので、もう一度微分、さらにもう一度と何回も微分して、分母が 0 ではなくなってから求めています。もう一回微分するとおかしなことになります。あくまでも 0/0 の場合に適応できるものでした。

4.4.2 極大・極小

定義 4.4.1 点 x が、点 a に十分近いときは、常に、$f(a) > f(x)$ が成り立つとき、$f(x)$ は、$x = a$ で、極大になるといい、$f(a)$ をその極大値、点 a を、極大点という。同様にして、点 x が、点 a に十分近いときは、常に、$f(a) < f(x)$ が成り立つとき、$f(x)$ は、$x = a$ で、極小になるといい、$f(a)$ をその極小値、点 a を、極小点という。極大値と極小値を合わせて極値という。

極大・極小は最大・最小とは違います。局地的に見るとその当たりでは一番山のてっぺん、または谷底と言う意味です。

命題 4.4.1 $f(x)$ が連続、かつ微分可能とする。このとき次が成立する。

(1) $x = c$ で極値（極大または極小値）を持てば、$f'(c) = 0$。

(2) $f'(c) > 0$ ならば、$f(x)$ は $x = c$ で増加。

(3) $f'(c) < 0$ ならば、$f(x)$ は $x = c$ 減少。

(4) 常に $f'(x) = 0$ ならば、$f(x)$ は定数関数。

証明. 次のことを思い出しましょう。

$$h(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\begin{cases} >0; & x<c \text{ かつ } f(x)<f(c) \text{ の時：} \text{ 増加} \\ >0; & c<x \text{ かつ } f(c)<f(x) \text{ の時：} \text{ 増加} \\ <0; & x<c \text{ かつ } f(x)>f(c) \text{ の時：} \text{ 減少} \\ <0; & c<x \text{ かつ } f(c)>f(x) \text{ の時：} \text{ 減少} \end{cases}.$$

(1) $f(c) > f(x)$ すなわち、c で極大のときは、x が左から c に近づき c を通り過ぎるとすると、増加から減少に変わるわけですから、上の四つのケースのうち、1 番目と 4 番目が起こりますから、$h(x)$ は $x < c$ のとき正、$c < x$ の時負。したがって、$\lim_{x\to c} h(x)$ は存在するとすると、0 以外にはなり得ません。この極限が $f'(c)$ でしたから $f'(c) = 0$ となります。$f(c) < f(x)$ すなわち、c で極小のときも同様です。考えてみて下さい。この場合は、2 番目と 3 番目が起こります。

(2) この場合は、x が c に近いところでは、$h(x) > 0$ となっているわけですから、1 番目と 2 番目が起こっています。すなわち増加していることがわかります。

(3) 上と同様にしてわかります。

(4) 増加も減少もしていないことがわかりますので、一定になっています。そのような関数を定数関数といいます。 ■

$f'(x)$ の増加、減少は、$f'(x)$ の導関数 $f''(x)$（$f'(x)$ をもう一度微分した、$(f'(x))'$ をこのように書く) によって分かることを考えれば、次のことが分かります。

命題 4.4.2 $f(x)$ は 2 回微分可能な関数とする。このとき次が成立する。

(1) $f'(c) = 0$、$f''(c) < 0$ ならば、関数 $f(x)$ は、c で極大値 $f(c)$ を持つ。

(2) $f'(c) = 0$、$f''(c) > 0$ ならば、関数 $f(x)$ は、c で極小値 $f(c)$ を持つ。

証明. (1) $f'(c) = 0$ かつ $f''(c) < 0$ とする。$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数ですから、$f''(c) < 0$ ということは、$f'(x)$ は $x = c$ において減少していることがわかります。減少して $f'(c) = 0$ ということは、$x = c$ を境にして、$x < c$ では $f'(x) > 0$、$x > c$ では $f'(x) < 0$ となっています。つまり、$x < c$ で x が c に近づいてくるとき（すなわち c に左から近づいてくるとき）は $f(x)$ は増加しており、$x = c$ をすぎて $x = c$ から遠ざかっていくときは減少していることを意味しています。これは、$x = c$ で $f(x)$ は極大値をとることを意味します。

(2) 同様です。証明を考えてみてください。 ■

例 4.4.2 関数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$ がどこで極大・極小になるかを考えましょう。命題 4.4.1 (1) によって、極大または極小になる点では、導関数の値が 0 になるわけですから、まず $f'(x)$ を求めます。さらに、$f'(x) = 0$ となる点で、極大になるのか、極小になるのか、どちらでもないかを判断するため、$f''(x)$ を計算しておきます。

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x+2)(x-2),\ f''(x) = 12x^2 - 16.$$

この計算から $f'(x) = 0$ となるのは $x = -2, 0, 2$ です。それぞれの x での $f''(x)$ の値は、$f''(-2) = 32 > 0,\ f''(0) = -16 < 0,\ f''(2) = 32 > 0$ となりますから、命題 4.4.2 より $x = -2$ で極小値 $f(-2) = -6$、$x = 0$ で極大値 $f(0) = 10$、$x = 2$ で極小値 $f(2) = -6$ をとることがわかります。表に書くと次のようになります。

x		-2			0			2	
$f(x)$	↘	極小	↗	↗	極大	↘	↘	極小	↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
		↗			↘			↗	
$f''(x)$		$+$			$-$			$+$	

$f'(c) = 0$ で $f''(c) = 0$ ならばどうでしょうか。この場合は、この方法では判定できませんがさらに、$f'''(c)$ を調べて、これが正の場合には同様の考え方で $f(x)$ は $x = c$ で増加していることがわかります。負の場合には減少しています。したがって、極値をもちません。すなわち、極大にも、極小にもなっていません。$f(x)$ が何回でも微分可能な時は、そこでの値が 0 にならないところまで微分をしそこから出発すると、$x = c$ で増加しているか、減少しているか、極大か、極小か判断することができます。

例 4.4.3 関数 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$ がどこで極大・極小になるかを考えましょう。まず $f'(x)$ を求めます。さらに、$f'(x) = 0$ となる点で、極大になるのか、極小になるのか、どちらでもないかを判断するため、$f''(x)$ を計算しておきます。

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2 = 2(x-1)^2(2x+1),\ f''(x) = 12x^2 - 12x.$$

$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、すなわちこれを微分したものです。因数分解したものを積の微分をつかって微分することもできますが、ただ導関数が必要な時は、展開してあるもとの式を微分したほうが簡単です。この計算から $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1/2, 1$ です。それぞれの x での $f''(x)$ の値は、$f''(-1/2) = 9 > 0$, $f''(1) = 0$ となりますから、$x = -1/2$ で極小値をとることがわかりますが、$f''(1) = 0$ ですから $x = 1$ では、極大か極小か増加しているのか減少しているのかこれではわかりません。そこでもう一度微分してみると $f'''(x) = 24x - 12$ ですから $f'''(1) = 12 > 0$ です。$f'''(x)$ は $f''(x)$ を微分したものでした。導関数の値が正なのですから、$f''(x)$ は $x = 1$ で増加しておりかつ $f''(1) = 0$ ですから、x に近いところでは、$x < 1$ では $f''(x) < 0$ 、$x > 1$ では $f''(x) > 0$ であることがわかります。すなわち、$f'(x)$ は $x < 1$ では減少、$x > 1$ では増加です。$f'(1) = 0$ ですから、$x < 1$ では $f'(x) > 0$ かつ $x > 1$ では $f'(x) > 0$ すなわち、$f(x)$ は c の近くではいつでも増加していることがわかります。したがって極大でも極小でもありません。表に書くと次のようになります。

x		$-1/2$			1	
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\nearrow$	増加	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$f''(x)$		$+$		$-$	0	$+$
					$\nearrow$	
$f'''(x)$					$+$	

定義 4.4.2 関数 $f(x)$ が、点 c において、接線を持ち、c のごく近くで、$f(x)$ のグラフが、接線の上にあれば、$f(x)$ は、点 c において、下に凸、接線の下にあれば、上に凸という。$f(x)$ のグラフが、接線の上から下、又は、下から上に移るとき、この点を、変曲点という。

命題 4.4.3 $f(x)$ が、開区間 (a, b) において、２階導関数 $f''(x)$ を持てば、次が成立。

(1) $f''(x) > 0$ ならば、$f(x)$ は、開区間 (a, b) で、下に凸。

(2) $f''(x) < 0$ ならば、$f(x)$ は、開区間 (a, b) で、上に凸。

(3) $f''(c) = 0$ かつ、$f''(x)$ の符号（正であるか、負であるか）が点 c で変われば、$x = c$ は、変曲点。

4.4.3　L'Hospital の定理

不定形の極限を求めるのに、次の定理は有効です。

命題 4.4.4 $f(x), g(x)$ がともに微分可能で、$g'(x) \neq 0$ ならば、次が成立する。

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

もう少し正確には、命題の右辺の極限が存在すれば、左辺の極限も存在して等しい、ということです。

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \ \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

の場合には、次のようになります。

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

証明には、平均値の定理が必要ですが、特別な場合だけ証明してみましょう。

$$\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a), \ \lim_{x \to a} g'(x) = g'(a) \neq 0$$

の場合です。この時は、命題の右辺は、$f'(a)/g'(a)$ となりますから、次の式を示せば良いことになります。

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

左辺は、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ですから、右辺と同じになります。

例 4.4.4　1. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2}{2x - 3} = 12.$

2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$

どちらの場合も、0/0 の不定形であることを確認して下さい。そうでないと、命題が使えません。たとえば、後の問題の最後から 2 番目の式の分母・分子微分すると、$e^x/0$ となってしまい、極限が素材しないことになってしまいます。

最初の問題は、組み立て除法を用いて、因数分解しても計算できますが、あとのほうは、公式を知っているか、または、このような方法を用いないと、求められません。因数分解は、多項式についてのものです。

4.5 不定積分と定積分

4.5.1 原始関数と不定積分

定義 4.5.1 関数 $F(x)$ の導関数が、$f(x)$ に等しいとき、すなわち、$F'(x) = f(x)$ が成り立つとき、$F(x)$ を、$f(x)$ の原始関数と言う。

$F(x)$、$G(x)$ を共に、$f(x)$ の原始関数とする。すると、$F'(x) = G'(x) = f(x)$ であるから、$(F(x) - G(x))' = 0$ となる。導関数が、常に、0 となる関数は、命題 4.4.1 (4) によって、定数となる。従って、$G(x) = F(x) + C$ なる定数 C が存在する。逆に、$G(x) = F(x) + C$ と表せる関数は、$f(x)$ の原始関数である。このことをふまえ、原始関数の代表という意味で、$f(x)$ の不定積分と呼び、次のように書く。

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ここで、C を積分定数と言う。（C を省略して書くことも良くある。）

例 4.5.1 $f'(x) = 2x + 1$、$f(0) = 2$ となる関数を考えるとする。$x^2 + x$ の導関数は $2x + 1$ だから $f(x) = x^2 + x + C$ と書けます。$f(0) = 2$ だから $C = 2$ となり、$f(x) = x^2 + x + 2$ を得、一つの関数が決まります。

例 4.5.2 $(x^n)' = nx^{n-1}$ がすべての数について成立しました。ただし、$n = 0$ のときは、$1' = 0$ です。これを用いるといろいろな関数の原始関数がもとまります。

1. $\displaystyle\int 3x^2 dx = x^3 + C$

2. $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C.$

3. $\displaystyle\int 8x^3 - 3x^2 + 2dx = 2x^4 - x^3 + 2x + C.$

例 4.5.3 一回微分して 0 になる関数は定数でした。二回微分して（微分したものをもう一度微分して 0 になる関数は定数関数の原始関数ですから一次関数であることがわかります。$D^m f(x)$ で $f(x)$ を m 回続けて微分したものを表すとすると、$D^m f(x) = 0$ ならば $f(x)$ は $m - 1$ 次の多項式であることがわかります。

$$D^m f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ は次数 } m - 1 \text{ の多項式}$$

$\Leftarrow$ は微分をすれば $(x^n)' = nx^{n-1}$ からわかります。逆の $\Rightarrow$ は $f'(x) = 0$ なら $f(x) = c$ ということと、$(x^n)' = nx^{n-1}$ からわかります。こちらは積分の考え方です。

前に似たものがありました。$\Delta^m f(x) = 0$ なら $f(x)$ は次数 $m - 1$ の多項式で表すことができるというものでした。似ていますね。数学では似た部分を見て、一方で成り立つことがここでも成り立たないか考えたり、さらにもう一段上に統一理論がないかを考えたりします。

例 4.5.4　1. $\int e^x dx = e^x + C$

2. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$, (if $\alpha \neq -1$)

3. $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$

4. ($\int \sin x dx = -\cos x + C$)

5. ($\int \cos x dx = \sin x + C$)

練習問題 4.5.1　1. $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x}$

2. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

3. $\int (x^2 - 2e^x)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2e^x + C$

4. $\int (6\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx = 4x^{3/2} - 2x^{1/2} + C = 4x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$

5. $(x^2e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2e^{-x}(-1) = (2-x)xe^{-x}$ だから、
$\int (2-x)xe^{-x}dx = x^2e^{-x} + C$

6. ($\int (4\sin x + \cos x)dx = -4\cos x + \sin x + C$)

4.5.2　不定積分の計算

置換積分　$F'(x) = f(x)$ であるとすると、$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = f(\phi(t))\phi'(t)$ であるから、$x = \phi(t)$ とおいたときは、

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

となる。

例 4.5.5　1. $\frac{d}{dt}\phi(t)^\alpha = \phi(t)^\alpha\phi'(t)$

$\int \phi'(t)(\phi(t))^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}(\phi(t))^{\alpha+1} + C$, (if $\alpha \neq -1$)

(a) $\int (5x+2)^{10}dx = \frac{1}{55}(5x+2)^{11} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = 2\sqrt{x-2} + C$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3+1)^5}dx = \frac{-1}{12(x^3+1)^4} + C$

2. $\displaystyle\frac{d}{dt}e^{\phi(t)} = e^{\phi(t)}\phi'(t)$
   $\displaystyle\int \phi'(t)e^{\phi(t)}dt = e^{\phi(t)} + C$

練習問題 4.5.2 以下の問題 1–4 においては、まず y の微分を考えよ。後の問題については、y として何を考えたら良いだろうか。

1. $y = (3x-2)^7$, $\displaystyle\int (3x-2)^6 dx$
2. $y = (x^3+2)^5$, $\displaystyle\int x^2(x^3+2)^4 dx$
3. $y = \left(x - \frac{2}{x}\right)^6$, $\displaystyle\int \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^5 dx$
4. $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$, $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^4}dx$
5. $\displaystyle\int (x^4+3x)^{30}(4x^3+3)dx$
6. $\displaystyle\int (x^3+6x)^5(6x^2+12)dx$
7. $\displaystyle\int (x^2+4)^{10}x dx$
8. $\displaystyle\int (\frac{x^2}{2}+3)^2 x^2 dx$

4.5.3 定積分と微積分学の基本定理

微分の逆演算としての原始関数、不定積分について学びました。これは、微分は関数 $f(x)$ が与えられた時、$f'(x)$ を計算するものでした。$f(x)$ の原始関数は微分したら $f(x)$ になるような関数のことでした。$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると、$F'(x) = f(x)$ でした。これは、微分方程式を解くというような時に用いることができ、物理学の発展とともに整備されてきたものでした。積分にはもう一つのルーツがあります。それは、曲線で囲まれた面積をもとめるということです。多角形までは、どうにかなりますが、曲線で囲まれた図形のばあいは、段々近付けていくという極限の考えがどうしても必要です。そこで次のようなものを考えます。

定義 4.5.2 関数 $f(x)$ が、区間 $[a,b]$ で連続であるとする。分割 $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ と実数 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ の集合 $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ に対して、

$$R_{\Delta,\{t_i\}}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

を、リーマン和又は、積和という。分割 Δ を限りなく細かくしていくとき、（すなわち、

$$|\Delta| = \max\{|x_i - x_{i-1}| \mid i = 1, 2, \ldots\}$$

が、0 に近づくようにとっていくとき）$R_{\Delta,\{t_i\}}(f)$ が、$\{t_i\}$ の取り方に関係なく一定の実数 I に近づく。この I を $[a,b]$ 上 $f(x)$ の定積分と言い、

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

と書く。このことを記号的に、次のようにも書く。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

例 4.5.6 たとえば $y = f(x) = x^2$ と x 軸と $x = 1$ で囲まれた部分の面積を考えましょう。これは、つぎのように表すことができます。

$$\int_0^1 x^2 dx$$

しかし、これを定義通り求めることができるでしょうか。

命題 4.5.1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は、区間 $[a,b]$ で連続であるとする。このとき、次が成り立つ。

(1) $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$。

(2) $\displaystyle\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$、（$k$ は、定数。）

(3) $a \le x \le b$ で、$f(x) \ge g(x)$ ならば、$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$。

命題 4.5.2 (積分の平均値の定理) 関数 $f(x)$ が、閉区間 $[a,b]$ 上で連続ならば、ある、$c \in (a,b)$ で、

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

を満たすものがある。

証明. 関数 $f(x)$ は、閉区間 $[a,b]$ で連続だから、最大、最小をとる。最大値を M 最小値を m とすると、リーマン和の定義から、

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

これより、m と、M の間のある値 A で、

$$m(b-a) \leq A = \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

となる。$f(x)$ は、連続だから、中間値の定理により、m と、M の間の値は全てとる。従って、$f(c) = A$ を満たす $a < c < b$ を満たす c が存在する。これは、命題の、条件を満たすものである。 ■

$a < b$ のとき、

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \ \int_a^a f(x)dx = 0$$

と定義する。こう定義すると、b を変数とみなして、関数

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

が定義できる。実は、こうすると、$x = a$ で、$F(x)$ が、連続であることが分かる。さらに、次が成り立つ。

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^x f(x)dx$$

定理 4.5.3 (微積分学の基本定理) 関数 $f(x)$ が、閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする。

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

とすると、$F(x)$ は、開区間 (a,b) で、微分可能であり、$F'(x) = f(x)$ が成立する。

証明. $a < c < b$ とする。

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)-F(c)}{x-c} &= \frac{\displaystyle\int_a^x f(x)dx - \int_a^c f(x)dx}{x-c} \\
&= \frac{\displaystyle\int_c^x f(x)}{x-c} \\
&= f(d(x))
\end{aligned}$$

を満たす、点、$d(x)$ が、x と c の間にある。従って、$f(x)$ が、連続なことを考えると、

$$F'(c) = \lim_{x\to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} f(d(x)) = f(c)$$

これより、$F'(x) = f(x)$ を得る。 ■

さて、一般に、$F(x)$ を 関数 $f(x)$ の原始関数。すなわち、$F'(x) = f(x)$ を満たすものとする。すると、微分積分学の基本定理より、$\int_a^x f(x)dx$ も $f(x)$ の一つの原始関数だから、ある、定数 C が、存在して、

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx + C$$

と書ける。$x = a$ とおくと、$F(a) = C$ を得るから、$x = b$ とおくと、

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx$$

特に、

$$\int_a^x f(x)dx = F(b) - F(a)$$

を得る。これを、

$$\int_a^x f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\mid_a^b$$

ともかく。

例 4.5.7

$$F(x) = \int_0^x t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x = \frac{1}{3}x^3.$$

たしかにこれを微分すると、微分積分学の基本定理により x^2 になります。また $x = 1$ とすると、上で考えた面積がわかります。

例 4.5.8 $f(x) = e^{x^2}$ の原始関数みなさんの知っている関数では書けないことが知られていますが、

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{t^2} dt$$

とおくと、$F(x)$ は計算できませんが、$F'(x) = f(x) = e^{x^2}$ となっています。$f(x)$ の部分がもっと難しい関数でも同じです。

練習問題 4.5.3 次の計算をせよ。

1. $\displaystyle\int_1^2 (3x^2 + 5)dx$
2. $\displaystyle\int_1^2 (2x^2 + x)dx$
3. $\displaystyle\int_1^3 (3x^{-2} + x^{-3})dx$

4. $\displaystyle\int_0^2 t(t^2-3)dt$

5. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx$

6. $\displaystyle\int_0^1 2e^x dx$

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{5}{2}e^{4x}dx$

8. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{5t^2+4}\,dt$

4.6 微分方程式

関数 $y = f(x)$ の導関数 $y' = f'(x)$（または、y'', y''' などの高階導関数）が含まれる方程式を微分方程式 (differential equation) と言う。その中でも基本的でかつ応用例も多い分離型 (separable differential equation) についてのべる。

$y = f(x)$ とするとき、y の導関数を dy/dx と書くことがある。微分方程式は、$y = f(x)$ を求めることが目的である。この表記を用いて、まず簡単な例から。

$$\frac{dy}{dx} = g(x).$$

これも、微分方程式の一つ。$G(x)$ を $g(x)$ の原始関数の一つとすると、上の方程式では、$y = f(x)$ も、$G(x)$ もどちらも $g(x)$ の原始関数なので、$y = f(x) = G(x) + C$ と書けるはずである。しかし、これだけでは、C が残っているので、$f(x)$ が決まらない。そこで、初期条件と言われる、条件を与える。たとえば、$f(0) = 0$。すると、$0 = f(0) = G(0) + C$ より $C = -G(0)$ となり、$y = f(x) = G(x) - G(0)$ を得る。

例 4.6.1 時刻 t の時のある（質量 m の）物体の高さを $y = h(t)$ で表すとする。その時刻 t における速度 $v(t)$ は、$v(t) = y' = h'(t)$ で与えられる。 速度 $v(t)$ の時刻 t における変化率を加速度といい $\alpha(t)$ で表す。すなわち、$\alpha(t) = v'(t) = y'' = h''(t)$。さて、ここで、ニュートンの運動方程式 $F = m \cdot \alpha$ が成り立つ。 F はその物体に働く力である。時間に関係した力なら、$F(t) = m \cdot \alpha(t)$ となる。簡単のために、この物体には重力だけが働いているとすると、重力加速度を $g = 9.8m/s^2$ とすると、力が下向きなので、$F = -m \cdot g$。すなわち、$\alpha(t) = -g$。さて、$v'(t) = \alpha(t) = -g$ だから $v(t) = -gt + C$ となる。この場合は、$t = 0$ とすると、$v(0) = C$。これは、時刻 0 の時の速度だから、初速度と言われる。そこで、 $C = v_0$ と置く。$v(t) = -gt + v_0$。さて、$v(t) = y' = h'(t)$ だったから、$h'(t) = -gt + v_0$ である。従って、$h(t) = -(g/2)t^2 + v_0 t + C$ となる。ここで $t = 0$ とすると、$h(0) = C$ となるので、C は、時刻 0 の時の物体の高さ h_0 である。

二つの微分方程式が出てきた。$v'(t) = -g$ と、$h'(t) = -gt + v_0$ である。それぞれの解は、$v(0) = v_0$, $h(0) = h_0$ とすると、$v(t) = -gt + v_0$, $h(t) = -(g/2)t^2 + v_0 t + h_0$。

高さ $10m$ の飛び込み台から初速度 0 で飛び降りたとき、t 秒後の高さは、$h(t) = -4.9t^2 + 10$。従って、大体 $\sqrt{2} \sim 1.4$ 秒後には、高さ $0.2m$ すなわち、20cm のところにいることになる。

命題 4.6.1 $H(x)$ を 関数 $h(x)$ の原始関数、$G(y)$ を 関数 $g(y)$ の原始関数とする。

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)} \quad \text{ならば} \quad G(y) = H(x) + C \text{ が成立する。}$$

証明. $y = f(x)$ とすると、$G(y) = G(f(x))$ である。これを x で微分すると、合成関数の微分から

$$(G(f(x)))' = G'(y)f'(x) = g(y)y' = h(x) = H'(x)$$

だから $G(y) = G(f(x)) = H(x) + C$ が成立する。 ■

この命題は、微分方程式を、形式的に $g(y)dy = h(x)dx$ と変形し、$\int g(y)dy = \int h(x)dx$ と積分した結果が等しいことを主張している。上記の形の微分方程式を分離型という。

例 4.6.2 y で、時刻 x における個体数（例えば 人口） (population) を表すとする。

$$(1)\ \frac{dy}{dx} = ky, \qquad (2)\ \frac{dy}{dx} = k(N-y), \qquad (3)\ \frac{dy}{dx} = \frac{k}{N}(N-y)y, \qquad k \text{ はいずれも定数}$$

通常何の制限もないと (1) の関係があるとされる。ここで k は出生率と死亡率の差である。実際には、ある空間を限定すると、そこで生きられる個体数には上限がある。これを、人口扶養力 (carrying capacity) などといい N で表す。この限界に近いと、上の関係式 (2) に従うとされている。一般には、これらをあわせた (3) が適切であるとされ、ロジスティック・モデルと呼ばれる。ここでいうロジスティック（logistic）は、もともとは、兵站（へいたん＝戦争の際の物資の補給）から来ている。いずれも、分離型である。

$$kx + C = \int kdx = \int \frac{N}{(N-y)y}dy = \int (\frac{1}{y} + \frac{1}{N-y})dy = \log y - \log(N-y) = \log(\frac{y}{N-y})$$

$x = 0$ のときの y の値を y_0 とおくと、$e^C = y_0/(N - y_0)$。これより、次の式を得る。

$$e^{kx+C} = \frac{y}{N-y}, \ y = \frac{N}{1 + e^{-kx-C}} = \frac{N}{1 + be^{-kx}} \quad b = \frac{N - y_0}{y_0} = e^{-C}.$$

練習問題

1. $\dfrac{dy}{dx} + 2x = 3x^2, \quad y = 2$ when $x = 0$
   $y = x^3 - x^2 + 2.$

2. $x\dfrac{dy}{dx} - y\sqrt{x} = 0, \quad y = 1$ when $x = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y}, \quad y = 3 \text{ when } x = 0$
   $y^2 = 2x^3/3 + 9.$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+5}{2y-1}, \quad y = 11 \text{ when } x = 0$

5. $\dfrac{dy}{dx} = (2x+3)y, \quad y = 1 \text{ when } x = 0$
   $y = e^{x^2+3x}.$

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+1}{y-3}, \quad y = 4 \text{ when } x = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + x, \quad y = 0 \text{ when } x = 1$
   $y = x^4 - x^3 + x^2/2 - 1/2.$

8. $x^2\dfrac{dy}{dx} = y, \quad y = -1 \text{ when } x = 1$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x}, \quad y = 5 \text{ when } x = e$
   $y = -5/(5\log|x| - 6).$

10. $\dfrac{dy}{dx} = x^{1/2}y^2, \quad y = 12 \text{ when } x = 4$

11. $\dfrac{dy}{dx} = (y-1)^2e^{x-1}, \quad y = 2 \text{ when } x = 1$
    $y = (e^{x-1} - 3)/(e^{x-1} - 2).$

12. $\dfrac{dy}{dx} = (x+2)e^y, \quad y = 0 \text{ when } x = 1$

4.7　お茶の時間

4.7.1　指数関数の身近な例

1. 10^7m 地球の直径、$10^{25}m$ 銀河団、$10^{27}m = 1000$ 億光年 宇宙の果て。

2. 1 等星は、2 等星の 2.51 倍の明るさ、2 等星は、3 等星の 2.51 倍の明るさ、3 等星は、4 等星の 2.51 倍の明るさ、4 等星は、5 等星の 2.51 倍の明るさ、5 等星は、6 等星の 2.51 倍の明るさ、したがって、1 等星は、6 等星の 99.63 倍の明るさ。

3. 音の大きさ：60 ホンは、エネルギーに勘算すると、70 ホンの 10 分の 1、80 ホンの 100 分の１。

4. マグニチュードは、1違うとエネルギーは32倍。マグニチュード 6 は広島型の原子爆弾およそ1個のエネルギーと同じ。阪神大地震 マグニチュード 7.2. $32^{1.2} = 64$。

   「1995年1月17日朝5時46分に起こった阪神・淡路大震災はマグニチュード 7.2 で、伊勢湾台風の死者数を上回る戦後最大の災害となりました。　この大震災のエネルギーは広島原爆の67発分です。　広島原爆は日本人にとって巨大な破壊力の象徴のようなものですが、その67倍ですから、阪神大震災の破壊エネルギーがいかに大きかったかを示しています。なお、1923年の関東大震災は阪神大震災の11倍、広島原爆の750発分でした。火災を中心に死者10万人を数え、阪神大震災も5500人余りの犠牲を生み出しました。

   しかし、広島原爆は阪神大地震のエネルギーの67分の1の小ささであったにもかかわらず、死者数は30倍を超えています。広島原爆は1945年8月6日朝8時15分に投下されてから、その年の内だけで13〜15万人、そして放射線後遺症などで亡くなった人を含めると約20万人が生命を失っています。　これは明らかに地震は人を殺す目的で起こるわけではないけれども、核兵器は人を能率よく殺す意図を持って、条件を選んで使われるからにほかならないのです。」(安斎　育郎（立命館大学教授・国際平和ミュージアム館長）http://www.ask.ne.jp/~hankaku/html/anzai.html)

5. 科学の世界、特に、生物の世界では、指数的な関数が非常によく現れます。$f(x) = e^{ax}$ というような形のものです。すると、$\log f(x) = ax$ となりますから、対数をとると比例する関係になっています。細胞分裂などを考えても、二つずつに分かれていくことなどを見ても、自然な気がします。そこで、データを log をとって、表すことがよくあります。

6. 「人間の感覚は刺激（エネルギー）の強さの対数に比例する。」

   $$(\text{感じる刺激の強さ}) = c \cdot \log\ (\text{刺激のエネルギー強さ})$$

   （心理学の Weber の法則）
   例：「2倍の欲望を満たすには、10倍の刺激が必要。」（これほんと？）上の理解が正しいと、「刺激のエネルギーが2乗になると、感じる刺激の強さが倍になる。」

7. 「トイチ」（10日で1割）$(1.1)^{36} = 30.91268\ldots$：トイチでお金を借りると、1年後には、31倍になっています。
   「トサン」（10日で3割）$(1.3)^{36} = 12646.21855\ldots$：トサンだと 12646 倍。このぐらいになると、借りた方も借りる方もいくらになったか計算できませんね。

8. 必ず b 倍以上の配当金のある賭けに、前回の掛金の r 倍ずつ賭けていき、一回勝ったら止める。もし、$b \geq r/(r-1)$ が満たされていれば必ず儲かる。

   最初の掛金を a 円とし、n 回目で勝ったとする。

   $$a(1 + r + \cdots r^{n-1}) = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} < \frac{ar^n}{r-1} = ar^{n-1}\frac{r}{r-1} \leq b \cdot a \cdot r^{n-1}.$$

   $$100(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) = 100 \times 127 = 12,700$$

「頭脳の数的リストラクション 思考力をつける 数学」深川和久（ふかがわやすひさ）著、永岡書店 (ISBN4-522-42098-6, 2002.11.10）を参照。

コンピュータ関連の仕事をしている友達が税金のとり方の提案をしていた。消費税はそれぞれのお札を使うことで支払うことにする。

1K 円札、1M 円札、1G 円札、... というのはどうだろうか。消費税が 3% 時代の話しですが。

$$1K = 2^{10} = 1,024,\ 1M = 2^{20} = 1,048,576,\ 1G = 2^{30} = 1,073,741,824$$

たとえば、1000 円のもののときは、$1K$ 円札ではらう。すると、24 円、税金を払うことになる。100 万円以上のものを買う時は、$1M$ 円札を使う。すると、税率は 4.9% になる。多少累進課税になりますが、税率を変えるときは、もう大変。

4.7.2 マグニチュードに関する問題

問題： 地震の強さを表す単位マグニチュード (M) は、そのエネルギー E の（2 を底とする）対数 $(\log_2)$ をとった値の一次関数（$c \cdot \log_2 E + b$ の形）で表される。また、$M6$ の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに相当し、エネルギーが 2 倍になると、マグニチュードが 0.2 増加する。マグニチュードが x の地震は、広島型原爆 n 個分のエネルギーに相当するとして、n を x で表す式を求めよ。ただし n は整数でなくても良いものとする。

まず、この問題の仮定を整理してみましょう。

地震のエネルギーを E、その地震のマグニチュードを m とすると

$$m = c\log_2 E + b \quad c,\, b \text{ は定数} \tag{4.18}$$

と表されます。特に、広島型の原子爆弾のエネルギーを E_a とすると（Atomic Bomb なので、a とつけました）、そのマグニチュードが 6 なので、上の式に代入すると

$$6 = c\log_2 E_a + b. \tag{4.19}$$

次に、エネルギーが 2 倍、すなわち $2 \cdot E$ になると、マグニチュードが 0.2 増え $m + 0.2$ になるので、

$$\begin{aligned}
m + 0.2 &= c\log_2 2 \cdot E + b \quad (\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y \text{ (Proposition 6.6 (i)) を用いると）} \\
&= c(\log_2 2 + \log_2 E) + b \quad (2^1 = 2 \text{ だから } \log_2 2 = 1)) \\
&= (c\log_2 E + b) + c \quad \text{（ここで (4.18) を用いると）} \\
&= m + c
\end{aligned}$$

だから、最初と最後を比べると $c = 0.2$ がわかります。（ここまではクラスで示しておきました。）

最後に、エネルギーが広島型の原爆 n 個分、すなわち $n \cdot E_a$ のときのマグニチュードが x だから (4.18) に代入すると

$$\begin{aligned} x &= c\log_2 nE_a + b \quad （\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y \text{ (Proposition 6.6 (i))を用いると）} \\ &= c\log_2 n + c\log_2 E_a + b \quad （\text{ここで (4.19) を用いると}） \\ &= c\log_2 n + 6 \quad （\text{上で求めた } c = 0.2 \text{ を用いると}） \\ &= 0.2\log_2 n + 6. \end{aligned}$$

ここで、$\log_2 n$ について解くと

$$\log_2 n = (x-6)/0.2 = 5(x-6)$$

だから、これより、$y = \log_2 n \Leftrightarrow n = 2^y$ に注意すると、

$$n = 2^{5(x-6)} = (2^5)^{(x-6)} = 32^{x-6}.$$

ちょっと難しかったかな。でも、このように公式ができました。阪神・淡路大地震はマグニチュードが 7.2（あとでも書くように 7.3 とも言われている）でしたから、$2^{5(7.2-6)} = 2^6 = 64$。広島型原爆 64 個分のエネルギーです。スマトラ沖地震はマグニチュード 9.0 だから、$2^{5(9-6)} = 2^{15} = 32768$ となります。よく、小さな地震が時々あった方がよいなどという人がいますが、スマトラ沖地震のエネルギーを放出するには、阪神・淡路大地震級の地震が、$32768/64 = 2^{15}/2^6 = 2^9 = 512$ 回ないといけません。これはたまりません。なかなかこれだけのエネルギーの放出はおおごとです。

最後に、マグニチュードが 0.1 増えるとエネルギーは何倍になるか考えてみましょう。マグニチュード 6 から 0.1 増えると、広島型原爆の $2^0.5 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.4142\ldots$ 倍になります。$x + 0.1$ のときも

$$2^{5(x+0.1-6)} = 2^{5(x-6)+\frac{1}{2}} = 2^{5(x-6)}2^{\frac{1}{2}} = 2^{5(x-6)}\sqrt{2} = n \cdot \sqrt{2}$$

ですからいつでもエネルギーは $\sqrt{2}$ 倍となります。つまり、マグニチュードが 0.1 増えると、エネルギーは $\sqrt{2}$ 倍になります。上でも書きましたが、$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ でした。きっちりと整数倍にならないこともあるので、「ただし n は整数でなくても良いものとする。」と予防線を張ってあります。

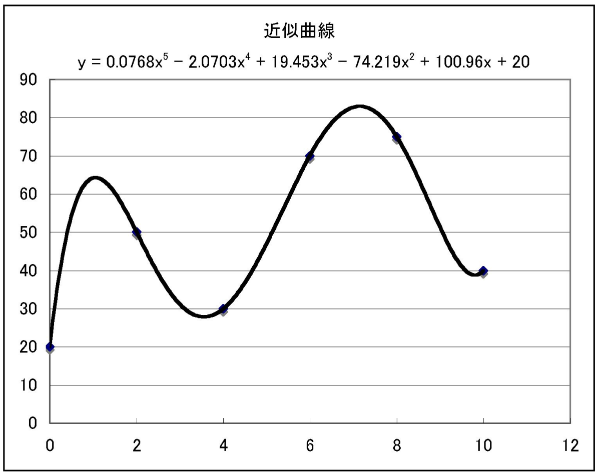
最後に、朝日新聞の記事を引用しておきます。

> 米地質調査所は、インドネシアのスマトラ島沖で２６日に起きた地震の規模をマグニチュード（M）８．９としていたが、約１．４倍の規模の９．０に修正した。１９００年以降では、５２年にロシア・カムチャツカで発生した地震と並んで４番目の規模で、６４年のアラスカでの地震（M９．２）以降で最大。９５年の阪神大震災（M７．３）の約３６０倍のエネルギーが放出されたことになる。
> (www.asahi.com 04/12/27)

4.7.3 表計算ソフト Excel を使ってみよう

表計算ソフトは Excel 以外にも何種類もありますが、ここでは、Excel を使って、多項式近似、そして微分・積分について考えて見ようと思います。Excel は Microsoft Office に含まれていますが、使ったことはありますか。
まずデータが必要です。右の表を考えます。これを入力してみて下さい。次に、この表の部分を選択。[挿入] から [グラフ...] を選ぶか、ツールバーのグラフを選びます。いろいろな絵が出てきますが、そこで、[散布図] を選ぶ。散布図の中でもいろいろと選択ができると思いますが、一番簡単な、点だけのものを選んで下さい。おそらく何もしないで、それらしいグラフが表示されると思います。どんどん次へ進とグラフができます。と言っても点がいくつも打ってあるものです。今度はそのグラフを選択、するとメニューに [グラフ] が出るはずです。そこで、[グラフ] のメニューの中から、[近似曲線を追加] を選びます。ここで [多項式近似] をえらび右に次数と書いてあるので、5 にしてみましょう。さらに [オプション] を開き、そこにある、グラフに [数式を表示] するを選択します。それで [OK]

x	$f(x)$
0	20
2	50
4	30
6	70
8	75
10	40



ここで出てきた多項式はかなり係数が複雑ですね。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0.0768x^5 - 2.0703x^4 + 19.453x^3 \\
&\quad -74.219x^2 + 100.96x + 20.
\end{aligned}
$$

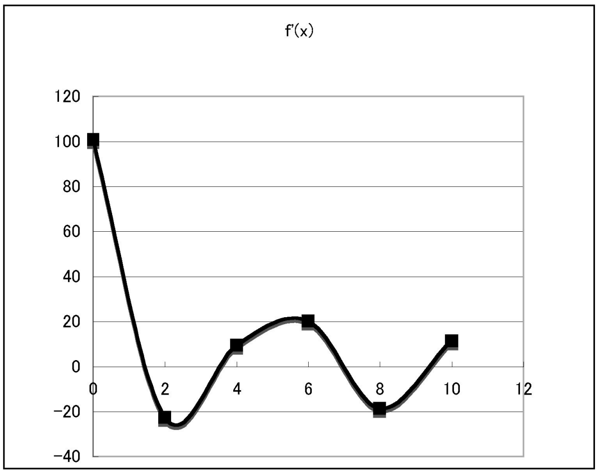
これを微分するとどうなりますか。ちょっと QuickMath (www.quickmath.com) で横着をしてみると

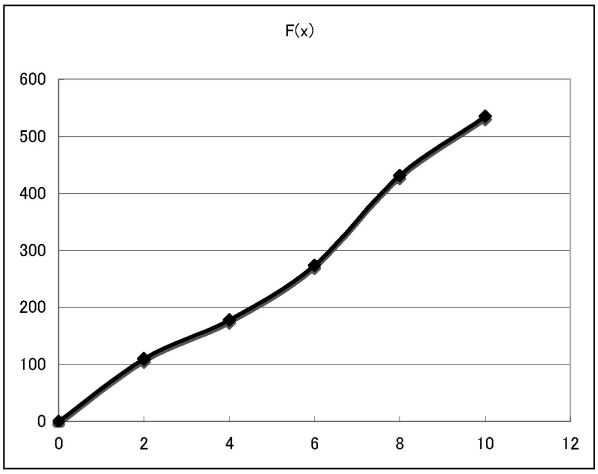
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0.384x^4 - 8.2812x^3 + 58.359x^2 \\
&\quad -148.438x + 100.96
\end{aligned}
$$

不定積分も QuickMath を使うと

$$
\begin{aligned}
\int f(x)dx &= 0.0128x^6 - 0.41406x^5 + 4.86325x^4 \\
&\quad -24.7397x^3 + 50.48x^2 + 20x + C
\end{aligned}
$$

これをすべて Excel のグラフで描いてみましょう。





左が導関数、右が不定積分で $C = 0$ としたものです。これは、もっと簡単に値を表で計算させ、グラフの散布図の平滑線で結ぶとして作りました。多項式の入力方法はサンプルを書いておきます。上の表の右の列にこれを入力すると $f'(x)$ などを計算してくれます。

$$= 0.384 * RC[-2]\hat{\ }4 - 8.2812 * RC[-2]\hat{\ }3 + 58.359 * RC[-2]\hat{\ }2 - 148.438 * RC[-2] + 100.96$$

たとえば最初のデータがそれぞれの時刻での車のスピードだとすると、$f'(x)$ は速度変化を表し、$F(x)$ は旅した道のりを表しています。もし、これがある単位で、出生数などを表していれば、$f'(x)$ は出生数の変化、$F(x)$ は生まれた人の総計となっているわけです。それぞれ自分の興味のあることに置き換えて、理解してみて下さい。

4.7.4　正規分布曲線と T スコア

n 個の数値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が与えられたとき、μ（平均, mean）と σ（標準偏差, standard deviation）を次の式で定義する。

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},\ \sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots (x_n - \mu)^2}{n}}.$$

σ^2 は分散 (variance) と言われる。分散は、平均との差がどのくらい大きいかを表す（統計）量である。分散が 2 乗の和であるため、その平方根が、標準偏差である。

平均が μ, 標準偏差が σ となる次の代表的な関数のグラフが正規分布曲線と言われるものである。

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

少し上級の微分積分学を用いると（コースとしては、Calculus II）次の式を証明することができる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)dx = 1.$$

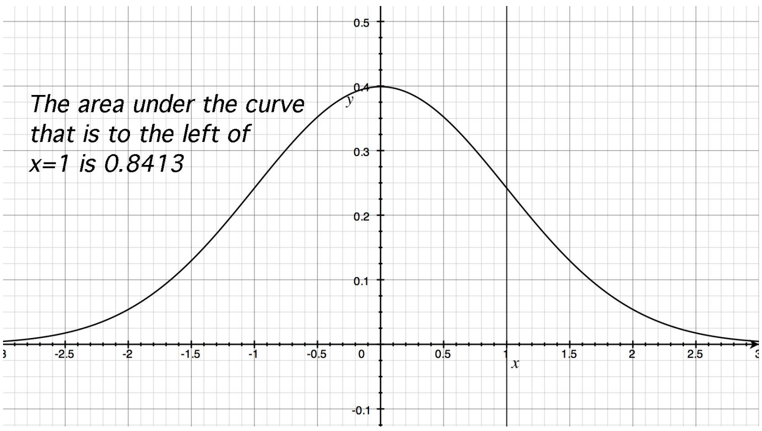
すなわち、$y = f(x)$ と x 軸との間の山型の部分の面積は 1 である。特に、$\mu = 0, \sigma = 1$ としたものを、標準正規分布曲線 という。

$$y = f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

変数の変換によって、$y = f(x)$ のグラフの u より左の面積、すなわち、平均が μ, 標準偏差が σ の正規分布曲線 $y = f(x)$ と x 軸と、$x = u$ で囲まれた面積は、標準正規分布曲線 $y = f_0(x)$ の、

$$v = \frac{u - \mu}{\sigma}$$

より左の面積と等しい。



v の値が 1 のときは、面積は 0.8413, 2 のときは、0.9772、3 のときは、0.9987 である。すなわち $x = 1$ より左に山の約 84% があり、$x = 2$ より左には、約 98% があると読むこともできる。

T スコアと呼ばれ、通常偏差値とも言われるものは、

$$50 + 10v = 50 + 10 \cdot \frac{u - \mu}{\sigma}$$

で与えられる。

これは、v の値を 10 倍して、50 を加えたものである。従って、偏差値 60 とは、$v = 1$ すなわち、$\mu + \sigma$ を意味し、その偏差値に対応する値より下に、山の 約 84% があることを意味している。平均点 μ の場合は、50% で、偏差値 70 の場合は、値が、$\mu + 2\sigma$、で、その値より小さいところに、山の 98% があることに対応している。正規分布曲線は応用上も大切な曲線であるが、そのもとになっている、e^{-x^2} の原始関数は初等関数（指数関数や、多項式、三角関数やその合成）では表せないことが分かっている。

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}dx$$

とすると、$F(x)$ は、$f_0(x)$ の原始関数で、$F(0) = 0.5$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.1) = 0.8643$, $F(1.2) = 0.8849$, $F(1.3) = 0.9032$, $F(1.4) = 0.9192$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(1.6) = 0.9452$, $F(1.7) = 0.9554$, $F(1.8) = 0.9641$, $F(1.9) = 0.9713$, $F(2) = 0.9772$, $F(3) = 0.9987$ のように値を求めることはできるが、一般的な式を簡単な関数では表せない。

4.7.5 雨粒の落下速度

ものを投げ上げたり、落下させたりする時（放物運動)、時刻 t での地上からの高さを $h(t)$ で表すとものの大きさや重さには関係なくいつでも $h(t) = at^2 + bt + c$ の形を大体

しているが、a の値はいつでも同じだという観測された (G. Galilei)。垂直方向の速度は $h(t)$ の平均変化率 $v(t) = h'(t) = 2at + b$ に等しく、速度の平均変化率、すなわち加速度は $v'(t) = h''(t) = 2a$ となる。a の値が一定だということは、下向きの加速度 $-2a$ が一定で、これが重力加速度といわれ $g = 9.8m/\mathrm{sec}^2$ となっている。

逆に加速度が α と一定の場合は $h''(t) = \alpha$ だから、$h'(t) = \alpha t + \beta$、$h(t) = \frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + \gamma$ となります。β、γ は何でしょうか。数学的には積分定数ですが、$h'(0) = \beta$ ですから、この場合は $t = 0$ の時の速度。$h(0) = \gamma$ ですから γ は $t = 0$ の時のものの高さだということがわかります。$h''(t) = -g$ というような方程式（$h(t)$ を求めると言う意味で）を微分方程式といい、これらの条件 $h'(0) = \beta, h(0) = \gamma$ を初期条件と言います。

雨滴の落下を考えてみましょう。すると前の例のような式で考えると現実と合わないことが出てきます。高度 2000 メートルから降ってくる雨粒を考えてみましょう。（一般的には 1000 メートルぐらいだそうですが）上の例で求めた式から

$$0 = h(t) = -\frac{9.8}{2}t^2 + 2000,\ \text{より}\ t^2 \sim 400,\ t \sim 20.$$

落ちてくるのに 20 秒かかりますから、そのときの速度は $9.8{\cdot}20 = 196(m/sec) \sim 720(km/h)$ これは速過ぎます。電車で雨粒の動きを観察したことがありますか。電車が速いとかなり斜めにあとがつきます。わたしは電車の一番前の運転席が見えるところに乗ってスピードメータを見ながら、かつ横の窓にあたる雨粒の角度をはかり、ちょうど 45 度になった時の速度をはかろうとして観察していたことがあります。実際には風があったり、雨粒によって動きが違ったりしますが、電車がスピードを上げるとすぐ、45 度よりも大きな角度になり、平行に雨粒が飛ぶようになります。ということは、電車のスピードよりかなり遅いということです。これは、空気抵抗を考えていないために起きた問題です。空気抵抗を考えると速度のおそいときは粘性抵抗というものが働き、速さに比例して進む方向と逆向きの力が働きます。

$$v'(t) = -g - kv(t),\ v = -\frac{g}{k} + Ce^{-kt} = -\frac{g}{k} + (v_0 + \frac{g}{k})e^{-kt}.$$

これで計算してみると、1mm の雨粒の速度は大体 432km/h になります。これもまだ速過ぎます。速度が速くなると慣性抵抗というのがはたらきこれは、速度の二乗に比例してはたらきそれを勘案すると、23.7km/h 程度になり大体実測とあっていることがわかります。結局、物理ではすべての情報を入れると複雑になり過ぎるので、条件をいろいろと入れて、たとえば空気抵抗がないとか、十分ゆっくりだということにして、求めて、それが実験結果とあっているかあっていないかを見て修正していくわけです。現実が大切ですから。つまり常に厳密には考えていないということも言っているわけです。厳密に考えていないから、かえってきれいな結果が得られ、万有引力の法則とか $f = m\alpha$ の様なことから問題を考えることができるようになるわけです。数学では、最初から設定した枠組のなかで、どれだけのことが言えるかを考えるわけです。厳密さを一番大切にするわけです。そう言った違いから、物理と数学はつねに、相互依存していながら全くちがった分野として「お互いに尊敬しあう？」関係にあります。でも、数学で厳密にあることが証明でき、

大発見というとき、物理ではそんなことは、50 年前から知っていたなどと酷評されることもありますが。
　この微分･積分はイギリスのニュートン（1642－1727）とドイツのライプニッツ（1646－1716）によって基礎ができました。この二人とも数学と物理学両方に大きな貢献をした人です。

4.8　練習問題

Quiz 4, 2005

1. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5=q(x)(x+2)+r$ となるような多項式 $q(x)$ と数 r を求めよ。
2. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5=a_4(x-2)^4+a_3(x-2)^3+a_2(x-2)^2+a_1(x-2)+a_0$ となるような数 a_4,a_3,a_2,a_1,a_0 を求めよ。
3. $h(x)=a(x-3)(x-5)(x-7)+b(x-1)(x-5)(x-7)+c(x-1)(x-3)(x-7)+d(x-1)(x-3)(x-5)$ は、$h(1)=48$, $h(3)=-3$, $h(5)=16$, $h(7)=-1$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。
4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(1)=h(1)$, $f(3)=h(3)$, $f(5)=h(5)$, $f(7)=h(7)$ となる多項式で $f(0)=h(0)$ かつ $\deg f(x)=6$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

Quiz 4, 2005, 解答

1. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5=q(x)(x+2)+r$ となるような多項式 $q(x)$ と数 r を求めよ。

   解：下のように組み立て除法で求めると (3 行目まで)、$q(x)=c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0=x^3-3x$, $r=-5$。

-2	1	2	-3	-6	-5
		-2	0	6	0
	1 (c_3)	0 (c_2)	-3 (c_1)	0 (c_0)	-5 (r)

2. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5=a_4(x-2)^4+a_3(x-2)^3+a_2(x-2)^2+a_1(x-2)+a_0$ となるような数 a_4,a_3,a_2,a_1,a_0 を求めよ。

   解：下の組み立て除法から、$a_4=1, a_3=10, a_2=33, a_1=38, a_0=3$ となります。

2	1	2	-3	-6	-5
		2	8	10	8
2	1	4	5	4	3 ($r=a_0$)
		2	12	34	
2	1	6	17	38 (a_1)	
		2	16		
2	1	8	33 (a_2)		
		2			
2	1 (a_4)	10 (a_3)			

3. $h(x) = a(x-1)(x-3)(x-5) + b(x+1)(x-3)(x-5) + c(x+1)(x-1)(x-5) + d(x+1)(x-1)(x-3)$ は、$h(1) = 48$, $h(3) = -3$, $h(5) = 16$, $h(7) = -1$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。

   解：

$$\begin{aligned} h(x) &= 48\frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{(1-3)(1-5)(1-7)} - 3\frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{(3-1)(3-5)(3-7)} \\ &\quad + 16\frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{(5-1)(5-3)(5-7)} - \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(7-1)(7-3)(7-5)} \\ &= -(x-3)(x-5)(x-7) - \frac{3}{16}(x-1)(x-5)(x-7) \\ &\quad - (x-1)(x-3)(x-7) - \frac{1}{48}(x-1)(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

   だから、$a = -1$, $b = -\frac{3}{16}$, $c = -1$, $d = -\frac{1}{48}$ となります。

4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(1) = h(1)$, $f(3) = h(3)$, $f(5) = h(5)$, $f(7) = h(7)$ となる多項式で $f(0) = h(0)$ かつ $\deg f(x) = 6$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

   解：たとえば左下の多項式は次数が 6 で条件を満たす。

$$h(x) + x^2(x+1)(x-1)(x-3)(x-5), \quad h(x) + g(x)(x+1)(x-1)(x-3)(x-5).$$

   で $g(x)$ が一次多項式 $ax(x+b)$ $(a \neq 0)$ であれば、いつでも条件を満たします。逆に、条件を満たすものは、すべてこのように書くことができます。

Quiz 4, 2004

1. $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + x - 6 = q(x)(x-2) + r$ となるような多項式 $q(x)$ と数 r を求めよ。

2. $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + x - 6 = a_4(x-2)^4 + a_3(x-2)^3 + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0$ となるような数 a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 を求めよ。

3. $h(x) = a(x-1)(x-3)(x-5) + b(x+1)(x-3)(x-5) + c(x+1)(x-1)(x-5) + d(x+1)(x-1)(x-3)$ は、$h(-1) = 24$, $h(1) = -16$, $h(3) = 8$, $h(5) = -48$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。

4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(-1) = h(-1)$, $f(1) = h(1)$, $f(3) = h(3)$, $f(5) = h(5)$ となる多項式で $\deg f(x) = 5$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

Quiz 4, 2004, 解答

1. $x^4-8x^3+15x^2+x-6=q(x)(x-2)+r$ となるような多項式 $q(x)$ と数 r を求めよ。

   解：下のように組み立て除法で求めると (3 行目まで)、$q(x)=c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0=x^3-6x^2+3x+7$, $r=8$。

2	1	-8	15	1	-6
		2	-12	6	14
2	$1\ (c_3)$	$-6\ (c_2)$	$3\ (c_1)$	$7\ (c_0)$	$8\ (r=a_0)$
		2	-8	-10	
2	1	-4	-5	$-3\ (a_1)$	
		2	-4		
2	1	-2	$-9\ (a_2)$		
		2			
2	1	$0\ (a_3)$			
	$1\ (a_4)$				

2. $x^4-8x^3+15x^2+x-6=a_4(x-2)^4+a_3(x-2)^3+a_2(x-2)^2+a_1(x-2)+a_0$ となるような数 a_4,a_3,a_2,a_1,a_0 を求めよ。

   解：上の組み立て除法から、$a_4=1, a_3=0, a_2=-9, a_1=-3, a_0=8$ となります。

3. $h(x)=a(x-1)(x-3)(x-5)+b(x+1)(x-3)(x-5)+c(x+1)(x-1)(x-5)+d(x+1)(x-1)(x-3)$ は、$h(-1)=24$, $h(1)=-16$, $h(3)=8$, $h(5)=-48$ を満たすとする。このとき、a,b,c,d を求めよ。

   解：

$$
\begin{aligned}
h(x) &= 24\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1-1)(-1-3)(-1-5)}-16\frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{(1+1)(1-3)(1-5)} \\
&\quad +8\frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{(3+1)(3-1)(3-5)}-48\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(5+1)(5-1)(5-3)} \\
&= -\frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-5)-(x+1)(x-3)(x-5) \\
&\quad -\frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-5)-(x+1)(x-1)(x-3)
\end{aligned}
$$

   だから、$a=-1/2$, $b=-1$, $c=-1/2$, $d=-1$ となります。

4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(-1)=h(-1)$, $f(1)=h(1)$, $f(3)=h(3)$, $f(5)=h(5)$ となる多項式で $\deg f(x)=5$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

解：たとえば左下の多項式は次数が 5 で条件を満たす。

$$h(x) + x(x+1)(x-1)(x-3)(x-5), \quad h(x) + g(x)(x+1)(x-1)(x-3)(x-5).$$

で $g(x)$ が一次多項式 $ax+b$ $(a \neq 0)$ であれば、いつでも条件を満たします。逆に、条件を満たすものは、すべてこのように書くことができます。

Quiz 4, 2003

1. $f(x)$ を次数が 7 の多項式、$g(x)$ を次数が 3 の多項式とする。このとき、$q(x)$ と $r(x)$ を多項式で次の式を満たすものとする。($\deg r(x)$ は多項式 $r(x)$ の次数を表す。)

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \ \deg r(x) < 3$$

このとき、$q(x)$ の次数はいくつか。その理由も記せ。

2. $2x^3 - 3x^2 + x + 1 = p(x)(x-2) + r$ となるような多項式 $p(x)$ と数 r を求めよ。

3. $2x^3 - 3x^2 + x + 1 = a_3(x-2)^3 + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0$ となるような数 a_3, a_2, a_1, a_0 を求めよ。

4. $h(x) = b_0 \cdot (x-1)(x-2)(x-3) + b_1 \cdot x(x-2)(x-3) + b_2 \cdot x(x-1)(x-3) + b_3 \cdot x(x-1)(x-2)$ は、$h(0) = 6, \ h(1) = -2, \ h(2) = 10, \ h(3) = -6$ を満たすとする。このとき、b_0, b_1, b_2, b_3 を求めよ。

Quiz 4, 2003, 解答

1. $f(x)$ を次数が 7 の多項式、$g(x)$ を次数が 3 の多項式とする。このとき、$q(x)$ と $r(x)$ を多項式で次の式を満たすものとする。($\deg r(x)$ は多項式 $r(x)$ の次数を表す。)

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \ \deg r(x) < 3$$

このとき、$q(x)$ の次数はいくつか。その理由も記せ。

$$\deg q(x) + 3 = \deg q(x) + \deg g(x) = \deg q(x)g(x) = \deg(f(x) - r(x)) = 7$$

最後の部分は $f(x)$ の次数が 7 で $r(x)$ の次数は 2 以下で 7 次の項を含まないから、一般的には $\deg(f(x) - r(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg r(x))$ ですが、この場合は、$\deg(f(x) - r(x)) = 7$。したがって、$\deg q(x) = 7 - 3 = 4$。$q(x)$ の次数は 4。

2. $2x^3 - 3x^2 + x + 1 = p(x)(x-2) + r$ となるような多項式 $p(x)$ と数 r を求めよ。

下のように組み立て除法で求めると、$q(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0 = 2x^2 + x + 3, \ r = 7$。

2	2	-3	1	1
		4	2	6
2	$2(c_2)$	$1(c_1)$	$3(c_0)$	$7(a_0 = r)$
		4	10	
2	2	5	$13(a_1)$	
		4		
	$2(a_3)$	$9(a_2)$		

3. $2x^3-3x^2+x+1 = a_3(x-2)^3+a_2(x-2)^2+a_1(x-2)+a_0$ となるような数 a_3, a_2, a_1, a_0 を求めよ。

   同じく上の組み立て除法から、$a_3 = 2, a_2 = 9, a_1 = 13, a_0 = 7$ となります。

4. $h(x) = b_0\cdot(x-1)(x-2)(x-3)+b_1\cdot x(x-2)(x-3)+b_2\cdot x(x-1)(x-3)+b_3\cdot x(x-1)(x-2)$ は、$h(0) = 6,\ h(1) = -2,\ h(2) = 10,\ h(3) = -6$ を満たすとする。このとき、b_0, b_1, b_2, b_3 を求めよ。

   $6 = h(0) = b_0(0-1)(0-2)(0-3) = -6b_0$ だから $b_0 = -1$
   $-2 = h(1) = b_1 \cdot 1(1-2)(1-3) = 2b_1$ だから $b_1 = -1$
   $10 = h(2) = b_2 \cdot 2(2-1)(2-3) = -2b_3$ だから $b_2 = -5$
   $-6 = h(3) = b_3 \cdot 3(3-1)(3-2) = 6b_3$ だから $b_3 = -1$
   となる。

Quiz 4, 2002　$f(x)$ を x の 3 次の多項式とし、自然数 n に対して、$f_n = f(n)$ とおく。f_n が次の条件を満たす時、以下の問いに答えよ。(3 行目、4 行目はヒント。)

f_1		f_2		f_3		f_4		f_5		f_6		f_7		f_8
33		27		14		0		-9		-7		12		54
	-6		-13		-14		-9		2		19		42	
		-7		-1		5		11		17		23		

1. f_9 は何か。

2. $\Delta^m f_n = 0$ となる自然数で最小の m は何か。

3. $\Delta^2 f_n$ を求めよ。

4. 2 次の多項式 $g(x)$ で $f(x) = (x-4)g(x)$ となるものが存在することを示せ。定理を使う時はどの定理を用いたかも明確に記すこと。

5. $f(x)$ を下のように書く時、b_1, b_2, b_3, b_4 を求めよ。

$$\begin{aligned} f(x) &= b_1(x-2)(x-3)(x-4) + b_2(x-1)(x-3)(x-4) \\ &\quad + b_3(x-1)(x-2)(x-4) + b_4(x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

Quiz 4, 2002, 解答 $f(x)$ を x の 3 次の多項式。自然数 n に対して、$f_n = f(n)$。差をとったものが下の段に書かれている。太字のものは新たに付け加えたもの。

f_1		f_2		f_3		f_4		f_5		f_6		f_7		f_8		$\mathbf{f_9}$
33		27		14		0		-9		-7		12		54		**125**
	-6		-13		-14		-9		2		19		42		**71**	
		-7		-1		5		11		17		23		**29**		
			6		**6**		**6**		**6**		**6**		**6**			
				0		**0**		**0**		**0**		**0**				

1. f_9 は何か。解：$f_9 = 125$。問題の最初に $f(x)$ は 3 次の多項式とあるので、定理 5.1 より $\Delta^4 f_n = 0$ である。実際上のように差をとっていくと、4 回差をとったものは、零になっている。$\Delta^4 f_n = 0$ よりその次も 0 としてよいから、今度は順次に上がっていくと、f_9 が求まる。$f(x)$ の次数が 3 という仮定がないと、最後の行は 0 が続くのが自然に見えますが、必ずそうだとは結論できません。そこで、仮定に入れておきました。

2. $\Delta^m f_n = 0$ となる最小の m。解：$m = 4$。$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$、$\Delta^2 f_n = \Delta(f_{n+1} - f_n)$ となっていますが、前問で書いたように $m = 4$ で零になります。

3. $\Delta^2 f_n$。解：$6n - 13$。$\Delta^2 f_n = g_n$ とすると、これは、$-7, -1, 5, 11, 17, \ldots$ となっている数列です。これは、公差が 6 で初項が -7 の等差数列ですから $g_n = -7 + 6(n-1) = 6n - 13$ となります。正確には、$\Delta^2 g_n = \Delta^4 f_n = 0$ だから、定理 5.1 より g_n は n の 1 次式、すなわち、$g_n = a_1 n + a_0$ と書けることがわかりますから、$-7 = g_1 = a_1 + a_0$、$-1 = g_2 = 2a_1 + a_0$ から $a_1 = 6$、$a_0 = -13$ を導くこともできます。n の一次式で書ける数列が等差数列であるということもできます。

4. 2 次の多項式 $g(x)$ で $f(x) = (x-4)g(x)$ となるものが存在することを示せ。解：定理 5.2 (3) を用いると $m = 1, a_1 = 4$ として、$f(4) = f_4 = 0$ だから $f(x) = (x-4)g(x)$ と書くことができます。または同じ定理の (2) を用い、$g(x) = (x-4)$ とすると $q(x)$, $r(x)$ で $f(x) = q(x)(x-4) + r(x)$ となるものがあります。$\deg r(x) < \deg(x-4) = 1$ ですから、$r(x)$ は定数。$f(4) = f_4 = 0$ を使うと、$0 = q(4)(4-4) + r(4) = r(4)$。しかし $r(x)$ は定数でしたから $r(x) = 0$ すなわち、$f(x) = q(x)(x-4)$ と書けます。ここで $g(x) = q(x)$ とすれば結果が得られます。

5. 解：$x = 1, 2, 3, 4$ を代入すると次のようになります。

$$\begin{aligned}
33 &= f_1 = f(1) = b_1(1-2)(1-3)(1-4) = -6b_1, \quad b_1 = -\frac{11}{2} \\
27 &= f_2 = f(2) = b_2(2-1)(2-3)(2-4) = 2b_2, \quad b_2 = \frac{27}{2} \\
14 &= f_3 = f(3) = b_3(3-1)(3-2)(3-4) = -2b_3, \quad b_3 = -7 \\
0 &= f_4 = f(4) = b_4(4-1)(4-2)(4-3) = 6b_4, \quad b_4 = 0
\end{aligned}$$

すなわち、$b_1 = -\dfrac{11}{2}$, $b_2 = \dfrac{27}{2}$, $b_3 = -7$, $b_4 = 0$.

Quiz 4, 2001

1. $f(x)$ を $f(1)=2,\ f(2)=7,\ f(3)=1,\ f(4)=8$ を満たす多項式とする。以下の問題で答えを簡単にする必要はない。
   (a) 次数が 3 以下としたとき $f(x)$ を一つ書け。
   (b) 次数が丁度 4 としたとき $f(x)$ を一つ書け。
2. $a_1=1,\ a_2=3/4,\ a_3=9/16$ を満たす等比数列 $\{a_i\}$ を考える。
   (a) a_{10} はいくつか。
   (b) $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ はいくつか。
   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ はいくつか。
3. 次の極限を求めよ。
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^3}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2}$　(Hint:分母分子を因数分解)
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x^2(1+\cos x)}$　(Hint:いくつかの積に分けて考える)

Quiz 5, 2005

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。(Show work !)
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2-3n}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4}{x+2}$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x-2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-9x^2+4x+12}{x^4-3x^3+3x^2-8x+12}$ を求めよ。途中の式も略さずに。(Show work!)
3. 地震の強さを表す単位マグニチュード (M) は、そのエネルギー E の（2 を底とする）対数 $(\log_2)$ をとった値の一次関数（$c\cdot\log_2 E+b$ の形）で表される。また、$M6$ の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに相当し、エネルギーが 2 倍になると、マグニチュードが 0.2 増加する。マグニチュードが x の地震は、広島型原爆 n 個分のエネルギーに相当するとして、 n を x で表す式を求めよ。ただし n は整数でなくても良いものとする。

Quiz 5, 2005, 解答

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。(Show work !)

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}-3}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim_{x\to-2}x-2=-4.$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4}{x+2}$ 発散
   $x+2$ は $x\to-2$ のときいくらでも小さくなる。分子は 4 より大きいので、一定の値には収束しません。The limit does not exist! 極限が $+\infty$ とは限りません。$x+2$ は $x=-2$ の近くで負の値にもなるからです。

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{-4}=0.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^4-9x^2+4x+12}{x^4-3x^3+3x^2-8x+12}$ を求めよ。途中の式も略さずに。(Show work!)
   解:$f(x)=x^4-9x^2+4x+12$, $g(x)=x^4-3x^3+3x^2-8x+12$ とすると、$f(2)=g(2)=0$ となる。従って、$\lim_{x\to2}f(x)/g(x)$ は、0/0 の不定形になる。そこで、組み立て除法を用い、$f(x)=(x-2)(x^3+2x^2-5x-6)$, $g(x)=(x-2)(x^3-x^2+x-6)$ と書くと、
   $$\lim_{x\to2}\frac{x^4-9x^2+4x+12}{x^4-3x^3+3x^2-8x+12}=\lim_{x\to2}\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-x^2+x-6}$$
   となるところが、これもまた不定形なので、組み立て除法を用いて
   $$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+4x+3)}{(x-2)(x^2+x+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+4x+3}{x^2+x+3}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}.$$

3. 地震の強さを表す単位マグニチュード (M) は、そのエネルギー E の（2 を底とする）対数 ($\log_2$) をとった値の一次関数（$c\cdot\log_2 E+b$ の形）で表される。また、$M6$ の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに相当し、エネルギーが 2 倍になると、マグニチュードが 0.2 増加する。マグニチュードが x の地震は、広島型原爆 n 個分のエネルギーに相当するとして、 n を x で表す式を求めよ。ただし n は整数でなくても良いものとする。

   解：$n=2^{5(x-6)}=32^{x-6}$.

   マグニチュード x の地震のエネルギーを $E(x)$ とすると、$n=E(x)/E(6)$ でかつ、$E(x+0.2)=2\cdot E(x)$ である。 $x=c\cdot\log_2 E(x)+b$ と表すと.
   $$0.2=c\cdot\log_2(E(x+0.2))+b-(c\cdot\log_2(E(x))+b)=c\cdot\log_2\frac{E(x+0.2)}{E(x)}=c\cdot\log_2 2=c.$$
   従って、$x-6=0.2\log_2(E(x)/E(6))=0.2\log_2 n$ これより、$(x-6)/0.2=5(x-6)=\log_2 n$ となるから、求める結果が得られる。

Quiz 5, 2004

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。(Show work !)

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{1-7n}$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-7}{8}\right)^n$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x-2}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-3x^2+4x-4}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-x^2+5)(x-2)}{(x^2+x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2+5}{x^2+x-3}$ としてよい理由は何か。

3. 地震の強さを表す単位マグニチュード (M) は、そのエネルギーの対数 (Log) をとった値に比例し、$6M$ の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに相当する。阪神・淡路大地震は $7.2M$、今回の中越の地震は $6.8M$ と言われている。阪神・淡路大地震のエネルギーが広島に落された原爆の 64 個分とすると、今回の中越の地震はこの原爆何個分のエネルギーに相当するか。（人の悲しみの深さは、それをもたらしたエネルギーとは関係ありませんが、防災を考えるとこのような考察も重要です。）

Quiz 5, 2004, 解答

1. (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{1-7n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}-7}=\frac{3}{-7}=-\frac{3}{7}$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-7}{8}\right)^n=0.$ $c=(-7/8)$ とすると、$|c|<1$ だから、$|c^n|=|c|^n\to 0$ (as $n\to\infty$).

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2}=\frac{\lim_{x\to 2}x^2+4}{\lim_{x\to 2}x+2}=\frac{8}{4}=2.$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x+2=4.$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x-2}.$ 　$x-2$ は $x\to 2$ のときいくらでも小さくなる。分子は 4 より大きいので、一定の値には収束しません。The limit does not exist! 発散。極限が $+\infty$ とは限りません。$x-2$ は $x=2$ の近くで負の値にもなるからです。

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-3x^2+4x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)}{(x-2)(x^2-x+2)}=\frac{32}{4}=8.$
$f(x)=x^4-16$、$g(x)=x^3-3x^2+4x-4$ とすると $f(2)=g(2)=0$ であることがわかります。したがって、因数定理から $x-2$ で割れることがわかりますから、組み立て除法などを用いて、$f(x)=(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$、$g(x)=(x-2)(x^2-x+2)$ となる。このあとも組み立て除法を用いると計算が早いと思います。

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-x^2+5)(x-2)}{(x^2+x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2+5}{x^2+x-3}$ としてよい理由は何か。

解：「関数 $f(x)$ において 変数 x が a と異なる値をとりながら a に近づくとき、$f(x)$ が一つの値 α に近づくならば x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値は α であるという。」ですから $x-2\neq 0$ です。したがって、その条件のもとでは、等しくなります。

3. 今回の中越の地震はこの原爆何個分のエネルギーに相当するか。

解：a で atomic bomb、h で阪神・淡路、c で中越をあらわし、M は地震の強さ、E はエネルギーをあらわすと、C を定数、底を b とすると、$M_a=C\log_b E_a$, $M_h=C\log_b E_h$, $M_c=C\log_b E_c$。条件は、$M_a=6$、$M_h=7.2$、$M_c=6.8$, $E_h/E_a=64=2^6$ ですから（実は b は何でも構いません）、

$$1.2=M_h-M_a=C\log_b E_h-C\log_b E_a=C\log_b\left(\frac{E_h}{E_a}\right)=C\log_b 64=6C\log_b 2.$$

これで C が決まります。欲しいのは E_c/E_a ですから、

$$C\log_b\left(\frac{E_c}{E_a}\right)=C\log_b E_c-C\log_b E_a=0.8=4C\log_b 2=C\log_b 2^4=C\log_b 16.$$

したがって、$E_c/E_a=16$。16 倍。もちろん、授業で言ったように、マグニチュードが 0.2 あがるごとにエネルギーが倍になることを使えば、$M_c-M_a=0.8=4\cdot(0.2)$ ですから、16 倍であることがわかります。

Quiz 5, 2003

1. 次の極限を求めよ。途中の式も略さずに。(Show work !)

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{2-5n}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-5}{7}\right)^n$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-6}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3-2x^2+5x-8)}{x^3-x^2-4}$

2. $f(x)=x^4-6x^3+8x^2+10x-19$ とすると、$f(1)=-6$ を満たす。このとき、区間 $[1,2]$ (1 と 2 の間) に、$f(x)=0$ を満たす x を含むか。理由も述べよ。

Quiz 5, 2003, 解答

1. 次の極限を求めよ。途中の式も略さずに。(Show work !)

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{2-5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{5}{n}}{\frac{2}{n}-5}=\frac{\lim_{n\to\infty}2-\frac{5}{n}}{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-5}=-\frac{2}{5}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-5}{7}\right)^n=0$ as $\left|\frac{-5}{7}\right|<1$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x+2=4$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=$ D.N.E. (diverge)
なぜなら、分子は $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-3)(x+1)=-3,$ であり、分母は $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x+3)(x-2)=0$ だからである。(分母は x が 2 より小さい時は、負でとても小さい数になり、2 より大きい時には、正でとても小さい数になりますから、全体としては、$x<2$ で $x\to 2$ のときは正の無限大に発散、$x>2$ で $x\to 2$ のときは、負の無限大に発散となっています。$y=1/x$ のグラフが思い浮かべばそれを考えてみて下さい。)

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}=\frac{\lim_{x\to 2}x^2+x-6}{\lim_{x\to 2}x^2-2x-3}=\frac{0}{-3}=0$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3-2x^2+5x-8)}{x^3-x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3-2x^2+5x-8)}{(x-2)(x^2+x+2)}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+5x-8}{x^2+x+2}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -1 & 0 & -4 \\
 & & 2 & 2 & 4 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}$$

2. $f(x)=x^4-6x^3+8x^2+10x-19$ とすると、$f(1)=-6$ を満たす。このとき、区間 $[1,2]$ (1 と 2 の間) に、$f(x)=0$ を満たす x を含むか。理由も述べよ。

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & -6 & 8 & 10 & -19 \\
 & & 2 & -8 & 0 & 20 \\
\hline
 & 1 & -4 & 0 & 10 & \multicolumn{1}{|r}{1}
\end{array}$$

したがって、$f(2) = 1$ である。$f(x)$ は連続でかつ、$f(1) = -6 < 0$ かつ、$f(1) = 1 > 0$ だから、中間値の定理により、$f(c) = 0$ となる c が 区間 $[1, 2]$ 内にある。

Quiz 5, 2002

1. 次の極限を求めよ。

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-6}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ とすると、$f(-1) = 5,\ f(0) = 3,\ f(1) = -3,\ f(2) = -7,\ f(3) = -3,\ f(4) = 15$ を満たす。

   (a) 次の区間のうち、$f(x) = 0$ を満たす x を含むものをすべて丸で囲め。

   $$[-1, 0] \quad [0, 1] \quad [1, 2] \quad [2, 3] \quad [3, 4]$$

   (b) 区間 $[-2, -1]$ に、$f(x) = 0$ を満たす x を含むか。理由も述べよ。

3. マグニチュード 6 の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに大体相当する。マグニチュード 7.4 の地震のエネルギーはこの原子爆弾何個分に相当するか。

Quiz 5, 2002, 解答

1. 次の極限を求めよ。

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3 = 6$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(3-3)(3+1)}{(3-2)(3+3)} = 0$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-3)(x+1)} =$ 発散, or D.N.E

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x+1} = \frac{5}{4}$

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ とすると、$f(-1) = 5,\ f(0) = 3,\ f(1) = -3,\ f(2) = -7,\ f(3) = -3,\ f(4) = 15$ を満たす。

(a) 次の区間のうち、$f(x) = 0$ を満たす x（方程式 $f(x) = 0$ の解とか根といいます）を含むものをすべて丸で囲め。

$$[-1, 0] \quad [0, 1] \quad [1, 2] \quad [2, 3] \quad [3, 4]$$

解：[0,1] と [3,4]: $f(0) > 0$ かつ $f(1) < 0$ より、区間 $[0, 1]$ に $f(x) = 0$ となる x が必ずある。同様に、$f(3) > 0$ かつ $f(4) < 0$ より、区間 $[0, 1]$ に $f(x) = 0$ となる x が必ずある。他の区間にないことは分かるのでしょうか。二つの説明が考えられます。$f(x)$ は 3 次多項式で x^3 の係数は $1 > 0$ ですから、x が $-\infty$ の方へ向かうと、$f(x)$ は $-\infty$ になります。$f(-1) > 0$ ですから -1 より小さい x で $f(x) = 0$ となるものも必ずあります。$f(x) = 0$ を満たす x は多くても 3 個で、すでに上の区間で二つ見つけてありますから、もう一つ $x < -1$ となるものですべてであることが分かります。一般には上の情報だけで、他の区間に解がないかどうかは、普通は決められません。解があることはいえますが。二つ目の方法は、次の問題を使い、$[-2, -1]$ に解がありますから、それですべて、すなわち他の区間にはないことが分かります。

(b) 区間 $[-2, -1]$ に、$f(x) = 0$ を満たす x を含むか。理由も述べよ。

解：多項式 $f(x)$ は連続。さらに、$f(-2) = -8 - 8 + 10 + 3 = -3 < 0$ かつ $f(-1) = 5 > 0$ なので、中間値の定理 Proposition 6.3 により $f(c) = 0$ となる c で $-2 < c < -1$ を満たすものが存在する。これが求めるものである。

3. マグニチュード 6 の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに大体相当する。マグニチュード 7.4 の地震のエネルギーはこの原子爆弾何個分に相当するか。

解：マグニチュードの値が 1 増えるごとにエネルギーは 32 倍になる。この場合は、1.4 増えているから

$$32^{7.4-6} = 32^{1.4} = (2^5)^{7/5} = 2^{5\cdot(7/5)} = 2^7 = 128$$

したがって、128 個分に相当する。

Quiz 5, 2001

1. $f(x)$ を $f(1) = -2,\ f(2) = 2,\ f(3) = 14,\ f(4) = 40$ を満たす多項式とする。以下の問題で答えを簡単にする必要はない。

(a) 次数が 3 の多項式 $g(x)$ で $g(1) = 1, g(2) = g(3) = g(4) = 0$ となるものを一つ書け。

(b) 次数が 3 以下としたとき $f(x)$ を一つ書け。

(c) 次数が丁度 4 としたとき $f(x)$ を一つ書け。

2. $a_1 = 2,\ a_2 = -3/2,\ a_3 = 9/8,\ a_4 = -27/32$ を満たす等比数列 $\{a_i\}$ を考える。
   (a) a_{11} はいくつか。
   (b) $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11}$ はいくつか。
   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ はいくつか。

3. 次の極限を求めよ。
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{n^3}$
   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n-n^2}{n^2+2}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to-3} \frac{x^3+27}{x^2+2x-3}$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos(x+\pi)\sin x}{2x}$

Quiz 6, 2005

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)
   (a) $y = -2x^3 + x^2 - 5x + 1$
   (b) $y = (x^2 - x + 1)(e^x + 1)$
   (c) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$
   (d) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^3} + 2\log x + 5x^{7/5}$
   (e) $y = (x^2+3)^{100}$
   (f) $y = xe^{x^2}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 2x + 1$ とする。

   $f(x)$ の導関数を求め、$x = -1, 0$ および 2 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)
   (a) $f'(x) =$
   (b) $x = -1$
   (c) $x = 0$
   (d) $x = 2$

Quiz 6, 2005, 解答

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = -2x^3 + x^2 - 5x + 1$
   $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$, $(1)' = 0$ だから、$y' = -6x^2 + 2x - 5.$

   (b) $y = (x^2 - x + 1)(e^x + 1)$
   $y' = (2x-1)(e^x+1) + (x^2 - x + 1)e^x.$　（積の微分参照）

   (c) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$
   $y' = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}.$　（商の微分参照）

   (d) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^3} + 2\log x + 5x^{7/5} = x^{1/2} - x^{-3} + 2\log x + 5x^{7/5}$
   $y' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} - (-3)x^{-4} + 2\dfrac{1}{x} + 5\cdot\dfrac{7}{5}x^{2/5} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{2}{x} + 7\sqrt[5]{x^2}$

   (e) $y = (x^2+3)^{100}$
   $y' = 100(x^2+3)^{99}(x^2+3)' = 200x(x^2+3)^{99}.$
   （合成関数の微分：$h(x) = x^2 + 3$, $g(X) = X^{100}$, $y = f(x) = g(h(x))$.）

   (f) $y = xe^{x^2}$
   $y' = x(e^{x^2})' + e^{x^2} = xe^{x^2}(x^2)' + e^{x^2} = (2x^2+1)e^{x^2}$
   （積の微分と合成関数の微分：$f(x) = e^{x^2} = g(h(x))$, $h(x) = x^2$, $g(X) = e^X$.）

2. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 2x + 1$ とする。

   $f(x)$ の導関数を求め、$x = -1, 0$ および 2 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

   (a) $f'(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

   (b) $x = -1$: $f'(-1) = 0$, $f''(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$, $f''(-1) = 0$, $f'''(x) = 12x^2 + 6x - 6$, $f'''(-1) = 0$, $f''''(x) = 24x + 6$, $f''''(-1) = -18 < 0$. 従って、$f'''(x)$ は $x = -1$ で減少かつ $f'''(-1) = 0$ だから、$f'''(x) > 0$ $(x < -1)$ かつ $f'''(x) < 0$ $(x > -1)$ だから、$f''(x)$ は $x = -1$ で増加から減少に転じる。$f''(-1) = 0$ だから $f''(x) < 0$ $(x \neq -1)$ したがって $f''(x)$ は $x = -1$ で減少で、$f'(-1) = 0$ よって、 $f'(x) > 0$ $(x < -1)$ かつ $f'(x) < 0$ $(x > -1)$。これは、$f(x)$ が $x = -1$ で 増大から減少に転じることがわかり、$x = -1$ で極大である。

   (c) $x = 0$: $f'(0) = -2 < 0$ だから $f(x)$ は $x = 0$ で減少。

   (d) $x = 2$: $f'(2) = 0$, かつ $f''(2) = 27 > 0$ だから $f'(x)$ は $x = 2$ で増加で $f'(2) = 0$ だから $f'(x)$ は $x = 2$ を境に負から正に転じる。よって $f(x)$ は $x = 2$ で減少から増大に転じるので、$x = 2$ で極小。

Quiz 6, 2004

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = x^7 - 2x^3 + 5$

   (b) $y = (x^3 - 2x + 1)e^x$

   (c) $y = \dfrac{1}{1 + e^x}$

   (d) $y = \dfrac{x - 2}{x^2 + 1}$

2. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 3$ の導関数は $f'(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ である。$x = -2, 0$ および 1 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

   (a) $x = -2$

   (b) $x = 0$

   (c) $x = 1$

Quiz 6, 2004, 解答

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = x^7 - 2x^3 + 5$. 解：$y' = 7x^6 - 6x^2$.

   (b) $y = (x^3 - 2x + 1)e^x$, 解：$y' = (x^3 - 2x + 1)'e^x + (x^3 - 2x + 1)(e^x)' = (3x^2 - 2)e^x + (x^3 - 2x + 1)e^x = (x^3 + 3x^2 - 2x - 1)e^x$.

   (c) $y = \dfrac{1}{1 + e^x}$
   解：
   $$y' = \frac{(1)'(1 + e^x) - 1(1 + e^x)'}{(1 + e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

   (d) $y = \dfrac{x - 2}{x^2 + 1}$
   解：
   $$y' = \frac{(x - 2)'(x^2 + 1) - (x - 2)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x(x - 2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

2. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 3$ の導関数は $f'(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ である。$x = -2, 0$ および 1 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

   (a) $x = -2$: 極大

(b) $x = 0$: 減少

(c) $x = 1$: 極小

$f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$, $f'''(x) = 12x^2 - 6x - 6$, $f''''(x) = 24x - 6$ だから、$f'(-2) = 0$, $f''(-2) = -27 < 0$, $f'(0) = -2 < 0$, $f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0$, $f''''(1) = 18 > 0$.

x		-2		0		1	
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	減少	$\searrow$	極小	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$
	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$
$f''(x)$	$-$	-27	$-$		$+$	0	$+$
					$\searrow$		$\nearrow$
$f'''(x)$					$-$	0	$+$
						$\nearrow$	
$f''''(x)$						$+18$	

Quiz 6, 2003

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ とする。

   (a) $f(x)$ の $x = 2$ における微分係数 $f'(2)$ を定義にしたがって求めよ。途中の計算 (または説明) も書くこと。(Show work!)
   $f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$

   (b) $f(x) = a_3(x-3)^3 + a_2(x-3)^2 + a_1(x-3) + a_0$ (a_3, a_2, a_1, a_0 は数) と書く時、a_3, a_2, a_1, a_0 の中で、$f(3)$ はどれか、$f'(3)$ はどれか。また、$f'(3)$ の値を求めよ。(Solution only.)

2. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = x^{100} - 50x + 1$

   (b) $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$

   (c) $y = (2x^2 + x + 1)(x^3 + 3x + 6)$

   (d) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$

Quiz 6, 2003, 解答

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ とする。

(a) $f(x)$ の $x=2$ における微分係数 $f'(2)$ を定義にしたがって求めよ。途中の計算 (または説明) も書くこと。(Show work!)

解：左下の組み立て除法より $f(x)=x^3-2x^2+5x-3=(x^2+5)(x-2)+7$ かつ $f(2)=7$ となっているので、次の変形が得られます。

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+5x-3-f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+5)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x^2+5 = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & 5 & -3 \\ & & 2 & 0 & 10 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & \boxed{7} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & 5 & -3 \\ & & 3 & 3 & 24 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 8 & \boxed{21} \\ & & 3 & 12 & \\ \hline & 1 & 4 & \boxed{20} & \end{array}$$

(b) $f(x)=a_3(x-3)^3+a_2(x-3)^2+a_1(x-3)+a_0$ (a_3,a_2,a_1,a_0 は数) と書く時、a_3,a_2,a_1,a_0 の中で、$f(3)$ はどれか、$f'(3)$ はどれか。また、$f'(3)$ の値を求めよ。(Solution only.)

解：$f(x)=a_3(x-3)^3+a_2(x-3)^2+a_1(x-3)+a_0$ と書いてあると、$f(3)=a_0$ は明らかです。$f'(3)$ は定義に従い計算すると、

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{a_3(x-3)^3+a_2(x-3)^2+a_1(x-3)}{x-3} = a_1$$

右上の組み立て除法より、$f(3)=a_0=21$。$f'(3)=a_1=20$ となります。

2. 次の関数 $y=f(x)$ の導関数を求めよ。

(a) $y=x^{100}-50x+1$

解：$y'=(x^{100}-50x+1)'=(x^{100})'-50(x)'+(1)'=100x^{99}-50$

(b) $y=x^3-2x^2+5x-3$

解：$y'=(x^3-2x^2+5x-3)'=3x^2-4x+5$

(c) $y=(2x^2+x+1)(x^3+3x+6)$

解：解答は一番上だけで十分ですが、展開式も書いておきます。

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2+x+1)'(x^3+3x+6)+(2x^2+x+1)(x^3+3x+6)' \\ &= (4x+1)(x^3+3x+6)+(2x^2+x+1)(3x^2+3) \\ &= 10x^4+4x^3+21x^2+30x+9 \end{aligned}$$

(d) $y=\dfrac{1}{x^2+x-2}$

解：商の微分を用いると、$y'=-\dfrac{(x^2+x-2)'}{(x^2+x-2)^2}=-\dfrac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}$

Quiz 6, 2002

1. 正しければ番号を ◯ で囲み、誤っていれば × をつけよ。

   (a) $f(x)$ が $x = a$ で微分可能でかつ $x = a$ で増加していれば $f'(a) > 0$ である。

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在すれば、$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。

   (a) $y = x^3 - x$

   (b) $y = (x + 1)(x^3 - 4x)$

   (c) $y = (x^2 - 2)e^{-x}$

   (d) $y = (3x^2 + 5)^8$

3. (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ の $x = a$ における微分係数を定義にしたがって以下のように求める。この計算によって $f'(a)$ を求めよ。

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{a^2+1}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(a^2 + 1) - (x^2 + 1)}{(x - a)(x^2 + 1)(a^2 + 1)}$$

$$=$$

   (b) 上の結果を利用して $f(x)$ は $x = 1$ で増加しているか減少しているか判断せよ。理由も述べること。

Quiz 6, 2002, 解答

1. 正しければ番号を ◯ で囲み、誤っていれば × をつけよ。

   (a) $f(x)$ が $x = a$ で微分可能でかつ $x = a$ で増加していれば $f'(a) > 0$ である。
   解：×　$f(x) = x^3$ は $x = 0$ で

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{h^3 - 0}{h} = h^2 > 0 \ \text{ if } h \neq 0$$

   ですから増加していますが、$f'(0) = 0$ になっています。

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在すれば、$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
   解：◯　最初の極限は $f'(a)$ すなわち $x = a$ における微分係数でした。これが存在することは、$x = a$ で微分可能であることですが、その時は連続。すなわち 2 番目の式が成り立ちます。最初の極限が存在すると言うことは、分母が 0 になる時にも何らかの値に近づくということですから、それは分子も 0 に近づかないといけませんね。それを表していると考えても良いと思います。

2. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。

   (a) $y = x^3 - x$

   $$y' = (x^3 - x)' = (x^3)' - (x^1)' = 3x^2 - 1.$$

   (b) $y = (x+1)(x^3 - 4x)$

   $$\begin{aligned} y' &= ((x+1)(x^3-4x))' = (x+1)'(x^3-4x) + (x+1)(x^3-4x)' \\ &= x^3 - 4x + (x+1)(3x^2-4) = 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4. \end{aligned}$$

   展開してから求めることもできます。展開すると、$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$。

   (c) $y = (x^2 - 2)e^{-x}$

   $$y' = ((x^2-2)e^{-x})' = 2xe^{-x} + (x^2-2)(e^{-x})' = 2xe^{-x} + (x^2-2)e^{-x}(-1) = (2+2x-x^2)e^{-x}.$$

   (d) $y = (3x^2+5)^8$

   $$y' = ((3x^2+5)^8)' = 8(3x^2+5)^7(3x^2+5)' = 8(3x^2+5)^7(6x) = 48x(3x^2+5)^7.$$

3. (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ の $x = a$ における微分係数を定義にしたがって以下のように求める。この計算によって $f'(a)$ を求めよ。

   $$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{a^2+1}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(a^2+1)-(x^2+1)}{(x-a)(x^2+1)(a^2+1)} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{a^2-x^2}{(x-a)(x^2+1)(a^2+1)} = \lim_{x\to a} \frac{(a-x)(a+x)}{(x-a)(x^2+1)(a^2+1)} \\ &= -\lim_{x\to a} \frac{x+a}{(x^2+1)(a^2+1)} = -\frac{2a}{(a^2+1)^2} \end{aligned}$$

   (b) 上の結果を利用して $f(x)$ は $x = 1$ で増加しているか減少しているか判断せよ。理由も述べること。

   解：$f'(1) = -\dfrac{2\cdot 1}{(1^2+1)^2} = -\dfrac{1}{2} < 0$ だから $x = 1$ で減少。

Quiz 6, 2001

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。

   (a) $y = x^3 - 3x$

   (b) $y = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 15$

   (c) $y = x^2 e^{-x}$

   (d) $\sin x(1 + \cos x)$

   (e) $y = (x^2 - 3x + 1)^8$

   (f) $y = \dfrac{\sin x}{e^x}$

2. (a) 前問の (a) の関数 $y = f(x) = x^3 - 3x$ が減少している x の範囲を求めよ。

   (b) $y = f(x) = x^3 - 3x$ の $x = 3$ における接線の方程式を求めよ。接線とは、$(3, f(3))$ を通り傾きが $f'(3)$ の直線である。

Quiz 7, 2005

1. $f(x) = (x^2 + 1)^9$ の導関数を求めよ。
2. $\int (x^2 + 1)^9 dx = F(x) + C$ (C は積分定数）とするとき、$F'(x)$ を求めよ。
3. $\int x(x^2 + 1)^8 dx$ を求めよ。
4. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int (4x^3 - x^2 + 6x - 1)dx$

   (b) $\displaystyle\int (\frac{6}{x^4} + \sqrt{x})dx$

   (c) $\displaystyle\int (\frac{1}{x} + 2e^{-2x})dx$
5. $p(x), q(x), r(x), s(x)$ についての記述のうちで正しいのはどれか。簡単に理由を記せ。

   (a) $p'(x) = q(x),\ q'(x) = r(x),\ r'(x) = s(x).$

   (b) $q'(x) = p(x),\ p'(x) = s(x),\ s'(x) = r(x).$

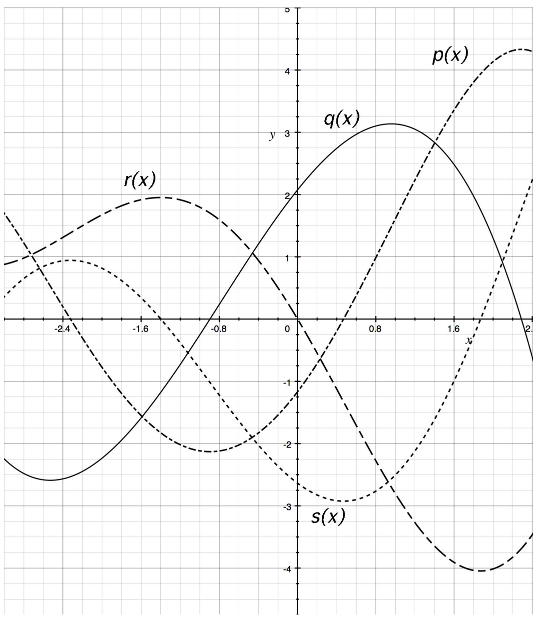
   (c) $r'(x) = s(x),\ s'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x).$

   (d) $r'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x),\ q'(x) = s(x).$

   (e) $s'(x) = r(x),\ r'(x) = q(x),\ q'(x) = p(x).$

   (f) $s'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x),\ q'(x) = s(x).$

   [理由]



Quiz 7, 2005, 解答

1. $f(x) = (x^2 + 1)^9$ の導関数を求めよ。

   解：$h(x) = x^2 + 1,\ g(X) = X^9$ とすると、$f(x) = g(h(x))$ だから、$f'(x) = g'(h(x))h'(x)$。ここで、$h'(x) = 2x,\ g'(X) = 9X^8$ だから、$f'(x) = 9(h(x))^8(2x) = 18x(x^2 + 1)^8$. となる。

2. $\int(x^2+1)^9 dx = F(x) + C$ (C は積分定数）とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

   解：不定積分の意味は、$(x^2+1)^9$ の原始関数全体をあらわすもので、$F(x)$ は原始関数の一つであった。原始関数は微分したら、$(x^2+1)^9$ になるものだったから、$F'(x) = (x^2+1)^9$。

3. $\int x(x^2+1)^8 dx$ を求めよ。

   解：微分したら、$x(x^2+1)^8$ になるもの、すなわち、$x(x^2+1)^8$ の原始関数を求めなければいけない。しかし、最初の問題から、導関数が、$18x(x^2+1)^8$ となるものは分かっている。そこで、

$$\int x(x^2+1)^8 dx = \frac{1}{18}\int 18x(x^2+1)^8 dx = \frac{1}{18}(x^2+1)^9 + C.$$

4. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int(4x^3 - x^2 + 6x - 1)dx = \frac{4}{3+1}x^{3+1} - \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{6}{1+1}x^{1+1} - x + C$
   $\displaystyle= x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - x + C.$

   (b) $\displaystyle\int(\frac{6}{x^4} + \sqrt{x})dx = \int(6x^{-4} + x^{1/2})dx = \frac{6}{-4+1}x^{-4+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$
   $\displaystyle= -2x^{-3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + C.$

   (c) $\displaystyle\int(\frac{1}{x} + 2e^{-2x})dx = \log x - e^{-2x} + C.$
   $(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$ となっていることに注意して下さい。

5. $p(x), q(x), r(x), s(x)$ についての記述のうちで正しいのはどれか。簡単に理由を記せ。

   解：(c) $r'(x) = s(x),\ s'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x).$

   [理由]

   一般に $f'(x) = g(x)$ とすると、$f(x)$ が $x = a$ で極大や極小のとき、$f'(a) = g(a) = 0$ となっている。また、$g(x) > 0$ のところでは、$f(x)$ は増加、$g(x) < 0$ のところでは、$f(x)$ は減少である。

   この考え方から、$p'(x) = q(x)$ であることが分かる。$q'(x)$ となるものはない。これで、消去法で、(c) だけが可能である。他も確かめると、たしかに、条件を満たしている。

   一つ一つの条件を丁寧に確認してみて下さい。

Quiz 7, 2004

1. $f(x) = (e^x + x + 1)^8$ を $f(x) = g(h(x))$ の形に表したい。$h(x)$ および $g(X)$ はどのように定義したら良いか。

2. $f(x) = (e^x + x + 1)^8$ の導関数を求めよ。

3. $F(x) = \int_0^x (e^t + t + 1)^8 dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

4. $\int (e^x + 1)(e^x + x + 1)^7 dx$ を求めよ。

5. 次の計算をせよ。
   (a) $\displaystyle\int (x^3 + 2x - 10)dx$
   (b) $\displaystyle\int (\frac{4}{x^5} + \sqrt{x})dx$
   (c) $\displaystyle\int (\frac{1}{x} + e^{-x})dx$
   (d) $\displaystyle\int_0^2 (e^t + 1)dt$
   (e) $\displaystyle\int_0^2 t(t^2 - 3)dt$

Quiz 7, 2004, 解答

1. $f(x) = (e^x + x + 1)^8$ を $f(x) = g(h(x))$ の形に表したい。$h(x)$ および $g(X)$ はどのように定義したら良いか。

   解：$h(x) = e^x + x + 1$, $g(X) = X^8$. これ以外にも いろいろと答えはあります。簡単なのは、$h(x) = x$, $g(X) = (e^X + X + 1)^8$。複雑なのは、たとえば $h(x) = e^x + x$, $g(X) = (X + 1)^8$。これらすべて正解。でも、このようにすると次の問題は最初から考えないといけません。

2. $f(x) = (e^x + x + 1)^8$ の導関数を求めよ。

   解:前問の表記を使うと、合成関数の微分から $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$ ここで、$g'(X) = 8X^7$, $h'(x) = e^x + 1$ だから $f'(x) = 8(h(x))^7(e^x + 1) = 8(e^x + x + 1)^7(e^x + 1)$。

3. $F(x) = \int_0^x (e^t + t + 1)^8 dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

   解：$(e^t + t + 1)^8$ の原始関数を $G(t)$ とすると、$G'(x) = (e^x + x + 1)^8$。ここで、微分積分学の基本定理より

   $$F(x) = \int_0^x (e^t + t + 1)^8 dt = G(x) - G(0),\ \text{したがって}\ F'(x) = G'(x) = (e^x + x + 1)^8.$$

4. $\int(e^x+1)(e^x+x+1)^7dx$ を求めよ。

解：2 より $f(x)=(e^x+x+1)^8$ の導関数は $f'(x)=8(e^x+1)(e^x+x+1)^7$ だから、$\frac{1}{8}(e^x+x+1)^8$ の導関数は $(e^x+1)(e^x+x+1)^7$ となる。したがって、

$$\int(e^x+1)(e^x+x+1)^7dx=\frac{1}{8}(e^x+x+1)^8+C. \quad C \text{ は積分定数。}$$

5. 次の計算をせよ。（以下で C は積分定数。）

(a) $\displaystyle\int(x^3+2x-10)dx=\frac{1}{4}x^4+x^2-10x+C.$

(b) $\displaystyle\int(\frac{4}{x^5}+\sqrt{x})dx=\int(4x^{-5}+x^{\frac{1}{2}})dx=\frac{4}{-5+1}x^{-5+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$

$\displaystyle=-x^{-4}+\frac{2}{3}x^{3/2}+C=-\frac{1}{x^4}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$

(c) $\displaystyle\int(\frac{1}{x}+e^{-x})dx=\log x-e^{-x}+C.$

(d) $\displaystyle\int_0^2(e^t+1)dt=\Big[e^x+x\Big]_0^2=e^2+2-e^0=e^2+1.$

(e) $\displaystyle\int_0^2 t(t^2-3)dt=\left[\frac{1}{4}(t^2-3)^2\right]_0^2=\frac{1}{4}((2^2-3)^2-(-3)^2)=-2.$

この場合は、$t(t^2-3)=t^3-3t$ として積分する方が簡単。

Quiz 7, 2003

1. 次のそれぞれの関数を $f(x)=g(h(x))$ の形に表したい。$f(x)$, $h(x)$ をそれぞれ与えられたようにすると、$g(X)$ は何か。また、$f'(x)$ を求めよ。

(a) $f(x)=(x^2+x+1)^{100}$, $h(x)=x^2+x+1$。

$g(X)=$

$f'(x)=$

(b) $f(x)=e^{-x^4}$, $h(x)=-x^4$。

$g(X)=$

$f'(x)=$

2. $f(x)$ の導関数は $f'(x)=x^4-5x^3+6x^2+4x-8$ であるとする。$f'(c)=0$ を満たす c は、-1 と 2 のみである。このとき、それぞれの点において $f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

(a) $x=1$

(b) $x=-1$

(c) $x=2$

Quiz 7, 2003, 解答

1. 次のそれぞれの関数を $f(x) = g(h(x))$ の形に表したい。$f(x), h(x)$ をそれぞれ与えられたようにすると、$g(X)$ は何か。また、$f'(x)$ を求めよ。

   (a) $f(x) = (x^2 + x + 1)^{100}$, $h(x) = x^2 + x + 1$。

   $g(X) = X^{100}$. このようにすると、$X = h(x) = x^2+x+1$ を $g(X)$ の X に代入することにより $f(x) = g(h(x)) = g(X) = X^{100} = (x^2 + x + 1)^{100}$ となります。$f(x)$ を合成関数といいますが、どの関数とどの関数の合成なのかを見分けないといけません。合成関数の微分は $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$ となります。$g'(h(x))$ の部分は $g(X)$ を X の関数だと思い微分し、その X に $h(x)$ を代入するというもので、この場合は、$g'(X) = 100X^{99}$ ですから $g'(h(x)) = 100(x^2+x+1)^{99}$ となります。これに、$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ をかけたものが $f'(x)$ です。この場合は、$h'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1$ ですから、$f'(x)$ は次のようになります。

   $f'(x) = 100(x^2 + x + 1)^{99}(2x + 1)$

   (b) $f(x) = e^{-x^4}$, $h(x) = -x^4$。

   $g(X) = e^X$ ですから $g'(X) = e^X$ すなわち、$g'(h(x)) = e^{-x^4}$。また、$h'(x) = -4x^3$ ですから、

   $f'(x) = e^{-x^4}(-4x^3) = -4x^3e^{-x^4}$

   合成関数の微分については、Handout を参照して下さい。例にもこれをもちいるものがあると思います。

2. $f(x)$ の導関数は $f'(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$ であるとする。$f'(c) = 0$ を満たす c は、-1 と 2 のみである。このとき、それぞれの点において $f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

   (a) $x = 1$

   解：$f'(1) = 1 - 5 + 6 + 4 - 8 = -2 < 0$ ですから $f(x)$ は $x = 1$ で減少しています。

   (b) $x = -1$

   解：問題の中にも書いてあるように、$f'(-1) = 0$ となっています。$f'(x)$ は x が $-\infty$ の方にいくと、x^4 がとても大きな正の数になりますから、$f'(x) = 0$ は $x = -1, 2$ と問題に書いてあるのを認めると、$x < -1$ では $f'(x) > 0$、$-1 < x < 2$ では、$f'(x) < 0$ であることが前問からわかります。したがって、$f(x)$ は、$x < -1$ では増加、$x > -1$ では減少に転じますから、$f(x)$ は $x = -1$ で極大となります。$f'(x)$ の符号が $x = -1, 2$ で区切られた 3 つの区間では、一定していないと中間値の定理により、$x = -1, 2$ 以外にも $f'(x)$ が $f'(x) = 0$ となる点をもつからです。$f''(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4$ ですから $f''(-1) = -4 - 15 - 12 + 4 = -27 < 0$ となり、これからも $x = -1$ で極大となることがわかります。

(c) $x = 2$

解：$f'(x)$ は x が ∞ の方へいくと $f'(x) > 0$ ですから、$-1 < x < 2$ では、$f'(x) < 0$、$2 < x$ では $f'(x) > 0$ ですから、$f(x)$ は $-1 < x < 2$ では減少、$2 < x$ では増加になります。したがって、$x = 2$ で $f(x)$ は極小となることがわかります。$f''(2) = 32 - 60 + 24 + 4 = 0$ となりますから、$f''(x)$ だけでは判定がつきません。$f'''(x) = 12x^2 - 30x + 12$, $f''''(x) = 24x - 30$ をもちいると、$f'''(2) = 48 - 60 + 12 = 0$、$f''''(2) = 48 - 30 = 12 > 0$ となっています。これより $f'''(x)$ は $x = 2$ の付近で増加。したがって $f'''(2) = 0$ より $f'''(x)$ は $x = 2$ で負から正に転じます。したがって、$f''(x)$ は $x = 2$ で減少から増加に転じます。$f''(2) = 0$ ですから、$f''(x)$ は $x = 2$ の付近では $x = 2$ を除いて正になっています。したがって、$f'(x)$ は増加しています。$f'(2) = 0$ ですから $f'(x)$ は $x = 2$ で負から正に転じます。これは、$f(x)$ が減少から増加に転じることを意味しますから、$x = 2$ で極小となります。

では、これらを表に書いてみましょう。

x		-1		1		2	
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	減少	$\searrow$	極小	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$
$f''(x)$	$-$	-27	$-$		$+$	0	$+$
					$\searrow$		$\nearrow$
$f'''(x)$					$-$	0	$+$
						$\nearrow$	
$f''''(x)$						$+18$	

この問題はすこしやさしくするために $f'(x) = 0$ は $x = -1, 2$ のみと最初から情報を提供しておきました。じつは、$f'(x) = (x + 1)(x - 2)^3$ となっています。かつ、$f'(1)$ を (a) で求めるので、何回も微分して求めるより、$f'(-2)$ や、$f'(3)$ あたりを計算するなりしたほうが、簡単になっています。すなわち、$f'(x)$ が $x < -1$ では正、$-1 < x < 2$ では 負、$2 < x$ では正がわかると、すべての答が決まってしまうからです。しかし、もし、そのような情報が与えられていなければ、$f(x) = 0$ となる x をすべて求めないかぎり、何回も微分して値が零にならないところからスタートして議論する方法が有効になります。では、何回微分してもそこでの値が零ということはあるでしょうか。それは、$f(x) = 0$ しかないことが知られています。ということは、何回微分してもよい関数の場合は、何回も微分してその点での正負を決めることは有効な方法であることがわかります。

Quiz 7, 2002 以下の問題で $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数 (すなわち $f'(x)$ をさらに微分した関数)、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の導関数 (すなわち $f''(x)$ をさらにもう一回微分した関数) を表すものとする。

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ とするとき以下の問いに答えよ。このとき、$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$ であることは用いて良い。
   (a) $f'(x) = 0$ となる x をすべて求めよ。
   (b) $f''(x)$ を求めよ。
   (c) (a) でもとめた各 x について、$f(x)$ は極大か、極小か、またはどちらでもないか判定せよ。
   (d) $-3 \leqq x \leqq 3$ で $f(x)$ の値が一番小さくなるのは x がいくつの時か。
2. $f(x) = e^{-x^2}$ が一番大きくなる時の x の値を求めよ。(a がどんな数であっても $e^a > 0$ である。)
3. 関数 $y = f(x)$ は $f'(c) = 0$、$f''(c) = 0$、$f'''(c) = -1$ を満たすとする。このとき、$x = c$ で $y = f(x)$ 増加しているか、減少しているか、極大になっているか、極小になっているか、どれでもないか。簡単に理由も書いて下さい。

Quiz 7, 2002, 解答

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ とするとき以下の問いに答えよ。このとき、$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$ であることは用いて良い。
   (a) $f'(x) = 0$ となる x をすべて求めよ。
   解：　$f'(x) = 12x(x-2)(x+1) = 0$ となるのは、$x = 0,\ x - 2 = 0$ または $x + 1 = 0$ のいずれかなので、$x = -1,\ 0,\ 2$ のいずれか。
   (b) $f''(x)$ を求めよ。
   解：　$f''(x) = (12x^3 - 12x^2 - 24x)' = 36x^2 - 24x - 24 = 12(3x^2 - 2x - 2).$
   (c) (a) でもとめた各 x について、$f(x)$ は極大か、極小か、またはどちらでもないか判定せよ。
   解：　$f''(-1) = 36 > 0$ より $x = -1$ で $f(x)$ は極小値 $f(-1) = -4$ をもつ。$f''(0) = -24 < 0$ より $x = 0$ で $f(x)$ は極大値 $f(0) = 1$ をもつ。また $f''(2) = 72 > 0$ より $x = 2$ で $f(x)$ は極小値 $f(2) = 48 - 32 - 48 + 1 = -31$ をもつ。
   (d) $-3 \leqq x \leqq 3$ で $f(x)$ の値が一番小さくなるのは x がいくつの時か。
   解：-3 から -1 までは減少し、$f(-1) = -4$、その後増大、$x = 0$ からまた減少に転じ、$x = 2$ で極小値 -31 をとり、以後増大するので、一番小さくなるのは、$x = 2$ のとき。

x		-1			0			2	
$f(x)$	↘	極小	↗	↗	極大	↘	↘	極小	↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
		↗			↘			↗	
$f''(x)$		$+$			$-$			$+$	

2. $f(x) = e^{-x^2}$ が一番大きくなる時の x の値を求めよ。(a がどんな数であっても $e^a > 0$ である。)

   解： $f'(x) = -2xe^{-x^2}$。$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2xe^{-x^2}) = (4x^2-2)e^{-x^2}$。これより $f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0$ となるのは、$x = 0$ の時のみ、このとき、$f''(0) = -2e^0 = -2 < 0$ だから、$x = 0$ で極大となり、ここで $f(x)$ は一番大きくなる。

3. 関数 $y = f(x)$ は $f'(c) = 0$、$f''(c) = 0$、$f'''(c) = -1$ を満たすとする。このとき、$x = c$ で $y = f(x)$ 増加しているか、減少しているか、極大になっているか、極小になっているか、どれでもないか。簡単に理由も書いて下さい。

   解： 減少。$f'''(c) - 1 < 0$ だから $f''(x)$ は $x = c$ で減少。$f''(c) = 0$ だから、$f''(x)$ は $x = c$ で正から負に転じる。すなわち、$f'(x)$ は $x = c$ で増加から減少に転じる。$f'(c) = 0$ だから $f'(x)$ は $x = c$ の近くでは、負。すなわち、$f(x)$ は $x = c$ で減少している。

Quiz 7, 2001 以下の問題で $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数 (すなわち $f'(x)$ をさらに微分した関数)、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の導関数 (すなわち $f''(x)$ をさらにもう一回微分した関数) を表すものとする。

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ とする。
   (a) $f''(x)$ を求めよ。 [1pt]
   (b) $f(x)$ が極大、極小をとる x の値を求め、その点で極大か極小か判定せよ。[2pt]
   (c) $-6 \leqq x \leqq 6$ で $f(x)$ の値が一番大きくなるのは x がいくつの時か。 [1pt]

2. $f(x) = x^2e^{-x}$ とする。
   (a) $f''(x)$ を求めよ。 [1pt]
   (b) $f(x)$ が極大、極小をとる x の値を求め、その点で極大か極小か判定せよ。[2pt]
   (c) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。 [1pt]

3. 関数 $y = f(x)$ は $f'(c) = 0$、$f''(c) = 0$、$f'''(c) = 1$ を満たすとする。このとき、$x = c$ で $y = f(x)$ は極大にも極小にもならないことを証明せよ。 [2pt]

Quiz 8, 2005

1. $f(x) = e^{-5x^2}$ の導関数を求めよ。

2. $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-5x^2}dx$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

3. $\displaystyle\int_0^1 x \cdot e^{-5x^2}dx$ を求めよ。

4. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(4x^3-3x^2+2x-1)dx$

   (b) $\displaystyle\int_{1}^{4}\Big(\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)dx$

   (c) $\displaystyle\int_{1}^{2}\Big(\frac{1}{x}-10e^{-5x}\Big)dx$

5. $y=f(x)$ とし、次は x 年後の日本の人口の推移を予測する一つのモデルを表す微分方程式である。

$$y'=\frac{dy}{dx}=k\cdot x\cdot y \qquad (k \text{ は定数}),\ f(0)=127,710,000.$$

   (a) この微分方程式を解き、$y=f(x)$ を求めよ。

   (b) $k=-0.0002$ として、このモデルを用いて、100 年後の人口を予測せよ。必要なら $e=2.7$ を用いよ。

Quiz 8, 2005, 解答

1. $f(x)=e^{-5x^2}$ の導関数を求めよ。

   解：$h(x)=-5x^2$, $g(X)=e^X$ とすると $f(x)=g(h(x))$ だから、

$$f'(x)=g'(h(x))h'(x)=e^{-5x^2}\cdot(-5x^2)'=-10x\cdot e^{-5x^2}.$$

2. $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-5x^2}dx$ は e^{-5x^2} の原始関数の一つだから、$F'(x)=e^{-5x^2}$。

3. $\displaystyle\int_0^1 x\cdot e^{-5x^2}dx=-\frac{1}{10}\int_0^1(-10x\cdot e^{-5x^2})dx=-\frac{1}{10}\Big[e^{-5x^2}\Big]_0^1=-\frac{1}{10}(e^{-5}-1).$

4. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(4x^3-3x^2+2x-1)dx$

$$=\Big[x^4-x^3+x^2-x\Big]_{-1}^{1}=(1-1+1-1)-(1+1+1+1)=-4.$$

   (b) $\displaystyle\int_{1}^{4}\Big(\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)dx=\int_1^4\Big(-3x^{-4}+x^{-1/2}\Big)dx$

$$=\left[\frac{-3}{-4+1}x^{-4+1}+\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-1/2+1}\right]_1^4=\left[\frac{1}{x^3}+2\sqrt{x}\right]_1^4=\frac{1}{64}+4-1-2=\frac{65}{64}.$$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \Big(\frac{1}{x} - 10e^{-5x}\Big)dx = \Big[\log x + 2e^{-5x}\Big]_1^2 = \log 2 + 2e^{-10} - 2e^{-5}$

5. $y = f(x)$ とし、次は x 年後の日本の人口の推移を予測する一つのモデルを表す微分方程式である。

$$y' = \frac{dy}{dx} = k \cdot x \cdot y \qquad (k\ \text{は定数}),\ f(0) = 127,710,000.$$

(a) この微分方程式を解き、$y = f(x)$ を求めよ。解：

$$\int \frac{1}{y}dy = \int k \cdot x dx\ \text{より}\ \log y = \frac{k}{2}x^2 + C.$$

従って、$f(x) = y = e^{kx^2/2+C}$。$f(0) = e^C$ だから $f(x) = 127710000e^{kx^2/2}$.

(b) $k = -0.0002$ として、このモデルを用いて、100 年後の人口を予測せよ。必要なら $e = 2.7$ を用いよ。

解：$x = 100$ のとき、$kx^2/2 = -0.0002 \cdot 10000/2 = -1$. だから

$$f(100) = 127710000e^{-1} \sim 127710000/2.7 = 47,300,000.$$

Quiz 8, 2003

1. $f(x) = (x^2+1)^{10}$ の導関数を求めよ。

2. $F(x) = \int_0^x (t^2+1)^{10}dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

3. $\int x(x^2+1)^9 dx$ を求めよ。

4. $g'(x) = 5x^4 + 2x + 1$、$g(1) = 4$ であるとき $g(x)$ を求めよ。

5. 次の計算をせよ。

(a) $\displaystyle\int (x^3 + 5x - 3)dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^3}dx$

(c) $\displaystyle\int (\sqrt{x} + e^x)dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 (3x^2+1)dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 (2x-3)^5 dx$

Quiz 8, 2003, 解答

1. $f(x) = (x^2+1)^{10}$ の導関数を求めよ。

   解：$g(X) = X^{10}$, $X = h(x) = x^2+1$ とすると $f(x) = g(h(x))$。$g'(X) = 10X^9$, $h'(x) = 2x$。したがって、

   $$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 10(x^2+1)^9(2x) = 20x(x^2+1)^9.$$

2. $F(x) = \int_0^x (t^2+1)^{10}dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

   解：微積分学の基本定理により、$F'(x) = (x^2+1)^{10}$ となる。

3. $\int x(x^2+1)^9 dx$ を求めよ。

   解：最初の問題で $f'(x) = 20x(x^2+1)^9$ であることに注意すると、$\frac{1}{20}(x^2+1)^{10}$ の導関数は $x(x^2+1)^9$ となることがわかる。したがって、

   $$\int x(x^2+1)^9 dx = \int (\frac{1}{20}(x^2+1)^{10})' dx = \frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + C.$$

4. $g'(x) = 5x^4+2x+1$、$g(1) = 4$ であるとき $g(x)$ を求めよ。

   解：$g(x) = x^5+x^2+x+C$ と書けるから、$4 = g(1) = 3+C$ より $C = 1$。これより、$g(x) = x^5+x^2+x+1$ を得る。

5. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int (x^3+5x-3)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + C$

   (b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^3}dx = \int 2x^{-3}dx = \frac{2}{-3+1}x^{-3+1} + C = -\frac{1}{x^2} + C$

   (c) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+e^x)dx = \int (x^{1/2}+e^x)dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1} + e^x + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + e^x + C$

   (d) $\displaystyle\int_1^2 (3x^2+1)dx = \left[x^3+x\right]_1^2 = 8+2-1-1 = 8$

   (e) $\displaystyle\int_1^2 (2x-3)^5 dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (2x-3)^5(2x-1)'dx = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{6}(2x-3)^6\right]_1^2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$

Quiz 8, 2002

1. $f(x) = (x^2+1)e^{x^2}$ の導関数を求めよ。

2. $F(x) = \int_0^x (t^2+1)e^{t^2}dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

3. $\int x(x^2+2)e^{x^2}dx$ を求めよ。

4. $g'(x) = 2x^3 - x$、$g(0) = 1$ であるとき $g(x)$ を求めよ。

5. 次の計算をせよ。

   (a) $\int (x^7 + 2x^5 - x + 1)dx$

   (b) $\int (e^x + \frac{1}{x^2})dx$

   (c) $\int (3x+2)^4 dx$

   (d) $\int_0^2 (2x - x^2)dx$

   (e) $\int_1^4 \sqrt{x}dx$

Quiz 8, 2002, 解答

1. $f(x) = (x^2+1)e^{x^2}$ の導関数を求めよ。

   解： 積の微分を使います。$g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = e^{x^2}$ とおくと、まず、$g'(x) = 2x$、さらに $h(x)$ の方は、合成関数と考えると、$(x^2)' = 2x$ ですから、$h'(x) = e^{x^2}(2x)$ となります。ここで、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = (x^2+1)'e^{x^2} + (x^2+1)(e^{x^2})' \\ &= 2xe^{x^2} + (x^2+1)e^{x^2}(2x) = 2x(x^2+2)e^{x^2}. \end{aligned}$$

2. $F(x) = \int_0^x (t^2+1)e^{t^2}dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

   解： 微分積分学の基本定理より、$F(x)$ は $(x^2+1)e^{x^2}$ の原始関数だから $F(x)$ の導関数は $F'(x) = (x^2+1)e^{x^2}$ となる.

3. $\int x(x^2+2)e^{x^2}dx$ を求めよ。

   解： 1 より、$(x^2+1)e^{x^2}$ の導関数が $2x(x^2+2)e^{x^2}$ であった。これは、$2x(x^2+2)e^{x^2}$ の原始関数が、$(x^2+1)e^{x^2}$ を表している。したがって、その $1/2$ の $x(x^2+2)e^{x^2}$ の原始関数は、$\frac{1}{2}(x^2+1)e^{x^2}$ したがって、

$$\int x(x^2+2)e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+2)e^{x^2}dx = \frac{1}{2}(x^2+1)e^{x^2} + C.$$

   以下のすべてで次の式は基本的である。

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \ \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$$

4. $g'(x) = 2x^3 - x$、$g(0) = 1$ であるとき $g(x)$ を求めよ。

   解：　微分して $2x^3 - x$ となる関数の一つが、$\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ だから、$2x^3 - x$ の原始関数である $g(x)$ は $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C$ と書ける。ここで、$g(0) = 1$ より、$C = 1$。結果として、$g(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 = \frac{1}{2}(x^4 - x^2 + 2)$ を得る。

5. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int (x^7 + 2x^5 - x + 1)dx = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$
   （注：1 の原始関数は x です。）

   (b) $\displaystyle\int (e^x + \frac{1}{x^2})dx = e^x - \frac{1}{x} + C,$

   $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ ですから $\frac{x^{-1}}{-2+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$ がこの原始関数です。

   (c) $\displaystyle\int (3x+2)^4 dx = \frac{1}{15}(3x+2)^5 + C = \frac{81}{5}x^5 + 54x^4 + 72x^3 + 48x^2 + 16x + C'$ 展開を先にするとあとに書いた答えになります。

   (d) $\displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

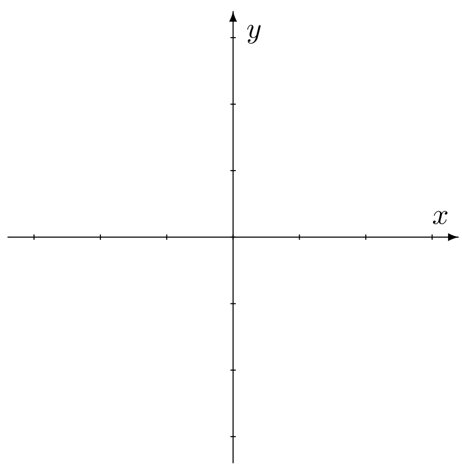
   (e) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{1/2}dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$
   （注：$4^{3/2} = ((2^2)^{1/2})^3 = 2^3 = 8$）

Quiz 8, 2001

1. $y = f(x)$ は $y' = f'(x) = 3x^2 - 1$ を満たすとする。

   (a) $f(0) = 1$ のとき $f(x)$ を求めよ。

   (b) $f(0) = 1$ を満たす $y = f(x)$ のグラフと、$f(1) = 2$ を満たすもののグラフと、$f(-1) = -1$ を満たすもののグラフをあわせて三つ描け。



2. $f(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$ が $f(1) = 1,\ f'(1) = -2,\ f''(1) = 6,\ f'''(1) = -4$ を満たす時 a, b, c, d を求めよ。$f''(x)$ は $f(x)$ を 2 回微分したもの $f'''(x)$ は 3 回微分したものである。

3. 次の不定積分を求めよ。

   (a) $\displaystyle\int\left(x^2+1+\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

   (b) $\displaystyle\int \sin(5x+1)dx$

   (c) $\displaystyle\int (3x+2)^{10}dx$

   (d) $\displaystyle\int x^2(x-1)e^{-3x}dx$ (Hint $y=x^3e^{-3x}$)

第 5 章　おわりに

5.1　線形性

このコースで学んだことから 3 つ取り上げて復習してみましょう。

A. 連立一次方程式を行列で表し、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

としたとき、解は $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ で、$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ と書けた。

B. 多項式で、$f(1) = b_1,\ f(2) = b_2,\ f(3) = b_3,\ f(4) = b_4$ となるものを考えたとき、まず一つ、

$$h(x) = b_1Q_1(x) + b_2Q_2(x) + b_3Q_3(x) + b_4Q_4(x)$$

で、条件を満たすものをかんがえ、一般的には、

$$f(x) = h(x) + g(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

と書くことができた。

C. 関数で $F'(x) = f(x)$ というものを考えると、まず一つ一般には、$G'(x) = f(x)$ とすると、

$$G(x) = F(x) + C \quad C \text{ は積分定数}$$

と書くことができた。

第6章　まとめの問題

6.1　復習問題

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。　(2pts×5)[1]

1. 集合 X の部分集合 A, B, C において常に次の式が成り立つ。

$$(A \cap B)^c \cup C = (A^c \cup C) \cap (B^c \cup C), \quad \text{ただし } Y \subset X \text{ のとき } Y^c = X \setminus Y.$$

2. A を $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が無限に存在すれば他の $\boldsymbol{b}$ についても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{x}$ は無限に存在する。

3. A を $m \times n$ 行列で $m < n$ とする。このとき、行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は常に無限個の解を持つ。

4. 関数 $f(x)$ において、$f'(c) = 0$ かつ $f''(c) = 0$ とする。このとき、$f(x)$ は $x = c$ で増加しているか減少しているか、$f(x)$ が定数関数であるかのいずれかで $x = c$ で極大や、極小になることはない。

5. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば、$2 \cdot F(x)$ も原始関数である。

II. 次の問いに答えよ。　(5pts×14)

1. $(p \Rightarrow q) \vee ((\neg r) \wedge q)$ の真理表を作れ。[2]

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -3a + b \\ a + c \end{bmatrix}$$

[1]I: ×, ×, ◯, ×, ×

[2]II-1: same as $p \Rightarrow q$, i.e., TTFFTTTT from top in standard order

3. A, B を下のような行列とすとき、積 AB および BA を求めよ。[3]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. 前問の A は可逆かどうか（逆行列をもつかどうか）判定せよ。[4]

5. 次の行列を連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。[5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = 1,\ f(2) = -2,\ f(3) = 4,\ f(4) = 12$ を満たす。$f(x)$ の次数を 3 とするとき $f(x)$ を求めよ。[6]

7. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}$ を求めよ。[7]

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ を求めよ。ただし、$e^0 = 1$ である。

9. $(3x^2 - 2)^{10}$ 導関数を求めよ。

---

[3]II-2: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,　II-3: $AB = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

[4]II-4: $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ これより可逆。

[5]II-5: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,　$x_1 = -2s + 5t - u - 2, x_2 = s, x_3 = -2t + u, x_4 = -2t + u - 5, x_5 = t, x_6 = u$

[6]II-6: $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} - 2\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 4\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 12\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$

[7]II-7:0,　II-8:$\frac{1}{2}$,　II-9: $60x(3x^2-2)^9$,　II-10:$(3x^2-2)e^{-3x^2} + (x^3 - 2x + 1)e^{-3x^2}(-6x) = (-6x^4 + 15x^2 - 6x - 2)e^{-3x^2}$

10. $(x^3-2x+1)e^{-3x^2}$ の導関数を求めよ。

11. $\displaystyle\int\left(x^2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$[8]

12. $\displaystyle\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

13. $\displaystyle\int x(3x^2-2)^9dx$[9]

14. $\displaystyle f(x)=\int_0^x\frac{e^t}{(3t^2+1)^4}dt$ の導関数。

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。 (10pts×2)

1. 下の行列 C の逆行列を求めよ。またその逆行列をもちいて、右下の連立一次方程式の解を求めよ。[10]

$$C=\begin{bmatrix}1&0&-1&-3\\1&0&-1&-2\\0&1&0&1\\0&-2&1&-4\end{bmatrix},\quad \left\{\begin{array}{ccccccc}x_1&&-x_3&-3x_4&=&1\\x_1&&-x_3&-2x_4&=&2\\&x_2&&+x_4&=&-3\\&-2x_2&+x_3&-4x_4&=&-1\end{array}\right.$$

2. $f'(x)=x^2(x-1)(x-5)=x^4-6x^3+5x^2$ かつ $f(0)=1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。また、$x=0,1,5$ におて $f(x)$ が極大か、極小か、増加しているか、減少しているかを決定せよ。[11]

---

[8] II-11:$\frac{1}{3}x^3-2\log_e|x|-\frac{1}{x}+C$, II-12: $\left[\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}\right]_1^4=\frac{20}{3}$

[9] II-13:use II-9 to find $\frac{1}{60}(3x^2-2)^{10}+C$, II-14:$e^x/(3x^2+1)^4$

[10] III-1: $C^{-1}=\begin{bmatrix}-4&5&2&1\\1&-1&1&0\\-2&2&2&1\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$, $x_1=-1,x_2=-4,x_3=-5,x_4=1,$

[11] III-2: $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3+1$, 0 で増加、1 で極大、5 で極小。

6.2　期末試験問題

6.2.1　2005 年度

Final Exam of NSIB 2005

各解答用紙に ID と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。 (5pts× 20)

I. 次の問題の解答を解答欄の決められた場所に書いて下さい。

1. 解答欄の、$(p \vee (\neg q)) \Rightarrow r$ と $(q \vee r) \wedge (p \Rightarrow r)$ の真理表を完成し、これらの命題が等値（真理値がいつも等しい）かどうか判定せよ。

2. 関数 $f(x)$ とその高階導関数（何回か微分した関数）について、以下の記述のうち、正しいものには、◯ を、誤っているものには、× を解答欄に記入せよ。ただし、$f(x)$、$f'(x)$、$f''(x)$、$f'''(x)$ は微分可能とする。

   (a) $f(x)$ が $x = c$ で増加していれば、$f'(c) \geqq 0$ である。

   (b) $f'(c) = 0$ ならば、$f(x)$ は、$x = c$ で極大または、極小となる。

   (c) $f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0$ かつ $f''''(c) < 0$ ならば、$f(x)$ は $x = c$ で極大となる。

   (d) $x = c$ で $f(x)$ が極大となれば、$f'(c) = 0$ である。

   (e) $f'(x) = 0$ がすべての x に成り立てば、$f(x)$ は定数関数である。

II. 次の計算をし、途中式もふくめ、解答欄の決められた場所に書いて下さい。(Show work!)

3. $p(x)$ は多項式で、$p(-3) = p(-1) = p(1) = 0$ かつ、$p(3) = p(5) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 6 のものを一つずつ書け。

4. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 1 = q(x)(x+1) + r = c_4(x+1)^4 + c_3(x+1)^3 + c_2(x+1)^2 + c_1(x+1) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

5. $f(x) = x^2 e^x$ とする。このとき、 $f(x)$ は、$x = 0$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

6. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$ を求めよ。

7. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 2x + 1 - e^{2x}}{x^3}$ を求めよ。ただし、$e^0 = 1$ である。

8. $\sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ の導関数を求めよ。

9. $(x^2+1)e^{2x}$ の導関数を求めよ。

10. $\displaystyle\int \left(-\frac{4}{x^5}+\frac{1}{x}-3+4x^3\right)dx$ を求めよ。

11. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ。

12. $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^5 dx$ を求めよ。

13. $\displaystyle F(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+1)e^{2t}dt$ の導関数を求めよ。

III. 次の問題の解答を解答番号とともに、解答用紙に書いて下さい。

14. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。B を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ。

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

15. 右上の行列 C は逆行列を持たないことを示せ。定理を用いるときは、定理の主張ものべること。また、$C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持たないような $\boldsymbol{b}$ を一つあげよ。

16. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2b \\ a \\ b+c \end{bmatrix}$$

17. 前問（問題 16）で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

18. 前々問（問題 16）の行列 T の逆行列を求めよ。

19. $y=f(x)$ は、次の微分方程式および、初期条件を満たすとき、$y=f(x)$ を求めよ。

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2\sqrt{x}},\quad f(1)=10e$$

20. Hamming 符号 は、2 進 4 桁の情報 (0, 1 が四つ並んだもの $\boldsymbol{a}$ に、次の行列 G を右からかけ、

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

の計算規則で求めた $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}G$ を符号としたものである。ノイズで一箇所 0 が 1 または、1 が 0 になっても、行列 H を利用することにより、ノイズが入る前の $\boldsymbol{c}$ を復元することができる。この符号に関して次の問いに答えよ。ただし、G, H を以下の行列とする。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

この符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1011011) となった。もともとの符号は何だったか。理由も記せ。

鈴木寛 ($hsuzuki@icu.ac.jp$)

NSIB FINAL 2005 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I-1.

p	q	r	$(p \lor (\neg q)) \Rightarrow r$	$(q \lor r) \land (p \Rightarrow r)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

等値かどうかの判定：

2.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

メッセージ：　数学少しは楽しめましたか。苦しんだ人もいるかな。以下のことについて書いて下さい。

(A) この授業について。改善点など何でもどうぞ。

(B) ICU の教育一般について。改善点など、ICU に関すること何でもどうぞ。

No.	PTS.
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	
16.	
17.	
18.	
19.	
20.	
Total	

II.

3. $p(x)$ は多項式で、$p(-3) = p(-1) = p(1) = 0$ かつ、$p(3) = p(5) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 6 のものを一つずつ書け。

4. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 1 = q(x)(x+1) + r = c_4(x+1)^4 + c_3(x+1)^3 + c_2(x+1)^2 + c_1(x+1) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

5. $f(x) = x^2e^x$ とする。このとき、 $f(x)$ は、$x = 0$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

6. $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^4+3x^3-2x^2-9x-5}{x^3+4x^2+5x+2}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+2x+1-e^{2x}}{x^3}$ $(e^0=1)$

8. $\sqrt{x^2+1}=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ の導関数。

9. $(x^2+1)e^{2x}$ の導関数。

10. $\displaystyle\int\left(-\frac{4}{x^5}+\frac{1}{x}-3+4x^3\right)dx$

11. $\displaystyle\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

12. $\displaystyle\int_0^1(x+1)^5dx$

13. $\displaystyle F(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+1)e^{2t}dt$ の導関数。

NSIB FINAL 2005 Solutions

I.

1. $(p \vee (\neg q)) \Rightarrow r$ と $(q \vee r) \wedge (p \Rightarrow r)$ の真理表による等値かどうかの判定。

p	q	r	$(p$	$\vee$	$(\neg$	$q))$	$\Rightarrow$	r	$(q$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$(p$	$\Rightarrow$	$r)$
T	T	T	T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F
T	F	T	T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F
F	T	T	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	F
F	F	T	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
F	F	F	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F

等値かどうかの判定：**等値**

2.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
◯	×	◯	◯	◯

II.

3. $p(x)$ は多項式で、$p(-3) = p(-1) = p(1) = 0$ かつ、$p(3) = p(5) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 6 のものを一つずつ書け。

解：次数が 4 のものを $f(x)$、次数が 6 のものを、$g(x)$ とする。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+3)(x+1)(x-1)(x-5)}{(3+3)(3+1)(3-1)(3-5)} + \frac{(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)}{(5+3)(5+1)(5-1)(5-3)} \\ g(x) &= f(x) + (x+3)(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)(cx+d) \end{aligned}$$

で、$c \neq 0$ であれば良い。

4. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 1 = q(x)(x+1) + r = c_4(x+1)^4 + c_3(x+1)^3 + c_2(x+1)^2 + c_1(x+1) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

解：$f(x) = (x^3 + 2x^2 - 4x - 5)(x+1) + 4$, $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = (x^2 + x - 5)(x+1)$, $x^2 + x - 5 = x(x+1) - 5$, $x = (x+1) - 1$ だから、$r = 4$, $c_0 = 4$, $c_1 = 0$, $c_2 = -5$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$ となる。組み立て除法を用いるとよい。

5. $f(x) = x^2 e^x$ とする。このとき、 $f(x)$ は、$x = 0$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

解:$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x$, $f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x$ よって、$f'(0) = 0$ かつ $f''(0) = 2 > 0$ である。従って、$f'(x)$ は $x = 0$ で増加、す

なわち、$x<0$ では、$f'(x)<0$、$x>0$ では $f'(x)>0$ となる。これより、$f(x)$ は $x<0$ で減少、$x>0$ で増加。すなわち、$f(x)$ は、$x=0$ で減少から、増加に転ずるので、極小。

6. $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^4+3x^3-2x^2-9x-5}{x^3+4x^2+5x+2}$

解:分子は、問題 4 の $f(x)$ を用いると、$f(x)-4$ だから、$(x+1)^2((x+1)^2-(x+1)-5)$ に等しい。また、分母も同じように分解すると、$x^3+4x^2+5x+2=(x+1)^2((x+1)+1)$ である。よって、

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-1}\frac{x^4+3x^3-2x^2-9x-5}{x^3+4x^2+5x+2}\\ =\quad&\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2((x+1)^2-(x+1)-5)}{(x+1)^2((x+1)+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2-(x+1)-5}{(x+1)+1}=-5\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x^2+2x+1-e^{2x}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{4x+2-2e^{2x}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4-4e^{2x}}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{-8e^{2x}}{6}=-\frac{4}{3}.$

0/0 の形であるので、L'Hospital の定理が使える。微分したかたちもまた、0/0 であるので、結局 3 回適応すると結果が得られる。

8. $\displaystyle(\sqrt{x^2+1})'=((x^2+1)^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

$h(x)=x^2+1,\ g(X)=X^{\frac{1}{2}}$ とすると、$f(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=g(h(x))$ と書けているから、合成関数の微分を用いて、$f'(x)=g'(h(x))h'(x)$ となる。ここで、$g'(X)=\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}$、$h'(x)=2x$ である。

9. $((x^2+1)e^{2x})'=2xe^{2x}+(x^2+1)2e^{2x}=2(x^2+x+1)e^{2x}.$

$g(x)=x^2+1$ と $h(x)=e^{2x}$ の二つの関数の積の微分だと考えて、$(g(x)h(x))'=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$ となる。$h(x)$ はそれ自身合成関数の微分を用いて、$h'(x)=2e^{2x}$ である。

10. $\displaystyle\int\left(-\frac{4}{x^5}+\frac{1}{x}-3+4x^3\right)dx=\int\left(-4x^{-5}+x^{-1}-3+4x^3\right)dx=\frac{1}{x^4}+\log x-3x+x^4+C.$

11. $\displaystyle\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=2\sqrt{x^2+1}+C.$

問題 8 を用いる。

12. $\displaystyle\int_0^1(x+1)^5dx=\left[\frac{1}{6}(x+1)^6\right]_0^1=\frac{1}{6}(2^6-1)=\frac{21}{2}.$

13. $\displaystyle F(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+1)e^{2t}dt$ の導関数は、微分積分学の基本定理により、$F(x)$ は、$(x^2+1)e^{2x}$ の原始関数のひとつだったから、$F'(x)=(x^2+1)e^{2x}$.

III.

14. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。B を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ。

$$[B \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 & b_1 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & 6 & b_2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -4 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & b_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 6 & -2b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & b_1+b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & b_4 \end{array}\right]$$

上では、$[2,1;-2]$ および $[3,1;1]$ を行ってる。これらはどちらを先にしても同じ。さらに、$[2,4]$ を行い、次に、$[1,2;-2]$, $[3,2;-2]$, $[4,2;3]$ を施すと最後の行列が得られる。あとの 3 つの基本変形はどれを先にしても同じである。

$$\to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & b_4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & b_1+b_3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 6 & -2b_1+b_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 & 4 & b_1-2b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+b_3-2b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2b_1+b_2+3b_4 \end{array}\right]$$

より、最後の列は無視して、

$$x_1 = 3s+4,\ x_2 = s,\ x_3 = -2t-2,\ x_4 = t. \qquad (s \text{ と } t \text{ はパラメタ})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

15. 右上の行列 C は逆行列を持たないことを示せ。定理を用いるときは、定理の主張ものべること。また、$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持たないような $\boldsymbol{b}$ を一つあげよ。

解：C は、B の最後の列をのぞいたものと等しい。上の変形から、$b_3 = 1, b_1 = b_2 = b_4 = 0$ とすると、最後の列は、上から順に、$0, 0, 1, 0$ となるので、三番目の方程式は、$0 = 1$ となり、解を持たない。（拡大係数行列の階数は 3、係数行列の階数は 2 だから、Theorem 2.2 からも解をもたないことがわかる。）もし、C が逆行列をもてば、$C(C^{-1}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$ となり、$\boldsymbol{x} = C^{-1}\boldsymbol{b}$ は解となり矛盾。

16. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ a \\ b+c \end{bmatrix}$$

解：

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ b+c & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b+c & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 2b & 0 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b+c & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

17. 前問（問題 16）で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

解：順に、$[3,2;1]$, $[1,2]$, $[1;2]$.

18. 前々問（問題 16）の行列 T の逆行列を求めよ。

$$[T,I] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2b \\ a \\ b+c \end{bmatrix} = T^{-1} \cdot T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

だから、問題 16 と同じように、求める方法もある。

19. $y = f(x)$ は、次の微分方程式および、初期条件を満たすとき、$y = f(x)$ を求めよ。

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad f(1) = 10e$$

解：

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx, \text{ より } \log y = \sqrt{x} + C$$

$$y = f(x) = e^{\sqrt{x}+C}, \ f(x) = 10e^{\sqrt{x}}.$$

20. Hamming 符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1011011) となった。もともとの符号は何だったか。

解：$(1011011)H = (111)$ であるが、$G \cdot H = O$ だから、ノイズが入った箇所を i 番目とすると、i 番目が 1 でそれ以外が 0 のベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を用いて、$\boldsymbol{a}G = \boldsymbol{c}$, $(1011011) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i$ だから、$(111) = (1011011)H = \boldsymbol{a}G \cdot H + \boldsymbol{e}H = \boldsymbol{e}H$ より、(111) は、H の i 行目であることがわかる。よって $i = 7$。そこを修正すると、(1011010) となる。

6.2.2　2004 年度

Final Exam of NSIB 2004

各解答用紙に ID と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。

I. 以下の問いに答えよ。 (5pts×16)

1. $p \Rightarrow (q \vee r)$ と $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$ の真理表を作り、これらの命題が等値（真理値がいつも等しい）かどうか判定せよ。

2. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるとする。この方程式の解が無限個存在し、解を表すのにパラメター 2 個が必要であるとき、a および b を求めよ。理由も述べよ。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & b \\ 0 & a & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a & b \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -15 & 6 \end{bmatrix}$$

3. 右上の行列 C はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。C を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を求めよ。

4. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ c \\ a + 2c \end{bmatrix}$$

5. 前問で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i; c]$ (i 行を c 倍), $[i, j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i, j; c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

6. $f(x) = 2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 8x + 5 = q(x)(x+2) + r = c_4(x+2)^4 + c_3(x+2)^3 + c_2(x+2)^2 + c_1(x+2) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

7. $Q(x)$ は多項式で、$Q(-5) = Q(0) = Q(5) = Q(10) = 0$ かつ、$Q(15) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 5 のものを一つずつ書け。

8. $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 2x - 4}$ を求めよ。

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1+2x}{x^2}$ を求めよ。ただし、$e^0=1$ である。

10. $\displaystyle\frac{1}{(x^2+5)^5}=(x^2+5)^{-5}$ の導関数を求めよ。

11. $(x^2+5)e^{-x}$ の導関数を求めよ。

12. $\displaystyle\int\left(5x^4+1+\frac{4}{x^5}-3\sqrt{x}\right)dx$ を求めよ。

13. $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2+5)^6}dx$ を求めよ。

14. $\displaystyle\int_0^1 10(2x+1)^4dx$ を求めよ。

15. $\displaystyle F(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+5)e^{-t}dt$ の導関数を求めよ。

16. $f'(x)$ は、関数 $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の導関数、$f''''(x)$ は $f'''(x)$ の導関数を表すものとする。$f'(c)=f''(c)=f'''(c)=0$, $f''''(c)=-5$ とするとき、$f(x)$ は $x=c$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

III. 下の問題 A, B, C の中から **2 問選択**して解答せよ。 (10pts×2)

A. 次の問いに答えよ。

1. 左下の行列 A の逆行列を求めよ。求める過程も書くこと。

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&-3&0\\1&0&2&-1\\-2&0&-2&1\end{bmatrix},\qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & +x_3 & & = & 1\\ & x_2 & -3x_3 & & = & -2\\ x_1 & & +2x_3 & -x_4 & = & -3\\ -2x_1 & & -2x_3 & +x_4 & = & 1\end{array}\right.$$

2. 前問で求めた、A の逆行列を用いて、右上の連立方程式の解を求めよ。

B. 多項式 $f(x)$ は $f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ f(3)=a_3,\ f(4)=a_4$ を満たすとする。この $f(x)$ を利用して、$g(1)=a_1,\ g(2)=a_2,\ g(3)=a_3,\ g(4)=a_4,\ g(5)=a_5$ なる条件を満たす多項式を求めたい。

1. $g(x)$ は、ある多項式 $h(x)$ を用いて、$g(x)=f(x)+h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ と書くことができることを示せ。

2. $h(x)$ が、$h(5) = (a_5 - f(5))/(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = (a_5 - f(5))/24$ を満たせば、いつでも条件を満たすことを示せ。

C. Hamming 符号 は、2 進 4 桁の情報 (0, 1 が四つ並んだもの $\boldsymbol{a}$ に、次の行列 G を右からかけ、

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

の計算規則で求めた $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}G$ を符号としたものである。ノイズで一箇所 0 が 1 または、1 が 0 になっても、行列 H を利用することにより、ノイズが入る前の $\boldsymbol{c}$ を復元することができる。この符号に関して次の問いに答えよ。ただし、G, H を以下の行列とする。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. この符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1010010) となった。もともとの符号は何だったか。
2. この符号で 1 箇所のあやまりを訂正できるのはなぜか。簡単に説明せよ。

メッセージ： 数学少しは楽しめましたか。以下のことについて余白または解答用紙の裏に書いて下さい。

(A) この授業について。改善点など何でもどうぞ。

(B) ICU の教育一般について。改善点など、ICU に関すること何でもどうぞ。

受講生の皆さんに心よりの感謝をもって。　　鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*)

NSIB FINAL 2004 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I-1.

p	q	r	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

等値かどうかの判定：

No.	**PTS.**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	
16.	
A.	
B.	
C.	
Total	

NSIB FINAL 2004 Solutions

I. 以下の問いに答えよ。 (5pts×16)

1. $p \Rightarrow (q \vee r)$ と $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$ の真理表を作り、これらの命題が等値（真理値がいつも等しい）かどうか判定せよ。

p	q	r	p	$\Rightarrow$	$(q$	$\vee$	$r)$	$(p$	$\wedge$	$(\neg$	$q))$	$\Rightarrow$	r
T	T	T	T	**T**	T	T	T	T	F	F	T	**T**	T
T	T	F	T	**T**	T	T	F	T	F	F	T	**T**	F
T	F	T	T	**T**	F	T	T	T	T	T	F	**T**	T
T	F	F	T	**F**	F	F	F	T	T	T	F	**F**	F
F	T	T	F	**T**	T	T	T	F	F	F	T	**T**	T
F	T	F	F	**T**	T	T	F	F	F	F	T	**T**	F
F	F	T	F	**T**	F	T	T	F	F	T	F	**T**	T
F	F	F	F	**T**	F	F	F	F	F	T	F	**T**	F

等値かどうかの判定：真理値がすべて等しいので等値である。よって $(p \Rightarrow (q \vee r)) \equiv ((p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r)$。これは、例えば「$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$ ならば、$x = 2$ または $x = -1$ を示すことと、$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$ かつ $x \neq 2$ ならば、$x = -1$ を示すこととは同値である」といったことです。なれてくれば、これらが等値であることは、意識せずに使えるようになりますが、それも訓練です。最初は意識した方が良いでしょう。

2. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるとする。この方程式の解が無限個存在し、解を表すのにパラメター 2 個が必要であるとき、a および b を求めよ。理由も述べよ。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & b \\ 0 & a & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a & b \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & b \\ 0 & a+2 & 0 & 0 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 & 0 \end{bmatrix}$$

解：B の表す連立一次方程式の未知数の数は 4、解を表すパラメタの数が 2 だから、係数行列の階数は 2 でそれは、拡大係数行列の階数とも等しくなければならない。B に $[3, 2; 2]$ および $[4, 2; -1]$ を施すと B' を得る。第 4 行を見ると、階数が 2 となるためには、$a + 2 = 0$。$a = -2$ を、第 3 行に代入すると、拡大係数行列の階数と、係数行列の解数が等しいことから、$1 + 2b = 0$。これは、$b = -1/2$ をえる。したがって、$a = -2, b = -1/2$ を得る。この結果にさらに、$[1, 2; 2]$ を施せば、既約ガウス行列を得、それは、題意を満たす。 ■

3. (右上の) 行列 C はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。C を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を求めよ。

解：C に $[3,1;1]$, $[4;1/3]$, $[3,2;-1]$, $[3,4]$ を順に施すと、

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -15 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -15 & 6 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

従って、解は s, t をパラメターとして以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - t + 1 \\ -3s - 2t + 3 \\ s \\ 5t + 2 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ c \\ a + 2c \end{bmatrix}$$

解：

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+2c & 1 & 0 & 2 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+2c & 1 & 0 & 2 \\ -b & 0 & -1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & -1 & 0 \\ a+2c & 1 & 0 & 2 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -b & 0 & -1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \\ a+2c & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. 前問で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

解：上の変形は順に、$[1,3;2] \to [2;-1] \to [1,2] \to [2,3]$ である。他にも、$[2,3] \to [1,3] \to [1;-1] \to [3,2;2]$, この最初の二つを $[1,3] \to [1,2] \to$ や、$[1,2] \to [2,3] \to$ に換えたもの、$[1,3;2] \to [2;-1] \to [1,3] \to [1,2]$ など、多数。

6. $f(x) = 2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 8x + 5 = q(x)(x+2) + r = c_4(x+2)^4 + c_3(x+2)^3 + c_2(x+2)^2 + c_1(x+2) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

解：

-2	2	9	6	-8	5
		-4	-10	8	0
-2	2	5	-4	0	$\boxed{5\ (r = c_0)}$
		-4	-2	12	
-2	2	1	-6	$\boxed{12\ (c_1)}$	
		-4	6		
-2	2	-3	$\boxed{0\ (c_2)}$		
		-4			
-2	2	$\boxed{-7\ (c_3)}$			
	$\boxed{2\ (c_4)}$				

これより、$q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x$, $r = 5$, $c_4 = 2$, $c_3 = -7$, $c_2 = 0$, $c_1 = 12$, $c_0 = 5$ となる。

7. $Q(x)$ は多項式で、$Q(-5) = Q(0) = Q(5) = Q(10) = 0$ かつ、$Q(15) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 5 のものを一つずつ書け。

解：

$$4\text{次} \ : \ \frac{(x+5)(x-0)(x-5)(x-10)}{(15+5)(15-0)(15-5)(15-10)} = \frac{(x+5)x(x-5)(x-10)}{15000}$$

$$5\text{次} \ : \ \frac{(x+5)(x-0)(x-5)(x-10)}{(15+5)(15-0)(15-5)(15-10)} + (x+5)x(x-5)(x-10)(x-15)$$

$$\frac{(x+5)(x-0)(x-5)(x-10)(x-14)}{(15+5)(15-0)(15-5)(15-10)}$$

5 次は、最初のものの第 2 項に零でない定数をかけたものであれば何でも構いません。5 次の 2 番目のものを書いた方も複数いましたが、なかなか賢いですね。

8. $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^3-2x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

因数分解は、組み立て除法を用いるのが一番確実で簡単だとおもいます。これも、0/0 の形ですから、L'Hospital の定理を用いて、分母・分子を微分する方法もあります。

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1+2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{-2x}+2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-2)(-2)e^{-2x}}{2}=2.$

0/0 の形ですから、L'Hospital の定理を用いることができ、分母・分子を微分しても、極限は変わりません。この場合は、微分したものがまた、0/0 の形になっていますから、($e^0=1$ に注意) もう一度、分母・分子を微分します。微分するときに、$(e^{-2x})'=e^{-2x}(-2x)'=-2\cdot e^{-2x}$ であることに注意して下さい。

10. $\displaystyle\frac{1}{(x^2+5)^5}=(x^2+5)^{-5}$ の導関数を求めよ。

$$\left(\frac{1}{(x^2+5)^5}\right)'=((x^2+5)^{-5})'=-5(x^2+5)^{-6}(x^2+5)'=-5(x^2+5)^{-6}(2x)=\frac{-10x}{(x^2+5)^6}.$$

これも合成関数の微分です。上の変形では、$h(x)=x^2+5,\ g(X)=X^{-5}$ とみて、微分しています。もちろん、商の微分を使うこともできますが、いずれにしても、合成関数の微分を利用しないといけませんので、上のようにしました。

11. $(x^2+5)e^{-x}$ の導関数を求めよ。

$$\begin{aligned}((x^2+5)e^{-x})' &= (x^2+5)'e^{-x}+(x^2+5)(e^{-x})'=2xe^{-x}+(x^2+5)e^{-x}(-x)'\\ &= 2xe^{-x}-(x^2+5)e^{-x}=-(x^2-2x+5)e^{-x}.\end{aligned}$$

12. $\displaystyle\int\left(5x^4+1+\frac{4}{x^5}-3\sqrt{x}\right)dx$ (C は積分定数)

$$\begin{aligned}&= \int(5x^4+x^0+4x^{-5}-3x^{1/2})dx\\ &= \frac{5}{4+1}x^{4+1}+\frac{1}{0+1}x^{0+1}+\frac{4}{-5+1}x^{-5+1}-\frac{3}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C\\ &= x^5+x-x^{-4}-2x^{\frac{3}{2}}+C=x^5+x-\frac{1}{x^4}-2x\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

13. $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2+5)^6}dx$ (C は積分定数)

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{10}\int\frac{-10x}{(x^2+5)^6}dx=-\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{(x^2+5)^5}\right)'dx\\ &= -\frac{1}{10}\frac{1}{(x^2+5)^5}+C=-\frac{1}{10(x^2+5)^5}+C.\end{aligned}$$

I-10 を用いた。

14. $\displaystyle\int_0^1 10(2x+1)^4 dx = \left[(2x+1)^5\right]_0^1 = 3^5 - 1^5 = 242.$

$((2x+1)^5)' = 5(2x+1)^4(2x+1)' = 10(2x+1)^4$ に注意。また、0 を代入しても、0 とはならない場合もありますから、そこも注意して下さい。

15. $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} (t^2+5)e^{-t}dt$ の導関数を求めよ。

解：微分積分学の基本定理より、$F'(x) = (x^2+5)e^{-x}$ となります。

16. $f'(x)$ は、関数 $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の導関数、$f''''(x)$ は $f'''(x)$ の導関数を表すものとする。$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0$, $f''''(c) = -5$ とするとき、$f(x)$ は $x = c$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

解：$f'''(x)$ の導関数 $f''''(x)$ は c で負の値をとるから、$f'''(x)$ は $x = c$ の付近で減少。仮定より $f'''(c) = 0$ だから、$x < c$ では $f'''(x) > 0$、$x > c$ では $f'''(x) < 0$。したがって、$f''(x)$ は $x < c$ で増加、$x > c$ で減少。$x = c$ では仮定から 0 だから、$x = c$ の付近では $x \neq c$ のとき $f''(x) < 0$ である。したがって、$f'(x)$ は $x = c$ の付近で減少している。$f'(c) = 0$ だから、$x < c$ では $f'(x) > 0$、$x > c$ では $f'(x) < 0$。これは、$f(x)$ が $x = c$ で増加から減少に転ずることを意味するから、$f(x)$ は $x = c$ で極大である。 ■

III. 下の問題 A, B, C の中から **2 問選択**して解答せよ。 (10pts×2)

A. 次の問いに答えよ。

1. 左下の行列 A の逆行列を求めよ。求める過程も書くこと。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & & +x_3 & & = & 1 \\ & x_2 & -3x_3 & & = & -2 \\ x_1 & & +2x_3 & -x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

解：$[A, I]$ を変形する。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最後の行列の右半分が A^{-1}。

2. 前問で求めた、A の逆行列を用いて、右上の連立方程式の解を求めよ。

解：$x_1 = 2,\ x_2 = -5,\ x_3 = -1,\ x_4 = 3$。下のように $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ を決めると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ だから、

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

B. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3,\ f(4) = a_4$ を満たすとする。この $f(x)$ を利用して、$g(1) = a_1,\ g(2) = a_2,\ g(3) = a_3,\ g(4) = a_4,\ g(5) = a_5$ なる条件を満たす多項式を求めたい。

1. $g(x)$ は、ある多項式 $h(x)$ を用いて、$g(x) = f(x)+h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ と書くことができることを示せ。

解：$F(x) = g(x) - f(x)$ とすると、仮定から $F(1) = g(1) - f(1) = 0$, 同様に $F(2) = F(3) = F(4) = 0$ となる。したがって、Theorem 5.1 (3) より $F(x) = h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ となる多項式 $h(x)$ が存在する。$F(x) = g(x) - f(x)$ だから $g(x) = f(x) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ と書くことができる。大切な点は、このように書けていれば、$g(1) = a_1,\ g(2) = a_2$ などとなることではなく、ここで求めているのは、この条件を満たしていれば、かならず、$g(x) = f(x) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ の形に書くことができるということです。この違いはわかりますね。

2. $h(x)$ が、$h(5) = (a_5 - f(5))/(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = (a_5 - f(5))/24$ を満たせば、いつでも条件を満たすことを示せ。

解：$h(5) = (a_5 - f(5))/24$ とすると、

$$\begin{aligned} g(5) &= f(5) + h(5)(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = f(5) + 24h(5) \\ &= f(5) + (a_5 - f(5)) = a_5 \end{aligned}$$

となる。$g(1) = a_1,\ g(2) = a_2,\ g(3) = a_3,\ g(4) = a_4$ となることは、$g(x) = f(x) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ から明らかだから、常に $g(x)$ の条件を満たす。■

C. Hamming 符号 は、2 進 4 桁の情報 (0, 1 が四つ並んだもの $\boldsymbol{a}$ に、次の行列 G を右からかけ、

$$0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1,\ 1 + 0 = 1,\ 1 + 1 = 0$$

の計算規則で求めた $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}G$ を符号としたものである。ノイズで一箇所 0 が 1 または、1 が 0 になっても、行列 H を利用することにより、ノイズが入る前の $\boldsymbol{c}$ を

復元することができる。この符号に関して次の問いに答えよ。ただし、G, H を以下の行列とする。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. この符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1010010) となった。もともとの符号は何だったか。

   解：$(1010010)H$ を計算すると、演算が $0, 1$ だけの演算であることに注意すると、(100) を得る。これは、2 進の 4 だから、4 番目にノイズが入ったと考えられるから、もともとの符号は、(1011010) となる。 ■

2. この符号で 1 箇所のあやまりを訂正できるのはなぜか。簡単に説明せよ。

   解：i 番目が 1 でそれ以外が 0 のものを $\boldsymbol{e}_i$ とする。$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ たとえば $\boldsymbol{e}_4 = (0001000)$。$\boldsymbol{c}$ にノイズが入り一箇所、例えば i 番めがかわるということは、$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i$ になるということである。$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot G$ で得られ、$G \cdot H = O$ だから、

   $$(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i)H = \boldsymbol{c} \cdot H + \boldsymbol{e}_i \cdot H = \boldsymbol{a} \cdot G \cdot H + \boldsymbol{e}_i \cdot H = \boldsymbol{a} \cdot O + \boldsymbol{e}_i \cdot H = \boldsymbol{e}_i \cdot H$$

   $\boldsymbol{e}_i H$ は H の i 行めが得られ、この場合は、2 進の i を表すから、どこにノイズが入ったかを特定することができる。

   別解として、$C = \{\boldsymbol{a} \cdot G \mid \boldsymbol{a} \in K^4\}$ の要素同士は、少なくとも 3 箇所以上異なっているので、一箇所かわっても、元の位置を特定できることを説明しても良い。ここで、K^4 は 2 進 4 桁のもの全体。

6.2.3 2003 年度

Final Exam of NSIB 2003

各解答用紙に ID と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。

以下において、$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の導関数、$f''''(x)$ は $f'''(x)$ の導関数を表すものとする。

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。 (2pts×5)

1. 論理演算に関して常に次の式が成り立つ。
$$(p \vee q) \wedge r = p \vee (q \wedge r)$$

2. A を サイズが $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ だけであれば、他の $\boldsymbol{b}$ についても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる解 $\boldsymbol{x}$ は常にただ一つである。

3. A, B にそれぞれ逆行列 C, D が存在すれば、AB の逆行列は、CD である。

4. 関数 $f(x)$ において、$f'(c) = f''(c) = 0$ かつ $f'''(c) = 3$ ならば $f(x)$ は $x = c$ で極小となる。

5. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば、$2x \cdot f(x)$ の原始関数は $F(x^2)$ である。

II. 次の問いに答えよ。 (5pts×13)

1. $((p \vee q) \wedge r) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))$ の真理表を作れ。

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。
$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - 2c \\ a \\ -c \end{bmatrix}$$
また、行列 T を左からかけることはどのような行に関する変形を施したことと同じか。$[i; c]$ (i 行を c 倍), $[i, j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i, j; c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か使う場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

3. A, B を下のような行列とすとき、A の逆行列 A^{-1} および 積 BA を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. 次の行列をある連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 1 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

5. 3 次の多項式 $Q(x)$ で、$Q(-1) = 1,\ Q(0) = Q(1) = Q(2) = 0$ を満たすものを求めよ。また、同じく 3 次の多項式 $f(x)$ で、$f(-1) = 2,\ f(0) = -1,\ f(1) = 3,\ f(2) = -6$ となるものを求めよ。

6. $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + 8}$ を求めよ。

7. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{3x^2}$ を求めよ。ただし、$e^0 = 1$ である。

8. $(2x^3 + 5)^{10}$ の導関数を求めよ。

9. $(2x + 1)e^{-x^3}$ の導関数を求めよ。

10. $\displaystyle\int \left(6x^2 + 1 + \frac{4}{x^5}\right) dx$ を求めよ。

11. $\displaystyle\int x^2(2x^3 + 5)^9 dx$ を求めよ。

12. $\displaystyle\int_0^1 (3x + 2)^4 dx$ を求めよ。

13. $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} (2t+1)e^{-t^3}\,dt$ の導関数を求めよ。

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。　(10pts×2)

1. 左下の行列 C の逆行列を、右下の行列に行に関する基本変形を行なうことにより求めよ。求める過程も書くこと。　(10pts)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad [C, I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 3 = a_4(x-2)^4 + a_3(x-2)^3 + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0$ とする。　(15pts)

   (a) a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。

   (b) $f(2),\ f'(2),\ f''(2),\ f'''(2),\ f''''(2)$ を求めよ。

   (c) $g(2) = 1,\ g'(2) = 1,\ g''(2) = 2,\ g'''(2) = 6,\ g''''(2) = 24$ となる 4 次の多項式を求めよ。

メッセージ：　以下のことについて余白または解答用紙の裏に書いて下さい。

(A) この授業について。特に改善点について。

(B) ICU の教育一般について。特に改善点について。

NSIB FINAL 2003 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I.

1.	2.	3.	4.	5.

II. 1.

p	q	r	$((p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$r)$	$\Rightarrow$	$(p$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r))$
T	T	T											
T	T	F											
T	F	T											
T	F	F											
F	T	T											
F	T	F											
F	F	T											
F	F	F											

2.

NSIB FINAL 2003 Solutions

I.

1. ×	2. ◯	3. ×	4. ×	5. ×

II. 1.

p	q	r	$((p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$r)$	$\Rightarrow$	$(p$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r))$
T	T	T	T	T	T	T	T	**T**	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	F	**T**	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T	**T**	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	F	**T**	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	**T**	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	**T**	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	F	T	**T**	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	**T**	F	F	F	F	F

2.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{ccccc} [1,2] & \to & [3;-1] & \to & [1,3;2] \\ [1,2] & \to & [1,3;-2] & \to & [3,-1],\ \text{or} \\ [3;-1] & \to & [1,2] & \to & [1,3;2],\ \text{etc.} \end{array}$$

3.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

4.

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -22 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-5t+2 \\ s \\ 2t+7 \\ 22t+1 \\ t \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 22 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2) = -\frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x) \\
f(x) &= 2\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} - 1\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} \\
&\quad + 3\cdot\frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1)(1-2)} - 6\cdot\frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)(2)(2-1)} \\
&= -\frac{1}{3}x(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2) - \frac{3}{2}(x+1)x(x-2) - (x+1)x(x-1) \\
&= -\frac{10}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{23}{6}x - 1.
\end{aligned}
$$

6.

$$
\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{x^3+8} = \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{1}{12}.
$$

7.

$$
\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{6} = \frac{1}{6}.
$$

8.

$$
((2x^3+5)^{10})' = 10(2x^3+5)^9\cdot(6x^2) = 60x^2(2x^3+5)^9.
$$

9.

$$
((2x+1)e^{-x^3})' = 2e^{-x^3} + (2x+1)e^{-x^3}(-3x^2) = (2-3x^2-6x^3)e^{-x^3}.
$$

10.

$$
\begin{aligned}
\int\left(6x^2+1+\frac{4}{x^5}\right)dx &= \int\left(6x^2+1+4x^{-5}\right)dx = \frac{6}{3}x^3 + x + \frac{4}{-5+1}x^{-5+1} + C \\
&= 2x^3 + x - x^{-4} + C = 2x^3 + x - \frac{1}{x^4} + C.
\end{aligned}
$$

11.

$$
\int x^2(2x^3+5)^9dx = \frac{1}{60}\int 60x^2(2x^3+5)^9dx = \frac{1}{60}(2x^3+5)^{10} + C.
$$

12.

$$\int_0^1 (3x+2)^4 dx = \frac{1}{3}\frac{1}{5}\left[(3x+2)^5\right]_0^1 = \frac{5^5}{15} - \frac{2^5}{15} = \frac{1031}{5}.$$

13. 微積分学の基本定理により

$$F'(x) = \left(\int_{-2}^{x} (2t+1)e^{-t^3} dt\right)' = (2x+1)e^{-x^3}.$$

III.

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a)

2	2	−3	−1	−3	3
		4	2	2	−2
2	2	1	1	−1	1
		4	10	22	
2	2	5	11	21	
		4	18		
2	2	9	29		
		4			
	2	13			

上の組み立て除法により

$$a_0 = 1,\ a_1 = 21,\ a_2 = 29,\ a_3 = 13,\ a_4 = 2.$$

(b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_4(x-2)^4 + a_3(x-2)^3 + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0,\ f(2) = a_0 = 1 \\
f'(x) &= 4\cdot a_4(x-2)^3 + 3\cdot a_3(x-2)^2 + 2\cdot a_2(x-2) + a_1,\ f'(2) = a_1 = 21 \\
f''(x) &= 4\cdot 3\cdot a_4(x-2)^2 + 3\cdot 2\cdot a_3(x-2) + 2\cdot a_2,\ f''(2) = 2\cdot a_2 = 58 \\
f'''(x) &= 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4(x-2) + 3\cdot 2\cdot a_3,\ f'''(2) = 3\cdot 2\cdot a_3 = 78 \\
f''''(x) &= 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4,\ f''''(2) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4 = 48
\end{aligned}$$

(c) 前問の計算より

$$g(x) = (x-2)^4 + (x-2)^3 + (x-2)^2 + (x-2) + 1 = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 23x + 11.$$

6.2.4 2002年度

Final Exam of NSIB 2002/3

各解答用紙に ID と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。 (2pts×5)

1. 論理演算に関して常に次の式が成り立つ。

$$\neg((p \vee q) \wedge (\neg r)) = ((\neg p) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r)$$

2. A を $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が無限に存在すれば他の $\boldsymbol{b}$ について $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる解 $\boldsymbol{x}$ がただ一つということはない。

3. A, B をともに $m \times n$ 行列でかつ、行列 B は 行列 A に行に関する基本変形を何回か施して得られるものとする。このとき、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は常に $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解である。

4. 関数 $f(x)$ において、$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0$ かつ $f''''(c) = 7$ ならば $f(x)$ は $x = c$ で極小となる。

5. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば、$2x \cdot f(x)$ の原始関数は $x^2 \cdot F(x)$ である。

II. 次の問いに答えよ。 (5pts×14)

1. $((\neg p) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r)$ の真理表を作れ。

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+c \\ 2a+b \\ a \end{bmatrix}$$

3. A, B を下のような行列とすとき、積 AB および BA を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. 前問の A は可逆かどうか（逆行列をもつかどうか）判定せよ。

5. 次の行列を連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

6. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = 1,\ f(2) = -3,\ f(3) = 2,\ f(4) = -5$ を満たす。また、$f_n = f(n),\ n = 1, 2, 3, \ldots,$ とすると、$\Delta^4 f_n = 0$ を満たすとする。このとき、$f(x)$ および f_5 を求めよ。ただし、数列 $\{g_n\}$ にたいし、$\{\Delta g_n\}$ は $\Delta g_n = g_{n+1} - g_n$ によって定義される新しい数列で Δ^4 はこのような操作を $\{f_n\}$ に 4 回繰り返したものをあらわすとする。

7. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1}$ を求めよ。

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x}$ を求めよ。ただし、$e^0 = 1$ である。

9. $\displaystyle\frac{1}{(x^3 + 8)^3}$ の導関数を求めよ。

10. $(x^2 + 1)e^{-x^2-1}$ の導関数を求めよ。

11. $\displaystyle\int \left(x^3 + 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$ を求めよ。

12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3 + 8)^4} dx$ を求めよ。

13. $\displaystyle\int_0^1 (2x - 1)^5 dx$ を求めよ。

14. $\displaystyle F(x) = \int_1^x (t^2 + 1)e^{-t^2-1} dt$ の導関数を求めよ。

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。 (10pts×2)

1. 下の行列 C の逆行列を求めよ。またその逆行列をもちいて、右下の連立一次方程式の解を求めよ。

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{rrrrcr} -x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & x_2 & -2x_3 & & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & 0 \\ & 2x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & -1 \end{array} \right.$$

2. $f(x)$ を $f'(x) = x(x+1)^3(x-2) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x$ かつ $f(0) = -2$ を満たす関数とする。このとき、
   (a) $x = -1, 0, 2$ におて $f(x)$ が極大か、極小か、増加しているか、減少しているかを決定せよ。
   (b) $f(x)$ の最小値および最小値をとるときの x の値を求めよ。

メッセージ： 以下のことについて余白または解答用紙の裏に書いて下さい。

(A) この授業について。特に改善点について。

(B) ICU の教育一般について。特に改善点について。

NSIB FINAL 2002/3 解答用紙

Division:　**ID#:**　**Name:**

I.

1.	2.	3.	4.	5.

II. 1.

p	q	r	$((\neg p)$ $\vee$ $r)$ $\wedge$ $((\neg q)$ $\vee$ $r)$
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

2.

NSIB FINAL 2002/3 Solutions

I.

1. ◯	2. ◯	3. ×	4. ◯	5. ×

解説： 1 は II-1 参照。2. 無限個ということは、係数行列の部分の階数を考えると $n-1$ 以下ですから、解が一つということはありません。3. $B = TA$ とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ から $B\boldsymbol{x} = TA\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{b}$ とはなりますが、$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とは一般にはなりません。反例をしめさないと厳密には答えになっていませんがそれは考えて下さい。簡単に例が作れるはずです。4. 実はこれが III-2 の $x = -1$ のところで起こるケースになっています。この場合は極小です。値はちょっと違いますが。5. これが間違いであることは、例えば $F(x) = x$ とすればすぐわかりますね。この場合は $f(x) = 1$ です。

II.

1. $((\neg p) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r)$ の真理表を作れ。

   右の式の値から I-1 が正しいことがわかる。

p	q	r	$((\neg p)$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$((\neg q)$	$\vee$	$r)$	$\neg$	$((p \vee q)$	$\wedge$	$(\neg r))$
T	T	T	F	T	T	**T**	F	T	T	**T**	T	F	F
T	T	F	F	F	F	**F**	F	F	F	**F**	T	T	T
T	F	T	F	T	T	**T**	T	T	T	**T**	T	F	F
T	F	F	F	F	F	**F**	T	T	F	**F**	T	T	T
F	T	T	T	T	T	**T**	F	T	T	**T**	T	F	F
F	T	F	T	T	F	**F**	F	F	F	**F**	T	T	T
F	F	T	T	T	T	**T**	T	T	T	**T**	F	F	F
F	F	F	T	T	F	**T**	T	T	F	**T**	F	F	T

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+c \\ 2a+b \\ a \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   次のように求めるのが一つの方法です。なぜこれで求まるかわかりますか。逆両列を求めた時のことを考えてみて下さい。

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -a+c & -1 & 0 & 1 \\ 2a+b & 2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 積 AB および BA を求めよ。

$$\begin{aligned}AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4+4 & 3+2-2 & 1-8-4 \\ 0+2+2 & 6+1-1 & 2-4-2 \\ 0+4+4 & -6+2-2 & -2-8-4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 3 & -11 \\ 4 & 6 & -4 \\ 8 & -6 & -14 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BA &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+6-2 & 0+3+2 & 0-3-2 \\ 2+2+8 & 4+1-8 & -4-1+8 \\ -2+2-4 & -4+1+4 & 4-1-4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 12 & -3 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

4. 前問の A は可逆かどうか（逆行列をもつかどうか）判定せよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行に関する基本変形で得られた既約ガウス行列が単位行列 I ではないから、可逆ではない。

5. 次の行列を連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s+3t-8 \\ s \\ -2t+u+1 \\ -2t+u-5 \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = 1,\ f(2) = -3,\ f(3) = 2,\ f(4) = -5$ を満たす。また、$f_n = f(n),\ n = 1, 2, 3, \ldots,$ とすると、$\Delta^4 f_n = 0$ を満たすとする。このとき、$f(x)$ および f_5 を求めよ。ただし、数列 $\{g_n\}$ にたいし、$\{\Delta g_n\}$ は $\Delta g_n = g_{n+1} - g_n$ によって定義される新しい数列で Δ^4 はこのような操作を $\{f_n\}$ に 4 回繰り返したものをあらわすとする。

解： 多項式は次のようになる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} - 3\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 2\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \\ &\quad - 5\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \\ &= -\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4) - \frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-4) \\ &\quad - \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= -\frac{7}{2}x^3 + \frac{51}{2}x^2 - 56x + 35,\ f(5) = -45. \end{aligned}$$

$g_n = \Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ とおくと、$g_1 = -4,\ g_2 = 5,\ g_3 = -7$ となります。さらに、$h_n = \Delta^2 f_n = \Delta g_n = g_{n+1} - g_n$ とおくと、$h_1 = 9,\ h_2 = -12$ となります。$i_h = \Delta^3 f_n = \Delta h_n$ は $i_1 = -21$。$0 = \Delta^4 f_n = \Delta i_n = i_{n+1} - i_n$ をつかうと、$i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = -21$ がわかります。これは、h_n が等差数列で公差が -21 であることを意味しています。これより $h_n = 9 - 21(n-1) = 30 - 21n$。さらに、

$$\begin{aligned} g_n &= (g_n - g_{n-1}) + (g_{n-1} - g_{n-2}) + \cdots + (g_2 - g_1) + g_1 \\ &= h_{n-1} + h_{n-2} + \cdots + h_2 + h_1 + g_1 \\ &= -4 + \sum_{j=1}^{n-1} 30 - 21j \ = \ -4 + 30(n-1) - 21\frac{n(n-1)}{2} \\ &= -\frac{21}{2}n^2 + \frac{81}{2}n - 34 \end{aligned}$$

これから同じようにして

$$f_n = (f_n - f_{n-1}) + (f_{n-1} - f_{n-2}) + \cdots + (f_2 - f_1) + f_1$$

$$
\begin{aligned}
&= g_{n-1} + g_{n-2} + \cdots + g_2 + g_1 + f_1 \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{21}{2} j^2 + \frac{81}{2} j - 34 \right) \\
&= 1 - \frac{21}{2} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{81}{2} \frac{n(n-1)}{2} - 34(n-1) \\
&= -\frac{7}{2} n^3 + \frac{51}{2} n^2 - 56n + 35
\end{aligned}
$$

これはあまりにも大変ですね。定理をもちいて、$\Delta^4 f_n = 0$ ならば $f(x)$ が 3 次の多項式であることがわかれば、あとは簡単です。

7. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}$

別解： 微分を使います。

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{4x^3 - 3x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{6x + 2}{12x^2 - 6x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

最初の式では、極限を考えると 0/0 の形になっています。この場合は分母・分子を微分しても同じ極限になります。2 番目の式は分母・分子を微分した式ですが、これもまた 0/0 になっています。そこでもう一度微分すると、3 番目の式が得られます。分母の極限は 0 ではありませんから、そのまま極限が計算できます。（3 番目の式は、0/0 の形ではありませんから、微分してはいけません。微分をすると全く違う答えになってしまいます。小テスト 7 の前の時間だったでしょうか、説明しましたが覚えていますか。Sample Exam for Review にはこれを使わないとできない問題が含まれていました。）

8. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x} = \frac{1-1}{1} = 0$

これは、間違って微分などしてはいけません。とても単純な問題でした。

9. $\displaystyle \frac{1}{(x^3+8)^3}$ の導関数を求めよ。

解： 合成関数の微分を使います。

$$\left(\frac{1}{(x^3+8)^3} \right)' = ((x^3+8)^{-3})' = -3(x^3+8)^{-4}(x^3+8)' = -3(x^3+8)^{-4}(3x^2) = \frac{-9x^2}{(x^3+8)^4}$$

別解： 関数の商（分数の形）の微分を用いることもできます。しかしその場合でも $(x^3+8)^3$ の微分は必要ですから、合成関数の微分を用いなくてはいけません。もち

ろんこれを展開してしまい、それをさけることもできますが。1 の微分は 0 であることに注意してください。

$$\left(\frac{1}{(x^3+8)^3}\right)' = \frac{1'(x^3+8)^3 - 1\cdot(x^3+8)^{3'}}{((x^3+8)^3)^2} = \frac{-3(x^3+8)^2(3x^2)}{(x^3+8)^6} = \frac{-9x^2}{(x^3+8)^4}$$

10. $(x^2+1)e^{-x^2-1}$ の導関数を求めよ。

解： 関数の積の微分を使います。

$$\begin{aligned}((x^2+1)e^{-x^2-1})' &= (x^2+1)'e^{-x^2-1} + (x^2+1)(e^{-x^2-1})' \\ &= 2xe^{-x^2-1} + (x^2+1)e^{-x^2-1}(-2x) = -2x^3e^{-x^2-1}\end{aligned}$$

11. $\displaystyle\int\left(x^3+1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ を求めよ。

解： $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/3}$ に注意します。

$$\int\left(x^3+1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \frac{1}{4}x^4 + x + \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^4}{4} + x + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$$

12. $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x^3+8)^4}dx$ を求めよ。

解： II-9 に注意します。

$$\int\frac{x^2}{(x^3+8)^4}dx = -\frac{1}{9}\int\frac{-9x^2}{(x^3+8)^4}dx = -\frac{1}{9}\frac{1}{(x^3+8)^3} + C = -\frac{1}{9(x^3+8)^3} + C$$

13. $\displaystyle\int_0^1(2x-1)^5dx$ を求めよ。

解： $(2x-1)^6$ の導関数はこれも合成関数の微分を用いると $((2x-1)^6)' = 6(2x-1)^5(2x-1)' = 12(2x-1)^5$ ですから、

$$\int_0^1(2x-1)^5 = \frac{1}{12}\int_0^1 12(2x-1)^5 = \frac{1}{12}\left[(2x-1)^6\right]_0^1 = \frac{1}{12}(1^6-(-1)^6) = 0$$

14. $F(x) = \int_1^x (t^2+1)e^{-t^2-1}dt$ の導関数を求めよ。

解： 微分積分学の基本定理を考えると、$F(x)$ は $(x^2+1)e^{-x^2-1}$ の原始関数の一つですから、微分するともとの関数になります。

$$F'(x) = \left(\int_1^x (t^2+1)e^{-t^2-1}dt\right)' = (x^2+1)e^{-x^2-1}$$

III.

1. 下の行列 C の逆行列を求めよ。またその逆行列をもちいて、右下の連立一次方程式の解を求めよ。

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} -x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & x_2 & -2x_3 & & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & 0 \\ & 2x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & -1 \end{cases}$$

解： まずは $[C, I]$ の形の行列を既約ガウス行列に変形します。

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

連立一次方程式の係数行列が C であることに注意すると、上の計算から、$x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. となる。

2. $f(x)$ を $f'(x) = x(x+1)^3(x-2) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x$ かつ $f(0) = -2$ を満たす関数とする。このとき、

(a) $x = -1, 0, 2$ におて $f(x)$ が極大か、極小か、増加しているか、減少しているかを決定せよ。

(b) $f(x)$ の最小値および最小値をとるときの x の値を求めよ。

解： $f'(x)$ の原始関数の一つが $f(x)$ だから

$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - x^2 + C$$

$f(0) = -2$ であることより $C = -2$ を得、

$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - x^2 - 2,\ f(-1) = -\frac{127}{60},\ f(2) = -\frac{214}{15}$$

次に二次導関数などを計算すると、

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 5x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 10x - 2,\ f''(-1) = 0,\ f''(0) = -2,\ f''(2) = 54,\\
f'''(x) &= 20x^3 + 12x^2 - 18x - 10,\ f'''(-1) = 0,\\
f''''(x) &= 60x^2 + 24x - 18,\ f''''(-1) = 18.
\end{aligned}$$

$f'(x) = x(x+1)^3(x-2) = 0$ となるのは、$x = -1, 0, 2$ のいずれか。さらに、$f''(0) = -2 < 0$ なので $f(x)$ は $x = 0$ で極大。$f''(2) = 54 > 0$ より $f(x)$ は $x = 2$ で極小となる。$x = -1$ ではさらに議論が必要だが、下のようになり、$x = -1$ でも極小。$f(-1) > f(2)$ ですから、$f(x)$ が最小となるのは、$x = 2$ のときで、最小値は $-\frac{214}{15}$ となります。最大値はありません。いくらでも大きくなります。しかし、そのことは聞いていません。

x		-1			0			2	
$f(x)$	↘	極小	↗	↗	極大	↘	↘	極小	↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
	↗		↗		↘			↗	
$f''(x)$	$+$	0	$+$		-2			54	
	↘		↗						
$f'''(x)$	$-$	0	$+$						
		↗							
$f''''(x)$		18							

6.2.5　2001 年度

数学の方法（2001 年 6 月 19 日）

Final Exam

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。 (4pts×10)

1. 集合 A, B, C において $A \subset B \cup C$ ならば $A \subset B$ または $A \subset C$ である。

2. 集合 S, T において、S^c は補集合をあらわすものとする。すなわち全体集合を X としたとき $S^c = X - S$ また $S \triangle T = (S \cup T) - (S \cap T)$ とする。A, B, C を集合とする時、$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ である。

3. A を $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が無限に存在すれば他の $\boldsymbol{b}'$ についても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ となる $\boldsymbol{x}$ は無限に存在する。

4. $n < m$ のとき、n 個の $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を未知数とする m 個の連立一次方程式が無限個解を持つことはない。

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ は逆行列をもつ。

6. $m \times n$ (m 行 n 列) の既約ガウス行列に 0 だけからなる行がなければ $m \leqq n$ である。

7. 多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ が $f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 1$ を満たせば a, b, c は一通りに決まる。

8. A, B を $n \times n$ の正方行列とする。A の逆行列を C、B の逆行列を D とすると、AB の逆行列は、 CD である。

9. 区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f'(x) = 0$ となるのは、$x = c$ のときだけでそのとき、$f''(c) < 0$ であるとする。このとき、$f(c)$ は この区間のなかの $f(x)$ の最大値である。

10. $F'(x) = e^x \sin x$、$F(0) = 1$ となる関数は存在すればただ一つである。

II. 答えのみ解答欄に記入せよ。 (6pts×10)

1. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ の真理表を作れ。このことは何を意味しているか。(注意：p, q, r の値のとり方は全部で 8 通りあります。)

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c-3a \\ b \end{bmatrix}$

3. 下のような x_1, x_2, x_3 に関する 3 個の連立一次方程式で解が無限にあるものを一組書け。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{cases}$$

4. $f(0) = 4$、$f(1) = 3$、$f(2) = -6$、$f(3) = 1$ を満たす多項式で次数が 3 以下のものを一つ求めよ。

5. 等比級数 $a_n = (-2/5)^{n-1}$ の無限和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ を求めよ。

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2-n-2}$ を求めよ。

7. $\dfrac{1}{(3x^2+1)^3}$ の $x = 1$ における微分係数を求めよ。

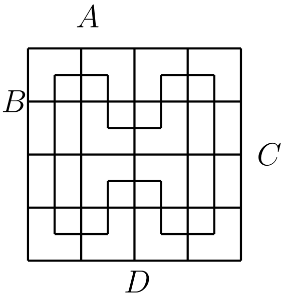
8. $(\sin x)e^{-3x^2}$ の導関数を求めよ。

9. $\displaystyle\int \sin(2-3x)dx$

10. $\displaystyle\int \frac{6x}{(3x^2+1)^4}dx$

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。　(10pts×5)

1. 右の図は、集合 A, B, C, D, H を表したものである。A は左 2 列、B は上 2 行、C は中 2 行、D は中 2 列、H は中央の H の形を下部分とする。このとき、解答欄の図の $(((A \triangle B) \triangle C) \triangle D) \triangle H$ の部分を斜線で表せ。



2. 左下の連立一次方程式の拡大係数行列に行の基本変形をして右下の行列を得た。この行列をさらに変形して既約ガウス行列を求め、この連立一次方程式の解を求めよ。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 & = & b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 & = & b_4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ。

4. $f(x) = (x-c)^2 g(x) + d$ とする。$g(c) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = c$ で極小値 d を持つことを証明せよ。(ただし、$g(x)$ は何回でも微分できる関数とする。)

5. $f'(x) = x^3(x-2)(x+2) = x^5 - 4x^3$ かつ $f(0) = 1$ を満たす関数を求め、$f(x)$ が極大、極小をとる点を求め、この関数のグラフを描け。

Final 2001 略解 **I.**

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
×	○	×	×	×	○	○	×	○	○

II.

1.

p	q	r	$((p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \Rightarrow r))$	$\Rightarrow$	$(p \Rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	T	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F
T	F	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	F	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F
F	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

4.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 3\frac{x(x-2)(x-3)}{1(1-2)(1-3)} - 6\frac{x(x-1)(x-3)}{2(2-1)(2-3)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3(3-1)(3-2)} \\ &= -\frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{3}{2}x(x-2)(x-3) + 3x(x-1)(x-3) \\ &\quad +\frac{1}{6}x(x-1)(x-2) \\ &= 4x^3 - 16x^2 + 11x + 4 \end{aligned}$$

5.

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{-2}{5}\right)} = \frac{5}{7}.$$

6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{3n^2-n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{3}.$$

7.

$$\left(\frac{1}{(3x^2+1)^3}\right)'=((3x^2{+}1)^{-3})'=-3(3x^2{+}1)^{-4}\cdot(3x^2{+}1)'=-3(3x^2{+}1)^{-4}\cdot(6x)=\frac{-18x}{(3x^2+1)^4}$$

この式に $x=1$ を代入して $-18/4^4=-9/128$ が微分係数である。

8.

$$((\sin x)e^{-3x^2})'=(\cos x)e^{-3x^2}+(\sin x)e^{-3x^2}(-3x^2)'=(\cos x-6x\sin x)e^{-3x^2}.$$

9.

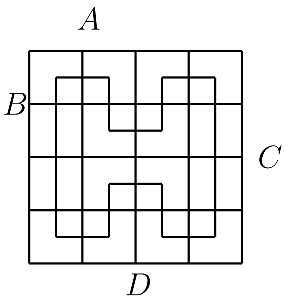
$$\int\sin(2-3x)dx=\frac{1}{3}\cos(2-3x)+C\quad(C\text{ は定数})$$

10.

$$\int\frac{6x}{(3x^2+1)^4}dx=\int(3x^2{+}1)'(3x^2{+}1)^{-4}dx=-\frac{1}{3}(3x^2{+}1)^{-3}{+}C=-\frac{1}{3(3x^2+1)^3}{+}C\quad(C\text{ は定数})$$

III.

1.



左下の L 字形のブロックを斜線でぬりあとはすべて市松模様 (like Checker Board) に塗ったものが正解。

2.

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0&3&4\\0&1&3&0&2&5\\0&0&0&1&0&3\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\0\\3\\0\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}-2\\-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}-3\\-2\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix}-1&-3&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\-2&-4&0&1\end{bmatrix}$$

4.
$f(x) = (x-c)^2g(x)+d$ としたとき $f'(x) = 2(x-c)g(x)+(x-c)^2g'(x)$、$f''(x) = 2g(x)+4(x-c)g'(x)+(x-c)^2g''(x)$ だから $f(c)=d$、$f'(c)=0$ かつ $f''(c)=2g(c)>0$ である。したがって $f(x)$ は $x=c$ で極小値 d を持つ。

[別解] $f(c)=d$ でかつ $g(c)>0$ だから c の近くでは $g(x)>0$ 従って x が c の近くで c とは等しくないとすると $f(x)=(x-c)^2g(x)+d>d=f(c)$ だから $f(x)$ は $x=c$ で極小値 d を持つ。

5.
$f(x)$ の導関数が ($f(x)$ を微分すると) $f'(x) = x^5-4x^3$ だから $f(x) = \frac{x^6}{6}-x^4+C$ と書ける。$f(0) = 1$ が仮定にあるから、$C = 1$ を得る。従って、$f(x) = \frac{x^6}{6}-x^4+1$、$f'(x) = x^5-4x^3 = x^3(x+2)(x-2)$、$f''(x) = 5x^4-12x^2 = x^2(5x^2-12)$、$f'''(x) = 20x^3-24x = 4x(5x^2-6)$、$f''''(x)=60x^2-24$ である。これより $f'(x)=0$ となるのは、$x=-2,0,2$ の 3 点である。$f''(-2)=f''(2)=32>0$ だから $f(x)$ は $x=-2,\ 2$ で極小値をとる。$x=0$ については $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$ で $f''''(0)=-24<0$ だから、それぞれの増減をしらべると $f(x)$ は $x=0$ で極大値をとることが分かる。グラフは滑らかな W 字型で中央の頂点の座標は $(0,1)$ である。[グラフなどは略]

付 録A　このコースを楽しんで下さった受講生へ

感謝　この文章を読んで下さる方がいらっしゃると嬉しいですね。題名が、「この授業を楽しんで下さった方へ」ですから。他のコースを教えていたときに同じようなタイトルでメッセージを書きました。なるべく重複は避けようと思います。(「数学の構造」この授業を楽しんで下さった方へ 参照)

最近本を読んでいましたら数学者の弥永昌吉先生が数学教育には「派手」なものと「地味」なものがあると書いておられました。その定義とは少し違いますが、現在の国際基督教大学の一般教育科目の数学の授業は２種類あり、「数学の世界」と「数学の方法」となっています。数学の世界に触れるのが前者で、数学の楽しさ、高校までの数学とはちょっと違った数学に触れることが目的ですが、この授業は、どちらかと言うと地味な物です。楽しんでばかりはいられない、数学です。感想に、皆さん、難しい、難しいと書いていました。私の授業が未熟だったことはこの難しさの半分の責任を負っていると思います。しかしともかく、これから数学を使って行く、またはさらに深く学んで行くときには基本となる、集合と論理・線形代数・微分積分をテーマに取り上げました。ここでは、網羅的にはせず、しかし基本的な問題に絞ってそれぞれであつかういくつかのトピックを扱いました。これらに関する本は沢山出ていますが、何を目的にするかによって大分変わって来ます。私もこの授業の準備のために１０冊程度は手元においていろいろと見てみましたが、アイディアは多少もらいましたが、どれもあまり気に入りませんでした。高校の教科書も大分勉強しました。結局、次のステップとしてそれぞれの分野を直接勉強して欲しいと思います。

次のステップ　線形代数：NSMa100 線形代数学 I (Linear Algebra I) : 行列と、行列式、連立一次方程式が中心です。 J が秋学期、E は春学期です。

微分積分：NSMa106 初等微分積分 (Elementary Calculus)、NSMa103 微分積分学 I (Calculus I)：高校で数学 III を学んだ人は、微分積分学 I J (春学期)、学んでいない人は、初等微分積分 J (春学期) となっています。また、秋学期には、微分積分学 I E が開講されています。これは、９月生を想定して開講していますので、背景が多様な受講生がいますから、高校で数学 III を履修していても、履修していなくても問題ありません。このあとも線形代数は、線形代数学 II、III と続きます。微分積分は、微分積分学 II、III、解析概論 I、II となります。アメリカの経済学の大学院の教科書を見ましたらこれら全てのものの内容を使っていました。しかし、必要になってから勉強する方が動機付がはっきりしていてよく勉強できる意味もあります。そこで私のおすすめは、べつに経済学に限らず、

社会科学系の勉強をして行こうとする方は、最初に書いたIのレベルのものをまず勉強してみるのをおすすめします。経済を勉強する人はそれに加えて、微分積分学IIまで履修する。あとは必要になったり、ミクロ経済学や、計量経済学を深く勉強しようとしたり、外国の大学院に留学するようなときに勉強するのが良いでしょう。もちろん、それらを履修して面白くなったら是非どんどん勉強して欲しいですが。皆さんが線形代数学Iを履修することは何も問題がありませんが、たとえ数学の方法を履修しても、高校で数学IIIを履修していない場合は、初等微分積分または 微分積分I(E) を履修するのが良いと思います。微分積分I(J) には複雑な計算がたくさんでてきてちょっと難しいかも知れません。これら以外に、専門の数学を勉強してみたい。応用より、なぜそうなるのかその理屈を理解したい、と言う方は、数学通論I、II、IIIへと進んで下さい。数学通論Iは、どうにかなるかと思いますが、II、IIIを履修するときは、微分積分I、線形代数I、IIぐらいは履修していないと難しいと思います。このような科目に興味がある人は、数学の先生に相談してみて下さい。

私は、数学だけではなく、皆さんに、理学科の基礎科目を履修してもらいたいと思います。リベラルアーツと言っていながら、自然科学を一般教育科目だけで勉強すればそれで良いのでしょうか。数学とともに、自然を学ぶことは、人間にとって、基本的だと思います。どうでしょうか。

「高校の時でさえほとんど勉強していないのに、理学科の科目なんて分かるのでしょうか。」と言われる方もいるかも知れませんが、安心して下さい。ご存知のように、高校での数学の必修はごくわずか、理科には必修科目はありません。それを想定して、理学科では、カリキュラムが組んであります。確かに高校でその科目を勉強して来たことを仮定しているものもありますが、そうでないものもたくさんあります。自分の分野に生かしたい人だけでなく、リベラルアーツの一部として、是非、数学、自然科学を学んで下さい。理学科の基礎科目を履修するとき、この「数学の方法」の授業で学んだことは大きな助けとなるはずです。実際に、微分積分や線形代数を利用することとともに、論理的思考の基本は数学を通して得られることが多いですから。

下にお勧めの、特に、最初に履修すべき科目を書きます。実験・実習は、４時限で２単位、ここに挙げた数学は全て演習がついていますから、講義１時限、演習２時限で、２単位です。「しんどい授業をとるつもりはない」などという ICU 生は、いませんよね。

物理

NSPh 100 物理学入門、NSPh 101 一般物理学 I、NSPh 102 一般物理学 II：物理学入門 (冬学期) は高校で物理を全く勉強して来なかった学生向け、一般物理学 I (春学期), II (秋学期) は、高校で物理を勉強して来たか、または、物理学入門を受講した学生向けで、I は、力学、II は、電磁気学。I を飛ばして、II を履修しても構いません。

NSPh 150 物理学基礎実験、NSPh 151 一般物理学実験 I : 物理学実験です。物理を続けて勉強したい人には、 一般物理学実験 I (春学期) を勧めていますが、高校で物理を勉強して来たかどうかは、関係ありません。(物理学基礎実験：冬学期)

化学

NSCh 100 基礎化学 I : 高校で化学を勉強したことを仮定していません。(秋学期)

NSCh 150 基礎化学実験 I ：化学実験です。高校で化学を勉強したことを仮定していま

せん。(春学期)

生物学

NSBi 100 生物学入門、NSBi 101 基礎生物学：生物学入門 (春学期) は、高校で生物を勉強して来なかった学生向け、基礎生物学 (冬学期) は、高校で生物を勉強して来た学生向けです。

NSBi 150 基礎生物学実習：生物学実習です。高校で生物を勉強したことを仮定していません。(春学期)

情報科学

NSCo 100 情報科学概論、NSCO 110 コンピュータ基礎：情報科学概論 (春学期) では、情報科学を実践的側面と理論的側面から学び、コンピュータ基礎 (秋学期) では、コンピュータの構成と働きの基礎理論を学びます。

NSCO 150 情報科学基礎実験：コンピュータ実習です。(春・秋学期) これ以外に、専攻科目の NSGe200-1 一般地質学 I-II (春学期、秋学期)、NS210 天文学 (秋学期)、NSBi 213 生態学 (秋学期) も高校で何を学んで来たかに関係せず受講できる科目です。ぜひ、チャレンジして下さい。

２００２年度追記　２００３年度春学期の数学通論 I（集合と代数系）は私が教えることになっています。以前から教えたかったのですが、何故か機会がありませんでした。ということは、初めて。いまから楽しみにしています。数学を学んでいくスタートのコースです。わたしが教えるコースはすべて大変ですが、これもよび知識を必要としません。例で線形代数のことが出て来るかもしれませんが、知らなくても問題ありません。どなたか挑戦してみませんか。水曜日５・６・７ですが、５が講義、６・７が演習です。演習がとても大切です。

関連図書

[1] *http://www.google.com/help/refinesearch.html*

[2] *http://www.googleguide.com/*

[3] 「GOOGLE HACKS – プロが使うテクニック& ツール 100 選」 Tara Calishain, Rael Dornfest, DJ Adams 著、山名早人監訳、田中裕子訳、オライリー・ジャパン.（ISBN4-87311-136-6, 2003.8.20）

[4] 「GOOGLE ポケットガイド」Tara Calishain, Rael Dornfest, DJ Adams 著、山名早人訳、オライリー・ジャパン.（ISBN4-87311-153-6, 2003.10.24）

[5] 「グーグる！」インターネットマガジン編集部編、インプレス.（ISBN4-8443-1912-4, 2004.4.1）

[6] 「文系のための線形代数の応用」 田村三郎著、現代数学社 (ISBN4-7687-0298-8, 2004.6.15）

[7] 「アメリカ流７歳からの微分積分 (こんな学び方があったのか！)」ドナルド・コーエン著、新井紀子訳 講談社 ブルーバックス (ISBN4-06-257224-9)

[8] 「文科系 一般数学」稲葉三男著 共立出版株式会社 (1965.12.1)

[9] 「大学で学ぶ数学 （慶応義塾大学 SFC での実践テキスト）」河添健編 慶応義塾大学出版会 (ISBN4-7664-0819-5, 2000.10.31)

[10] 「集合・位相入門」松坂和夫著 岩波書店 (1968.6.10)

[11] 「数学概論 （微分積分と線形代数）」南部徳盛著 近代科学社 (ISBN4-7649-1-11-X, 1989.5.10)

[12] 「詭弁論理学」野崎昭弘著 中公新書 448 (ISBN4-12-100448-5, 1976.10.25)

[13] 「逆説論理学」野崎昭弘著 中公新書 593 (1980.11.25)

[14] 「マイ数学（改訂版）」岡部恒治、栗田稔、四方義啓、野崎昭弘、服部昭、前原昭二著 遊星社 (ISBN4-7952-6861-4, 1989.5.24)

[15] 「基礎数学」岡太彬訓著 新曜社 (1977.3.15)

[16] 「やさしく学べる基礎数学（線形代数・微分積分）」石村園子著、共立出版 (ISBN4-320-01683-1, 2001.9.15)

[17] 「分数ができない大学生」岡部恒治、戸瀬信之、西村和雄編 東洋経済新報社 (ISBN4-492-22173-5, 1999.6.17)

[18] 「気がつかなかった数字の罠　論理思考力トレーニング法」マリリン・ヴォス・サヴァント (Marilyn vos Savant) 著、東方雅美訳 中央経済社 ISBN4-502-36500-9.

[19] 「新装版：集合とはなにか (はじめて学ぶ人のために)」竹内外史著、講談社 (BLUE BACKS B1332 ISBN4-06-257332-6, 2001.5.20)

参考ホームページ

- *http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/science/index-j.html*: 鈴木のホームページ

  このページのなかの「教育：主な担当授業：数学の方法」から次のホームページにたどり着きます。

- *http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/science/class/ns1b/*:「数学の方法」

- *http://w3.icu.ac.jp* の中のシラバスからもリンクが張ってあります。

これ以外に、他の一般教育科目の数学の授業のホームページとして下記の場所も参考にしてください。

http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/science/class/ns1/ns1-j.html: 「数学の構造」

この授業の主要部分は集合と論理・線形代数・微分積分です。これらについての理学科の科目の講義内容に興味がある方は以下のホームページを参考にして下さい。

http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/science/class/bcmm1/ : 「数学通論 I」
http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/science/class/linear1/ : 「線形代数学 I」
http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/science/class/calculus1/index-j.html:「微分積分学 I」