第 5 章　おわりに

5.1　線形性

このコースで学んだことから 3 つ取り上げて復習してみましょう。

A. 連立一次方程式を行列で表し、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

としたとき、解は $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ で、$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ と書けた。

B. 多項式で、$f(1) = b_1,\ f(2) = b_2,\ f(3) = b_3,\ f(4) = b_4$ となるものを考えたとき、まず一つ、

$$h(x) = b_1Q_1(x) + b_2Q_2(x) + b_3Q_3(x) + b_4Q_4(x)$$

で、条件を満たすものをかんがえ、一般的には、

$$f(x) = h(x) + g(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

と書くことができた。

C. 関数で $F'(x) = f(x)$ というものを考えると、まず一つ一般には、$G'(x) = f(x)$ とすると、

$$G(x) = F(x) + C \quad C \text{ は積分定数}$$

と書くことができた。

第6章　まとめの問題

6.1　復習問題

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。　(2pts×5)[1]

1. 集合 X の部分集合 A, B, C において常に次の式が成り立つ。

$$(A \cap B)^c \cup C = (A^c \cup C) \cap (B^c \cup C), \quad \text{ただし } Y \subset X \text{ のとき } Y^c = X \setminus Y.$$

2. A を $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が無限に存在すれば他の $\boldsymbol{b}$ についても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{x}$ は無限に存在する。

3. A を $m \times n$ 行列で $m < n$ とする。このとき、行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は常に無限個の解を持つ。

4. 関数 $f(x)$ において、$f'(c) = 0$ かつ $f''(c) = 0$ とする。このとき、$f(x)$ は $x = c$ で増加しているか減少しているか、$f(x)$ が定数関数であるかのいずれかで $x = c$ で極大や、極小になることはない。

5. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば、$2 \cdot F(x)$ も原始関数である。

II. 次の問いに答えよ。　(5pts×14)

1. $(p \Rightarrow q) \vee ((\neg r) \wedge q)$ の真理表を作れ。[2]

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -3a + b \\ a + c \end{bmatrix}$$

---

[1] I: ×, ×, ◯, ×, ×

[2] II-1: same as $p \Rightarrow q$, i.e., TTFFTTTT from top in standard order

3. A, B を下のような行列とするとき、積 AB および BA を求めよ。[3]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. 前問の A は可逆かどうか（逆行列をもつかどうか）判定せよ。[4]

5. 次の行列を連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。[5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = 1,\ f(2) = -2,\ f(3) = 4,\ f(4) = 12$ を満たす。$f(x)$ の次数を 3 とするとき $f(x)$ を求めよ。[6]

7. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}$ を求めよ。[7]

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ を求めよ。ただし、$e^0 = 1$ である。

9. $(3x^2 - 2)^{10}$ 導関数を求めよ。

---

[3]II-2: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,　II-3: $AB = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

[4]II-4: $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ これより可逆。

[5]II-5: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,　$x_1 = -2s + 5t - u - 2, x_2 = s, x_3 = -2t + u, x_4 = -2t + u - 5, x_5 = t, x_6 = u$

[6]II-6: $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} - 2\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 4\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 12\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$

[7]II-7:0,　II-8:$\frac{1}{2}$,　II-9: $60x(3x^2-2)^9$,　II-10:$(3x^2-2)e^{-3x^2} + (x^3 - 2x + 1)e^{-3x^2}(-6x) = (-6x^4 + 15x^2 - 6x - 2)e^{-3x^2}$

10. $(x^3 - 2x + 1)e^{-3x^2}$ の導関数を求めよ。

11. $\displaystyle\int \left(x^2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$[8]

12. $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

13. $\displaystyle\int x(3x^2 - 2)^9 dx$[9]

14. $\displaystyle f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{(3t^2+1)^4} dt$ の導関数。

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。 (10pts×2)

1. 下の行列 C の逆行列を求めよ。またその逆行列をもちいて、右下の連立一次方程式の解を求めよ。[10]

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & & -x_3 & -3x_4 & = & 1 \\ x_1 & & -x_3 & -2x_4 & = & 2 \\ & x_2 & & +x_4 & = & -3 \\ & -2x_2 & +x_3 & -4x_4 & = & -1 \end{array} \right.$$

2. $f'(x) = x^2(x-1)(x-5) = x^4 - 6x^3 + 5x^2$ かつ $f(0) = 1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。また、$x = 0, 1, 5$ におて $f(x)$ が極大か、極小か、増加しているか、減少しているかを決定せよ。[11]

---

[8] II-11: $\frac{1}{3}x^3 - 2\log_e|x| - \frac{1}{x} + C$, II-12: $\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2}\right]_1^4 = \frac{20}{3}$

[9] II-13:use II-9 to find $\frac{1}{60}(3x^2-2)^{10} + C$, II-14: $e^x/(3x^2+1)^4$

[10] III-1: $C^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_1 = -1, x_2 = -4, x_3 = -5, x_4 = 1,$

[11] III-2: $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 1$, 0 で増加、1 で極大、5 で極小。

6.2　期末試験問題

6.2.1　2005 年度

Final Exam of NSIB 2005

各解答用紙に **ID** と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。　(5pts× 20)

I. 次の問題の解答を解答欄の決められた場所に書いて下さい。

1. 解答欄の、$(p \vee (\neg q)) \Rightarrow r$ と $(q \vee r) \wedge (p \Rightarrow r)$ の真理表を完成し、これらの命題が等値（真理値がいつも等しい）かどうか判定せよ。

2. 関数 $f(x)$ とその高階導関数（何回か微分した関数）について、以下の記述のうち、正しいものには、◯を、誤っているものには、× を解答欄に記入せよ。ただし、$f(x)$、$f'(x)$、$f''(x)$、$f'''(x)$ は微分可能とする。

   (a) $f(x)$ が $x = c$ で増加していれば、$f'(c) \geqq 0$ である。

   (b) $f'(c) = 0$ ならば、$f(x)$ は、$x = c$ で極大または、極小となる。

   (c) $f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0$ かつ $f''''(c) < 0$ ならば、$f(x)$ は $x = c$ で極大となる。

   (d) $x = c$ で $f(x)$ が極大となれば、$f'(c) = 0$ である。

   (e) $f'(x) = 0$ がすべての x に成り立てば、$f(x)$ は定数関数である。

II. 次の計算をし、途中式もふくめ、解答欄の決められた場所に書いて下さい。(Show work!)

3. $p(x)$ は多項式で、$p(-3) = p(-1) = p(1) = 0$ かつ、$p(3) = p(5) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 6 のものを一つずつ書け。

4. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 1 = q(x)(x+1) + r = c_4(x+1)^4 + c_3(x+1)^3 + c_2(x+1)^2 + c_1(x+1) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

5. $f(x) = x^2 e^x$ とする。このとき、$f(x)$ は、$x = 0$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

6. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$ を求めよ。

7. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 2x + 1 - e^{2x}}{x^3}$ を求めよ。ただし、$e^0 = 1$ である。

8. $\sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ の導関数を求めよ。

9. $(x^2 + 1)e^{2x}$ の導関数を求めよ。

10. $\displaystyle\int \left(-\frac{4}{x^5}+\frac{1}{x}-3+4x^3\right)dx$ を求めよ。

11. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ。

12. $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^5 dx$ を求めよ。

13. $F(x)=\displaystyle\int_{-2}^{x}(t^2+1)e^{2t}dt$ の導関数を求めよ。

III. 次の問題の解答を解答番号とともに、解答用紙に書いて下さい。

14. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。B を既約ガウス行列に変形し、解 x_1,x_2,x_3,x_4 を求めよ。

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

15. 右上の行列 C は逆行列を持たないことを示せ。定理を用いるときは、定理の主張ものべること。また、$C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持たないような $\boldsymbol{b}$ を一つあげよ。

16. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2b \\ a \\ b+c \end{bmatrix}$$

17. 前問（問題 16）で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

18. 前々問（問題 16）の行列 T の逆行列を求めよ。

19. $y=f(x)$ は、次の微分方程式および、初期条件を満たすとき、$y=f(x)$ を求めよ。

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2\sqrt{x}},\quad f(1)=10e$$

20. Hamming 符号 は、2 進 4 桁の情報 (0, 1 が四つ並んだもの $\boldsymbol{a}$ に、次の行列 G を右からかけ、

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

の計算規則で求めた $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}G$ を符号としたものである。ノイズで一箇所 0 が 1 または、1 が 0 になっても、行列 H を利用することにより、ノイズが入る前の $\boldsymbol{c}$ を復元することができる。この符号に関して次の問いに答えよ。ただし、G, H を以下の行列とする。

$$G=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1 \end{bmatrix}\quad H=\begin{bmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 0&1&1\\ 1&0&0\\ 1&0&1\\ 1&1&0\\ 1&1&1 \end{bmatrix}$$

この符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1011011) となった。もともとの符号は何だったか。理由も記せ。

鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*)

NSIB FINAL 2005 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I-1.

p	q	r	$(p \vee (\neg q)) \Rightarrow r$	$(q \vee r) \wedge (p \Rightarrow r)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

等値かどうかの判定：

2.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

メッセージ：　数学少しは楽しめましたか。苦しんだ人もいるかな。以下のことについて書いて下さい。

(A) この授業について。改善点など何でもどうぞ。

(B) ICU の教育一般について。改善点など、ICU に関すること何でもどうぞ。

No.	PTS.
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	
16.	
17.	
18.	
19.	
20.	
Total	

II.

3. $p(x)$ は多項式で、$p(-3) = p(-1) = p(1) = 0$ かつ、$p(3) = p(5) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 6 のものを一つずつ書け。

4. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 1 = q(x)(x+1) + r = c_4(x+1)^4 + c_3(x+1)^3 + c_2(x+1)^2 + c_1(x+1) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

5. $f(x) = x^2e^x$ とする。このとき、 $f(x)$ は、$x = 0$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

6. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^4+3x^3-2x^2-9x-5}{x^3+4x^2+5x+2}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+2x+1-e^{2x}}{x^3}$ $(e^0=1)$

8. $\sqrt{x^2+1}=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ の導関数。

9. $(x^2+1)e^{2x}$ の導関数。

10. $\displaystyle\int\left(-\frac{4}{x^5}+\frac{1}{x}-3+4x^3\right)dx$

11. $\displaystyle\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

12. $\displaystyle\int_0^1(x+1)^5dx$

13. $\displaystyle F(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+1)e^{2t}dt$ の導関数。

NSIB FINAL 2005 Solutions

I.

1. $(p \lor (\neg q)) \Rightarrow r$ と $(q \lor r) \land (p \Rightarrow r)$ の真理表による等値かどうかの判定。

p	q	r	$(p$	$\lor$	$(\neg$	$q))$	$\Rightarrow$	r	$(q$	$\lor$	$r)$	$\land$	$(p$	$\Rightarrow$	$r)$
T	T	T	T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F
T	F	T	T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F
F	T	T	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	F
F	F	T	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
F	F	F	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F

等値かどうかの判定：等値

2.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
○	×	○	○	○

II.

3. $p(x)$ は多項式で、$p(-3) = p(-1) = p(1) = 0$ かつ、$p(3) = p(5) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 6 のものを一つずつ書け。

解：次数が 4 のものを $f(x)$、次数が 6 のものを、$g(x)$ とする。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+3)(x+1)(x-1)(x-5)}{(3+3)(3+1)(3-1)(3-5)} + \frac{(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)}{(5+3)(5+1)(5-1)(5-3)} \\ g(x) &= f(x) + (x+3)(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)(cx+d) \end{aligned}$$

で、$c \neq 0$ であれば良い。

4. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 1 = q(x)(x+1) + r = c_4(x+1)^4 + c_3(x+1)^3 + c_2(x+1)^2 + c_1(x+1) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

解：$f(x) = (x^3 + 2x^2 - 4x - 5)(x+1) + 4$, $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = (x^2 + x - 5)(x+1)$, $x^2 + x - 5 = x(x+1) - 5$, $x = (x+1) - 1$ だから、$r = 4$, $c_0 = 4$, $c_1 = 0$, $c_2 = -5$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$ となる。組み立て除法を用いるとよい。

5. $f(x) = x^2 e^x$ とする。このとき、 $f(x)$ は、$x = 0$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

解:$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x$, $f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x$ よって、$f'(0) = 0$ かつ $f''(0) = 2 > 0$ である。従って、$f'(x)$ は $x = 0$ で増加、す

なわち、$x < 0$ では、$f'(x) < 0$、$x > 0$ では $f'(x) > 0$ となる。これより、$f(x)$ は $x < 0$ で減少、$x > 0$ で増加。すなわち、$f(x)$ は、$x = 0$ で減少から、増加に転ずるので、極小。

6. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^4+3x^3-2x^2-9x-5}{x^3+4x^2+5x+2}$

解：分子は、問題 4 の $f(x)$ を用いると、$f(x)-4$ だから、$(x+1)^2((x+1)^2-(x+1)-5)$ に等しい。また、分母も同じように分解すると、$x^3+4x^2+5x+2 = (x+1)^2((x+1)+1)$ である。よって、

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to -1} \frac{x^4+3x^3-2x^2-9x-5}{x^3+4x^2+5x+2}\\ &= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2((x+1)^2-(x+1)-5)}{(x+1)^2((x+1)+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2-(x+1)-5}{(x+1)+1} = -5\end{aligned}$$

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2+2x+1-e^{2x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{4x+2-2e^{2x}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{4-4e^{2x}}{6x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-8e^{2x}}{6} = -\dfrac{4}{3}.$

0/0 の形であるので、L'Hospital の定理が使える。微分したかたちもまた、0/0 であるので、結局 3 回適応すると結果が得られる。

8. $(\sqrt{x^2+1})' = ((x^2+1)^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

$h(x) = x^2+1, g(X) = X^{\frac{1}{2}}$ とすると、$f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = g(h(x))$ と書けているから、合成関数の微分を用いて、$f'(x) = g'(h(x))h'(x)$ となる。ここで、$g'(X) = \frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}$、$h'(x) = 2x$ である。

9. $((x^2+1)e^{2x})' = 2xe^{2x} + (x^2+1)2e^{2x} = 2(x^2+x+1)e^{2x}.$

$g(x) = x^2+1$ と $h(x) = e^{2x}$ の二つの関数の積の微分だと考えて、$(g(x)h(x))' = g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$ となる。$h(x)$ はそれ自身合成関数の微分を用いて、$h'(x) = 2e^{2x}$ である。

10. $\displaystyle\int \left(-\frac{4}{x^5} + \frac{1}{x} - 3 + 4x^3\right) dx = \int \left(-4x^{-5} + x^{-1} - 3 + 4x^3\right) dx = \frac{1}{x^4} + \log x - 3x + x^4 + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = 2\sqrt{x^2+1} + C.$

問題 8 を用いる。

12. $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^5 dx = \left[\frac{1}{6}(x+1)^6\right]_0^1 = \frac{1}{6}(2^6-1) = \frac{21}{2}.$

13. $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} (t^2+1)e^{2t} dt$ の導関数は、微分積分学の基本定理により、$F(x)$ は、$(x^2+1)e^{2x}$ の原始関数のひとつだったから、$F'(x) = (x^2+1)e^{2x}.$

III.

14. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。B を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ。

$$[B \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 & b_1 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & 6 & b_2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -4 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & b_4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 6 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & b_4 \end{array}\right]$$

上では、$[2, 1; -2]$ および $[3, 1; 1]$ を行ってる。これらはどちらを先にしても同じ。さらに、$[2, 4]$ を行い、次に、$[1, 2; -2]$, $[3, 2; -2]$, $[4, 2; 3]$ を施すと最後の行列が得られる。あとの３つの基本変形はどれを先にしても同じである。

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & b_4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 6 & -2b_1 + b_2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 & 4 & b_1 - 2b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_3 - 2b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2b_1 + b_2 + 3b_4 \end{array}\right]$$

より、最後の列は無視して、

$$x_1 = 3s + 4,\ x_2 = s,\ x_3 = -2t - 2,\ x_4 = t. \qquad (s \text{ と } t \text{ はパラメタ})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

15. 右上の行列 C は逆行列を持たないことを示せ。定理を用いるときは、定理の主張ものべること。また、$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持たないような $\boldsymbol{b}$ を一つあげよ。

解：C は、B の最後の列をのぞいたものと等しい。上の変形から、$b_3 = 1, b_1 = b_2 = b_4 = 0$ とすると、最後の列は、上から順に、$0, 0, 1, 0$ となるので、三番目の方程式は、$0 = 1$ となり、解を持たない。（拡大係数行列の階数は 3、係数行列の階数は 2 だから、Theorem 2.2 からも解をもたないことがわかる。）もし、C が逆行列をもてば、$C(C^{-1}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$ となり、$\boldsymbol{x} = C^{-1}\boldsymbol{b}$ は解となり矛盾。

16. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ a \\ b + c \end{bmatrix}$$

解：

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ b+c & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b+c & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 2b & 0 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b+c & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

17. 前問（問題 16）で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

解：順に、$[3,2;1]$, $[1,2]$, $[1;2]$.

18. 前々問（問題 16）の行列 T の逆行列を求めよ。

$$[T,I] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2b \\ a \\ b+c \end{bmatrix} = T^{-1} \cdot T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

だから、問題 16 と同じように、求める方法もある。

19. $y = f(x)$ は、次の微分方程式および、初期条件を満たすとき、$y = f(x)$ を求めよ。

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad f(1) = 10e$$

解：

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx, \text{ より } \log y = \sqrt{x} + C$$

$$y = f(x) = e^{\sqrt{x}+C}, \ f(x) = 10e^{\sqrt{x}}.$$

20. Hamming 符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1011011) となった。もともとの符号は何だったか。

解：$(1011011)H = (111)$ であるが、$G \cdot H = O$ だから、ノイズが入った箇所を i 番目とすると、i 番目が 1 でそれ以外が 0 のベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を用いて、$\boldsymbol{a}G = \boldsymbol{c}$, $(1011011) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i$ だから、$(111) = (1011011)H = \boldsymbol{a}G \cdot H + \boldsymbol{e}H = \boldsymbol{e}H$ より、(111) は、H の i 行目であることがわかる。よって $i = 7$。そこを修正すると、(1011010) となる。

6.2.2　2004 年度

Final Exam of NSIB 2004

各解答用紙に **ID** と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。

I. 以下の問いに答えよ。 (5pts×16)

1. $p \Rightarrow (q \vee r)$ と $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$ の真理表を作り、これらの命題が等値（真理値がいつも等しい）かどうか判定せよ。

2. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるとする。この方程式の解が無限個存在し、解を表すのにパラメター 2 個が必要であるとき、a および b を求めよ。理由も述べよ。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & b \\ 0 & a & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a & b \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -15 & 6 \end{bmatrix}$$

3. 右上の行列 C はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。C を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を求めよ。

4. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ c \\ a+2c \end{bmatrix}$$

5. 前問で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

6. $f(x) = 2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 8x + 5 = q(x)(x+2) + r = c_4(x+2)^4 + c_3(x+2)^3 + c_2(x+2)^2 + c_1(x+2) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

7. $Q(x)$ は多項式で、$Q(-5) = Q(0) = Q(5) = Q(10) = 0$ かつ、$Q(15) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 5 のものを一つずつ書け。

8. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 2x - 4}$ を求めよ。

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1+2x}{x^2}$ を求めよ。ただし、$e^0=1$ である。

10. $\dfrac{1}{(x^2+5)^5}=(x^2+5)^{-5}$ の導関数を求めよ。

11. $(x^2+5)e^{-x}$ の導関数を求めよ。

12. $\displaystyle\int\left(5x^4+1+\frac{4}{x^5}-3\sqrt{x}\right)dx$ を求めよ。

13. $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2+5)^6}dx$ を求めよ。

14. $\displaystyle\int_0^1 10(2x+1)^4dx$ を求めよ。

15. $\displaystyle F(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+5)e^{-t}dt$ の導関数を求めよ。

16. $f'(x)$ は、関数 $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の導関数、$f''''(x)$ は $f'''(x)$ の導関数を表すものとする。$f'(c)=f''(c)=f'''(c)=0$, $f''''(c)=-5$ とするとき、$f(x)$ は $x=c$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

III. 下の問題 A, B, C の中から **2** 問選択して解答せよ。　(10pts×2)

A.　次の問いに答えよ。

1. 左下の行列 A の逆行列を求めよ。求める過程も書くこと。

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&-3&0\\1&0&2&-1\\-2&0&-2&1\end{bmatrix},\qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr}x_1&&+x_3&&=&1\\&x_2&-3x_3&&=&-2\\x_1&&+2x_3&-x_4&=&-3\\-2x_1&&-2x_3&+x_4&=&1\end{array}\right.$$

2. 前問で求めた、A の逆行列を用いて、右上の連立方程式の解を求めよ。

B.　多項式 $f(x)$ は $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, $f(3)=a_3$, $f(4)=a_4$ を満たすとする。この $f(x)$ を利用して、$g(1)=a_1$, $g(2)=a_2$, $g(3)=a_3$, $g(4)=a_4$, $g(5)=a_5$ なる条件を満たす多項式を求めたい。

1. $g(x)$ は、ある多項式 $h(x)$ を用いて、$g(x)=f(x)+h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ と書くことができることを示せ。

2. $h(x)$ が、$h(5) = (a_5 - f(5))/(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = (a_5 - f(5))/24$ を満たせば、いつでも条件を満たすことを示せ。

C. Hamming 符号 は、2進4桁の情報 (0, 1 が四つ並んだもの $\boldsymbol{a}$ に、次の行列 G を右からかけ、

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

の計算規則で求めた $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}G$ を符号としたものである。ノイズで一箇所 0 が 1 または、1 が 0 になっても、行列 H を利用することにより、ノイズが入る前の $\boldsymbol{c}$ を復元することができる。この符号に関して次の問いに答えよ。ただし、G, H を以下の行列とする。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. この符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1010010) となった。もともとの符号は何だったか。
2. この符号で1箇所のあやまりを訂正できるのはなぜか。簡単に説明せよ。

メッセージ： 数学少しは楽しめましたか。以下のことについて余白または解答用紙の裏に書いて下さい。

(A) この授業について。改善点など何でもどうぞ。

(B) ICU の教育一般について。改善点など、ICU に関すること何でもどうぞ。

受講生の皆さんに心よりの感謝をもって。 鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*)

NSIB FINAL 2004 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I-1.

p	q	r	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

等値かどうかの判定：

No.	**PTS.**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	
16.	
A.	
B.	
C.	
Total	

NSIB FINAL 2004 Solutions

I. 以下の問いに答えよ。 (5pts×16)

1. $p \Rightarrow (q \vee r)$ と $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$ の真理表を作り、これらの命題が等値（真理値がいつも等しい）かどうか判定せよ。

p	q	r	p	$\Rightarrow$	$(q$	$\vee$	$r)$	$(p$	$\wedge$	$(\neg$	$q))$	$\Rightarrow$	r
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F
T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T
T	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F
F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F
F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F

等値かどうかの判定：真理値がすべて等しいので等値である。よって $(p \Rightarrow (q \vee r)) \equiv ((p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r)$。これは、例えば「$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$ ならば、$x = 2$ または $x = -1$ を示すことと、$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$ かつ $x \neq 2$ ならば、$x = -1$ を示すこととは同値である」といったことです。なれてくれば、これらが等値であることは、意識せずに使えるようになりますが、それも訓練です。最初は意識した方が良いでしょう。

2. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるとする。この方程式の解が無限個存在し、解を表すのにパラメター 2 個が必要であるとき、a および b を求めよ。理由も述べよ。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & b \\ 0 & a & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a & b \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & b \\ 0 & a+2 & 0 & 0 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 & 0 \end{bmatrix}$$

解：B の表す連立一次方程式の未知数の数は 4、解を表すパラメタの数が 2 だから、係数行列の階数は 2 でそれは、拡大係数行列の階数とも等しくなければならない。B に $[3,2;2]$ および $[4,2;-1]$ を施すと B' を得る。第 4 行を見ると、階数が 2 となるためには、$a + 2 = 0$。$a = -2$ を、第 3 行に代入すると、拡大係数行列の階数と、係数行列の解数が等しいことから、$1 + 2b = 0$。これは、$b = -1/2$ をえる。したがって、$a = -2, b = -1/2$ を得る。この結果にさらに、$[1,2;2]$ を施せば、既約ガウス行列を得、それは、題意を満たす。 ■

3. (右上の) 行列 C はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。C を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を求めよ。

解：C に $[3,1;1]$, $[4;1/3]$, $[3,2;-1]$, $[3,4]$ を順に施すと、

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -15 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -15 & 6 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

従って、解は s, t をパラメターとして以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-t+1 \\ -3s-2t+3 \\ s \\ 5t+2 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ c \\ a+2c \end{bmatrix}$$

解：

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+2c & 1 & 0 & 2 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+2c & 1 & 0 & 2 \\ -b & 0 & -1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} -b & 0 & -1 & 0 \\ a+2c & 1 & 0 & 2 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -b & 0 & -1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \\ a+2c & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. 前問で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

解：上の変形は順に、$[1,3;2] \to [2;-1] \to [1,2] \to [2,3]$ である。他にも、$[2,3] \to [1,3] \to [1;-1] \to [3,2;2]$, この最初の二つを $[1,3] \to [1,2] \to$ や、$[1,2] \to [2,3] \to$ に換えたもの、$[1,3;2] \to [2;-1] \to [1,3] \to [1,2]$ など、多数。

6. $f(x) = 2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 8x + 5 = q(x)(x+2) + r = c_4(x+2)^4 + c_3(x+2)^3 + c_2(x+2)^2 + c_1(x+2) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

解：

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & 2 & 9 & 6 & -8 & 5 \\
 & & -4 & -10 & 8 & 0 \\ \hline
-2 & 2 & 5 & -4 & 0 & \boxed{5\ (r = c_0)} \\
 & & -4 & -2 & 12 & \\ \hline
-2 & 2 & 1 & -6 & \boxed{12\ (c_1)} & \\
 & & -4 & 6 & & \\ \hline
-2 & 2 & -3 & \boxed{0\ (c_2)} & & \\
 & & -4 & & & \\ \hline
-2 & 2 & \boxed{-7\ (c_3)} & & & \\
 & & & & & \\ \hline
 & \boxed{2\ (c_4)} & & & &
\end{array}
$$

これより、$q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x$, $r = 5$, $c_4 = 2$, $c_3 = -7$, $c_2 = 0$, $c_1 = 12$, $c_0 = 5$ となる。

7. $Q(x)$ は多項式で、$Q(-5) = Q(0) = Q(5) = Q(10) = 0$ かつ、$Q(15) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 5 のものを一つずつ書け。

解：

$$
\begin{aligned}
4\,次 &: \frac{(x+5)(x-0)(x-5)(x-10)}{(15+5)(15-0)(15-5)(15-10)} = \frac{(x+5)x(x-5)(x-10)}{15000} \\
5\,次 &: \frac{(x+5)(x-0)(x-5)(x-10)}{(15+5)(15-0)(15-5)(15-10)} + (x+5)x(x-5)(x-10)(x-15) \\
&\quad \frac{(x+5)(x-0)(x-5)(x-10)(x-14)}{(15+5)(15-0)(15-5)(15-10)}
\end{aligned}
$$

5 次は、最初のものの第 2 項に零でない定数をかけたものであれば何でも構いません。5 次の 2 番目のものを書いた方も複数いましたが、なかなか賢いですね。

8. $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 2x - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$

因数分解は、組み立て除法を用いるのが一番確実で簡単だとおもいます。これも、0/0 の形ですから、L'Hospital の定理を用いて、分母・分子を微分する方法もあります。

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1+2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{-2x}+2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-2)(-2)e^{-2x}}{2}=2.$

0/0 の形ですから、L'Hospital の定理を用いることができ、分母・分子を微分しても、極限は変わりません。この場合は、微分したものがまた、0/0 の形になっていますから、($e^0=1$ に注意) もう一度、分母・分子を微分します。微分するときに、$(e^{-2x})'=e^{-2x}(-2x)'=-2\cdot e^{-2x}$ であることに注意して下さい。

10. $\displaystyle\frac{1}{(x^2+5)^5}=(x^2+5)^{-5}$ の導関数を求めよ。

$$\left(\frac{1}{(x^2+5)^5}\right)'=((x^2+5)^{-5})'=-5(x^2+5)^{-6}(x^2+5)'=-5(x^2+5)^{-6}(2x)=\frac{-10x}{(x^2+5)^6}.$$

これも合成関数の微分です。上の変形では、$h(x)=x^2+5$, $g(X)=X^{-5}$ とみて、微分しています。もちろん、商の微分を使うこともできますが、いずれにしても、合成関数の微分を利用しないといけませんので、上のようにしました。

11. $(x^2+5)e^{-x}$ の導関数を求めよ。

$$\begin{aligned}((x^2+5)e^{-x})' &= (x^2+5)'e^{-x}+(x^2+5)(e^{-x})'=2xe^{-x}+(x^2+5)e^{-x}(-x)'\\ &= 2xe^{-x}-(x^2+5)e^{-x}=-(x^2-2x+5)e^{-x}.\end{aligned}$$

12. $\displaystyle\int\left(5x^4+1+\frac{4}{x^5}-3\sqrt{x}\right)dx$ (C は積分定数)

$$\begin{aligned}&= \int(5x^4+x^0+4x^{-5}-3x^{1/2})dx\\ &= \frac{5}{4+1}x^{4+1}+\frac{1}{0+1}x^{0+1}+\frac{4}{-5+1}x^{-5+1}-\frac{3}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C\\ &= x^5+x-x^{-4}-2x^{\frac{3}{2}}+C=x^5+x-\frac{1}{x^4}-2x\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

13. $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2+5)^6}dx$ (C は積分定数)

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{10}\int\frac{-10x}{(x^2+5)^6}dx=-\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{(x^2+5)^5}\right)'dx\\ &= -\frac{1}{10}\frac{1}{(x^2+5)^5}+C=-\frac{1}{10(x^2+5)^5}+C.\end{aligned}$$

I-10 を用いた。

14. $\displaystyle\int_0^1 10(2x+1)^4 dx = \left[(2x+1)^5\right]_0^1 = 3^5 - 1^5 = 242.$

$((2x+1)^5)' = 5(2x+1)^4(2x+1)' = 10(2x+1)^4$ に注意。また、0 を代入しても、0 とはならない場合もありますから、そこも注意して下さい。

15. $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} (t^2+5)e^{-t} dt$ の導関数を求めよ。

解：微分積分学の基本定理より、$F'(x) = (x^2+5)e^{-x}$ となります。

16. $f'(x)$ は、関数 $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の導関数、$f''''(x)$ は $f'''(x)$ の導関数を表すものとする。$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0$, $f''''(c) = -5$ とするとき、$f(x)$ は $x = c$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

解：$f'''(x)$ の導関数 $f''''(x)$ は c で負の値をとるから、$f'''(x)$ は $x = c$ の付近で減少。仮定より $f'''(c) = 0$ だから、$x < c$ では $f'''(x) > 0$、$x > c$ では $f'''(x) < 0$。したがって、$f''(x)$ は $x < c$ で増加、$x > c$ で減少。$x = c$ では仮定から 0 だから、$x = c$ の付近では $x \neq c$ のとき $f''(x) < 0$ である。したがって、$f'(x)$ は $x = c$ の付近で減少している。$f'(c) = 0$ だから、$x < c$ では $f'(x) > 0$、$x > c$ では $f'(x) < 0$。これは、$f(x)$ が $x = c$ で増加から減少に転ずることを意味するから、$f(x)$ は $x = c$ で極大である。 ■

III. 下の問題 A, B, C の中から **2** 問選択して解答せよ。 (10pts×2)

A. 次の問いに答えよ。

1. 左下の行列 A の逆行列を求めよ。求める過程も書くこと。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & & +x_3 & & = & 1 \\ & x_2 & -3x_3 & & = & -2 \\ x_1 & & +2x_3 & -x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

解：$[A, I]$ を変形する。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最後の行列の右半分が A^{-1}。

2. 前問で求めた、A の逆行列を用いて、右上の連立方程式の解を求めよ。

解：$x_1 = 2,\ x_2 = -5,\ x_3 = -1,\ x_4 = 3$。下のように $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ を決めると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ だから、

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}=A^{-1}A\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

B. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3,\ f(4) = a_4$ を満たすとする。この $f(x)$ を利用して、$g(1) = a_1,\ g(2) = a_2,\ g(3) = a_3,\ g(4) = a_4,\ g(5) = a_5$ なる条件を満たす多項式を求めたい。

1. $g(x)$ は、ある多項式 $h(x)$ を用いて、$g(x) = f(x)+h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ と書くことができることを示せ。

解：$F(x) = g(x) - f(x)$ とすると、仮定から $F(1) = g(1) - f(1) = 0$, 同様に $F(2) = F(3) = F(4) = 0$ となる。したがって、Theorem 5.1 (3) より $F(x) = h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ となる多項式 $h(x)$ が存在する。$F(x) = g(x)-f(x)$ だから $g(x) = f(x)+h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ と書くことができる。大切な点は、このように書けていれば、$g(1) = a_1,\ g(2) = a_2$ などとなることではなく、ここで求めているのは、この条件を満たしていれば、かならず、$g(x) = f(x) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ の形に書くことができるということです。この違いはわかりますね。

2. $h(x)$ が、$h(5) = (a_5 - f(5))/(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = (a_5 - f(5))/24$ を満たせば、いつでも条件を満たすことを示せ。

解：$h(5) = (a_5 - f(5))/24$ とすると、

$$\begin{aligned} g(5) &= f(5) + h(5)(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = f(5) + 24h(5) \\ &= f(5) + (a_5 - f(5)) = a_5 \end{aligned}$$

となる。$g(1) = a_1,\ g(2) = a_2,\ g(3) = a_3,\ g(4) = a_4$ となることは、$g(x) = f(x) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ から明らかだから、常に $g(x)$ の条件を満たす。 ■

C. Hamming 符号 は、2 進 4 桁の情報 (0, 1 が四つ並んだもの $\boldsymbol{a}$ に、次の行列 G を右からかけ、

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

の計算規則で求めた $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}G$ を符号としたものである。ノイズで一箇所 0 が 1 または、1 が 0 になっても、行列 H を利用することにより、ノイズが入る前の $\boldsymbol{c}$ を

復元することができる。この符号に関して次の問いに答えよ。ただし、G, H を以下の行列とする。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. この符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1010010) となった。もともとの符号は何だったか。

   解：$(1010010)H$ を計算すると、演算が $0, 1$ だけの演算であることに注意すると、(100) を得る。これは、2 進の 4 だから、4 番目にノイズが入ったと考えられるから、もともとの符号は、(1011010) となる。 ■

2. この符号で 1 箇所のあやまりを訂正できるのはなぜか。簡単に説明せよ。

   解：i 番目が 1 でそれ以外が 0 のものを $\boldsymbol{e}_i$ とする。$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ たとえば $\boldsymbol{e}_4 = (0001000)$。$\boldsymbol{c}$ にノイズが入り一箇所、例えば i 番めがかわるということは、$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i$ になるということである。$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot G$ で得られ、$G \cdot H = O$ だから、

   $$(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i)H = \boldsymbol{c} \cdot H + \boldsymbol{e}_i \cdot H = \boldsymbol{a} \cdot G \cdot H + \boldsymbol{e}_i \cdot H = \boldsymbol{a} \cdot O + \boldsymbol{e}_i \cdot H = \boldsymbol{e}_i \cdot H$$

   $\boldsymbol{e}_i H$ は H の i 行めが得られ、この場合は、2 進の i を表すから、どこにノイズが入ったかを特定することができる。

   別解として、$C = \{\boldsymbol{a} \cdot G \mid \boldsymbol{a} \in K^4\}$ の要素同士は、少なくとも 3 箇所以上異なっているので、一箇所かわっても、元の位置を特定できることを説明しても良い。ここで、K^4 は 2 進 4 桁のもの全体。

6.2.3　2003 年度

Final Exam of NSIB 2003

各解答用紙に **ID** と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。

以下において、$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の導関数、$f''''(x)$ は $f'''(x)$ の導関数を表すものとする。

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。 (2pts×5)

1. 論理演算に関して常に次の式が成り立つ。

$$(p \vee q) \wedge r = p \vee (q \wedge r)$$

2. A を サイズが $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ だけであれば、他の $\boldsymbol{b}$ についても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる解 $\boldsymbol{x}$ は常にただ一つである。

3. A, B にそれぞれ逆行列 C, D が存在すれば、AB の逆行列は、CD である。

4. 関数 $f(x)$ において、$f'(c) = f''(c) = 0$ かつ $f'''(c) = 3$ ならば $f(x)$ は $x = c$ で極小となる。

5. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば、$2x \cdot f(x)$ の原始関数は $F(x^2)$ である。

II. 次の問いに答えよ。 (5pts×13)

1. $((p \vee q) \wedge r) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))$ の真理表を作れ。

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-2c \\ a \\ -c \end{bmatrix}$$

   また、行列 T を左からかけることはどのような行に関する変形を施したことと同じか。$[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か使う場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

3. A, B を下のような行列とすとき、A の逆行列 A^{-1} および 積 BA を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. 次の行列をある連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 1 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

5. 3 次の多項式 $Q(x)$ で、$Q(-1) = 1,\ Q(0) = Q(1) = Q(2) = 0$ を満たすものを求めよ。また、同じく 3 次の多項式 $f(x)$ で、$f(-1) = 2,\ f(0) = -1,\ f(1) = 3,$ $f(2) = -6$ となるものを求めよ。

6. $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + 8}$ を求めよ。

7. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{3x^2}$ を求めよ。ただし、$e^0 = 1$ である。

8. $(2x^3 + 5)^{10}$ の導関数を求めよ。

9. $(2x + 1)e^{-x^3}$ の導関数を求めよ。

10. $\displaystyle\int \left(6x^2 + 1 + \frac{4}{x^5}\right) dx$ を求めよ。

11. $\displaystyle\int x^2(2x^3 + 5)^9 dx$ を求めよ。

12. $\displaystyle\int_0^1 (3x + 2)^4 dx$ を求めよ。

13. $F(x) = \int_{-2}^{x} (2t+1)e^{-t^3} dt$ の導関数を求めよ。

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。 (10pts×2)

1. 左下の行列 C の逆行列を、右下の行列に行に関する基本変形を行なうことにより求めよ。求める過程も書くこと。 (10pts)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad [C, I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 3 = a_4(x-2)^4 + a_3(x-2)^3 + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0$ とする。 (15pts)

   (a) a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。

   (b) $f(2),\ f'(2),\ f''(2),\ f'''(2),\ f''''(2)$ を求めよ。

   (c) $g(2) = 1,\ g'(2) = 1,\ g''(2) = 2,\ g'''(2) = 6,\ g''''(2) = 24$ となる 4 次の多項式を求めよ。

メッセージ： 以下のことについて余白または解答用紙の裏に書いて下さい。

(A) この授業について。特に改善点について。

(B) ICU の教育一般について。特に改善点について。

NSIB FINAL 2003 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I.

1.	2.	3.	4.	5.

II. 1.

p	q	r	$((p \quad \vee \quad q) \quad \wedge \quad r) \quad \Rightarrow \quad (p \quad \vee \quad (q \quad \wedge \quad r))$
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

2.

NSIB FINAL 2003 Solutions

I.

1. ×	2. ◯	3. ×	4. ×	5. ×

II. 1.

p	q	r	$((p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$r)$	$\Rightarrow$	$(p$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r))$
T	T	T	T	T	T	T	T	**T**	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	F	**T**	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T	**T**	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	F	**T**	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	**T**	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	**T**	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	F	T	**T**	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	**T**	F	F	F	F	F

2.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{ccccc} [1,2] & \rightarrow & [3;-1] & \rightarrow & [1,3;2] \\ [1,2] & \rightarrow & [1,3;-2] & \rightarrow & [3,-1], \text{ or} \\ [3;-1] & \rightarrow & [1,2] & \rightarrow & [1,3;2], \text{ etc.} \end{array}$$

3.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

4.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -22 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-5t+2 \\ s \\ 2t+7 \\ 22t+1 \\ t \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 22 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2) = -\frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x) \\
f(x) &= 2\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} - 1\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} \\
&\quad + 3\cdot\frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1)(1-2)} - 6\cdot\frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)(2)(2-1)} \\
&= -\frac{1}{3}x(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2) - \frac{3}{2}(x+1)x(x-2) - (x+1)x(x-1) \\
&= -\frac{10}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{23}{6}x - 1.
\end{aligned}$$

6.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^3+8} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{1}{12}.$$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{6} = \frac{1}{6}.$$

8.

$$((2x^3+5)^{10})' = 10(2x^3+5)^9\cdot(6x^2) = 60x^2(2x^3+5)^9.$$

9.

$$((2x+1)e^{-x^3})' = 2e^{-x^3} + (2x+1)e^{-x^3}(-3x^2) = (2-3x^2-6x^3)e^{-x^3}.$$

10.

$$\begin{aligned}
\int\left(6x^2+1+\frac{4}{x^5}\right)dx &= \int\left(6x^2+1+4x^{-5}\right)dx = \frac{6}{3}x^3 + x + \frac{4}{-5+1}x^{-5+1} + C \\
&= 2x^3 + x - x^{-4} + C = 2x^3 + x - \frac{1}{x^4} + C.
\end{aligned}$$

11.

$$\int x^2(2x^3+5)^9dx = \frac{1}{60}\int 60x^2(2x^3+5)^9dx = \frac{1}{60}(2x^3+5)^{10} + C.$$

12.

$$\int_0^1 (3x+2)^4 dx = \frac{1}{3}\frac{1}{5}\left[(3x+2)^5\right]_0^1 = \frac{5^5}{15} - \frac{2^5}{15} = \frac{1031}{5}.$$

13. 微積分学の基本定理により

$$F'(x) = \left(\int_{-2}^{x} (2t+1)e^{-t^3} dt\right)' = (2x+1)e^{-x^3}.$$

III.

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.　(a)

$$\begin{array}{c|cccccc}
2 & 2 & -3 & -1 & -3 & 3 \\
 & & 4 & 2 & 2 & -2 \\
\hline
2 & 2 & 1 & 1 & -1 & \boxed{1} \\
 & & 4 & 10 & 22 & \\
\hline
2 & 2 & 5 & 11 & \boxed{21} & \\
 & & 4 & 18 & & \\
\hline
2 & 2 & 9 & \boxed{29} & & \\
 & & 4 & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{13} & & &
\end{array}$$

上の組み立て除法により

$$a_0 = 1,\ a_1 = 21,\ a_2 = 29,\ a_3 = 13,\ a_4 = 2.$$

(b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_4(x-2)^4 + a_3(x-2)^3 + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0,\ f(2) = a_0 = 1\\
f'(x) &= 4 \cdot a_4(x-2)^3 + 3 \cdot a_3(x-2)^2 + 2 \cdot a_2(x-2) + a_1,\ f'(2) = a_1 = 21\\
f''(x) &= 4 \cdot 3 \cdot a_4(x-2)^2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x-2) + 2 \cdot a_2,\ f''(2) = 2 \cdot a_2 = 58\\
f'''(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4(x-2) + 3 \cdot 2 \cdot a_3,\ f'''(2) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 = 78\\
f''''(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4,\ f''''(2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 = 48
\end{aligned}$$

(c) 前問の計算より

$$g(x) = (x-2)^4 + (x-2)^3 + (x-2)^2 + (x-2) + 1 = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 23x + 11.$$

6.2.4 2002年度

Final Exam of NSIB 2002/3

各解答用紙に **ID** と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。 (2pts×5)

1. 論理演算に関して常に次の式が成り立つ。

$$\neg((p \vee q) \wedge (\neg r)) = ((\neg p) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r)$$

2. A を $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が無限に存在すれば他の $\boldsymbol{b}$ について $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる解 $\boldsymbol{x}$ がただ一つということはない。

3. A, B をともに $m \times n$ 行列でかつ、行列 B は 行列 A に行に関する基本変形を何回か施して得られるものとする。このとき、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は常に $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解である。

4. 関数 $f(x)$ において、$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0$ かつ $f''''(c) = 7$ ならば $f(x)$ は $x = c$ で極小となる。

5. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば、$2x \cdot f(x)$ の原始関数は $x^2 \cdot F(x)$ である。

II. 次の問いに答えよ。 (5pts×14)

1. $((\neg p) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r)$ の真理表を作れ。

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a + c \\ 2a + b \\ a \end{bmatrix}$$

3. A, B を下のような行列とすとき、積 AB および BA を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. 前問の A は可逆かどうか（逆行列をもつかどうか）判定せよ。

5. 次の行列を連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

6. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = 1,\ f(2) = -3,\ f(3) = 2,\ f(4) = -5$ を満たす。また、$f_n = f(n),\ n = 1, 2, 3, \ldots,$ とすると、$\Delta^4 f_n = 0$ を満たすとする。このとき、$f(x)$ および f_5 を求めよ。ただし、数列 $\{g_n\}$ にたいし、$\{\Delta g_n\}$ は $\Delta g_n = g_{n+1} - g_n$ によって定義される新しい数列で Δ^4 はこのような操作を $\{f_n\}$ に 4 回繰り返したものをあらわすとする。

7. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1}$ を求めよ。

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x}$ を求めよ。ただし、$e^0 = 1$ である。

9. $\displaystyle\frac{1}{(x^3 + 8)^3}$ の導関数を求めよ。

10. $(x^2 + 1)e^{-x^2-1}$ の導関数を求めよ。

11. $\displaystyle\int \left(x^3 + 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$ を求めよ。

12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3 + 8)^4} dx$ を求めよ。

13. $\displaystyle\int_0^1 (2x - 1)^5 dx$ を求めよ。

14. $\displaystyle F(x) = \int_1^x (t^2 + 1)e^{-t^2-1} dt$ の導関数を求めよ。

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。 (10pts×2)

1. 下の行列 C の逆行列を求めよ。またその逆行列をもちいて、右下の連立一次方程式の解を求めよ。

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{rrrrcr} -x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & x_2 & -2x_3 & & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & 0 \\ & 2x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & -1 \end{array} \right.$$

2. $f(x)$ を $f'(x) = x(x+1)^3(x-2) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x$ かつ $f(0) = -2$ を満たす関数とする。このとき、
   (a) $x = -1, 0, 2$ におて $f(x)$ が極大か、極小か、増加しているか、減少しているかを決定せよ。
   (b) $f(x)$ の最小値および最小値をとるときの x の値を求めよ。

メッセージ： 以下のことについて余白または解答用紙の裏に書いて下さい。

(A) この授業について。特に改善点について。

(B) ICU の教育一般について。特に改善点について。

NSIB FINAL 2002/3 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I.

1.	2.	3.	4.	5.

II. 1.

p	q	r	$((\neg p)$ $\vee$ $r)$ $\wedge$ $((\neg q)$ $\vee$ $r)$
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

2.

NSIB FINAL 2002/3 Solutions

I.

1. ◯	2. ◯	3. ×	4. ◯	5. ×

解説：1 は II-1 参照。2. 無限個ということは、係数行列の部分の階数を考えると $n-1$ 以下ですから、解が一つということはありません。3. $B = TA$ とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ から $B\boldsymbol{x} = TA\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{b}$ とはなりますが、$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とは一般にはなりません。反例をしめさないと厳密には答えになっていませんがそれは考えて下さい。簡単に例が作れるはずです。4. 実はこれが III-2 の $x = -1$ のところで起こるケースになっています。この場合は極小です。値はちょっと違いますが。5. これが間違いであることは、例えば $F(x) = x$ とすればすぐわかりますね。この場合は $f(x) = 1$ です。

II.

1. $((\neg p) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r)$ の真理表を作れ。

   右の式の値から I-1 が正しいことがわかる。

p	q	r	$((\neg p)$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$((\neg q)$	$\vee$	$r)$	$\neg$	$((p \vee q)$	$\wedge$	$(\neg r))$
T	T	T	F	T	T	**T**	F	T	T	**T**	T	F	F
T	T	F	F	F	F	**F**	F	F	F	**F**	T	T	T
T	F	T	F	T	T	**T**	T	T	T	**T**	T	F	F
T	F	F	F	F	F	**F**	T	T	F	**F**	T	T	T
F	T	T	T	T	T	**T**	F	T	T	**T**	T	F	F
F	T	F	T	T	F	**F**	F	F	F	**F**	T	T	T
F	F	T	T	T	T	**T**	T	T	T	**T**	F	F	F
F	F	F	T	T	F	**T**	T	T	F	**T**	F	F	T

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+c \\ 2a+b \\ a \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   次のように求めるのが一つの方法です。なぜこれで求まるかわかりますか。逆両列を求めた時のことを考えてみて下さい。

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -a+c & -1 & 0 & 1 \\ 2a+b & 2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 積 AB および BA を求めよ。

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4+4 & 3+2-2 & 1-8-4 \\ 0+2+2 & 6+1-1 & 2-4-2 \\ 0+4+4 & -6+2-2 & -2-8-4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 8 & 3 & -11 \\ 4 & 6 & -4 \\ 8 & -6 & -14 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+6-2 & 0+3+2 & 0-3-2 \\ 2+2+8 & 4+1-8 & -4-1+8 \\ -2+2-4 & -4+1+4 & 4-1-4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 12 & -3 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. 前問の A は可逆かどうか（逆行列をもつかどうか）判定せよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行に関する基本変形で得られた既約ガウス行列が単位行列 I ではないから、可逆ではない。

5. 次の行列を連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s+3t-8 \\ s \\ -2t+u+1 \\ -2t+u-5 \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = 1,\ f(2) = -3,\ f(3) = 2,\ f(4) = -5$ を満たす。また、$f_n = f(n),\ n = 1, 2, 3, \ldots,$ とすると、$\Delta^4 f_n = 0$ を満たすとする。このとき、$f(x)$ および f_5 を求めよ。ただし、数列 $\{g_n\}$ にたいし、$\{\Delta g_n\}$ は $\Delta g_n = g_{n+1} - g_n$ によって定義される新しい数列で Δ^4 はこのような操作を $\{f_n\}$ に 4 回繰り返したものをあらわすとする。

解： 多項式は次のようになる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} - 3\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 2\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \\ &\quad - 5\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \\ &= -\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4) - \frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-4) \\ &\quad - \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= -\frac{7}{2}x^3 + \frac{51}{2}x^2 - 56x + 35,\ f(5) = -45. \end{aligned}$$

$g_n = \Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ とおくと、$g_1 = -4,\ g_2 = 5,\ g_3 = -7$ となります。さらに、$h_n = \Delta^2 f_n = \Delta g_n = g_{n+1} - g_n$ とおくと、$h_1 = 9,\ h_2 = -12$ となります。$i_h = \Delta^3 f_n = \Delta h_n$ は $i_1 = -21$。$0 = \Delta^4 f_n = \Delta i_n = i_{n+1} - i_n$ をつかうと、$i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = -21$ がわかります。これは、h_n が等差数列で公差が -21 であることを意味しています。これより $h_n = 9 - 21(n-1) = 30 - 21n$。さらに、

$$\begin{aligned} g_n &= (g_n - g_{n-1}) + (g_{n-1} - g_{n-2}) + \cdots + (g_2 - g_1) + g_1 \\ &= h_{n-1} + h_{n-2} + \cdots + h_2 + h_1 + g_1 \\ &= -4 + \sum_{j=1}^{n-1} 30 - 21j \ = \ -4 + 30(n-1) - 21\frac{n(n-1)}{2} \\ &= -\frac{21}{2}n^2 + \frac{81}{2}n - 34 \end{aligned}$$

これから同じようにして

$$f_n = (f_n - f_{n-1}) + (f_{n-1} - f_{n-2}) + \cdots + (f_2 - f_1) + f_1$$

$$
\begin{aligned}
&= g_{n-1} + g_{n-2} + \cdots + g_2 + g_1 + f_1 \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{21}{2} j^2 + \frac{81}{2} j - 34 \right) \\
&= 1 - \frac{21}{2} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{81}{2} \frac{n(n-1)}{2} - 34(n-1) \\
&= -\frac{7}{2} n^3 + \frac{51}{2} n^2 - 56n + 35
\end{aligned}
$$

これはあまりにも大変ですね。定理をもちいて、$\Delta^4 f_n = 0$ ならば $f(x)$ が 3 次の多項式であることがわかれば、あとは簡単です。

7. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}$

別解： 微分を使います。

$$
\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{4x^3 - 3x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{6x + 2}{12x^2 - 6x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}
$$

最初の式では、極限を考えると 0/0 の形になっています。この場合は分母・分子を微分しても同じ極限になります。２番目の式は分母・分子を微分した式ですが、これもまた 0/0 になっています。そこでもう一度微分すると、３番目の式が得られます。分母の極限は 0 ではありませんから、そのまま極限が計算できます。（３番目の式は、0/0 の形ではありませんから、微分してはいけません。微分をすると全く違う答えになってしまいます。小テスト７の前の時間だったでしょうか、説明しましたが覚えていますか。Sample Exam for Review にはこれを使わないとできない問題が含まれていました。）

8. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x} = \frac{1-1}{1} = 0$

これは、間違って微分などしてはいけません。とても単純な問題でした。

9. $\displaystyle \frac{1}{(x^3+8)^3}$ の導関数を求めよ。

解： 合成関数の微分を使います。

$$
\left(\frac{1}{(x^3+8)^3} \right)' = ((x^3+8)^{-3})' = -3(x^3+8)^{-4}(x^3+8)' = -3(x^3+8)^{-4}(3x^2) = \frac{-9x^2}{(x^3+8)^4}
$$

別解： 関数の商（分数の形）の微分を用いることもできます。しかしその場合でも $(x^3+8)^3$ の微分は必要ですから、合成関数の微分を用いなくてはいけません。もち

ろんこれを展開してしまい、それをさけることもできますが。1 の微分は 0 であることに注意してください。

$$\left(\frac{1}{(x^3+8)^3}\right)' = \frac{1'(x^3+8)^3 - 1\cdot(x^3+8)^{3'}}{((x^3+8)^3)^2} = \frac{-3(x^3+8)^2(3x^2)}{(x^3+8)^6} = \frac{-9x^2}{(x^3+8)^4}$$

10. $(x^2+1)e^{-x^2-1}$ の導関数を求めよ。

解： 関数の積の微分を使います。

$$\begin{aligned}((x^2+1)e^{-x^2-1})' &= (x^2+1)'e^{-x^2-1} + (x^2+1)(e^{-x^2-1})' \\ &= 2xe^{-x^2-1} + (x^2+1)e^{-x^2-1}(-2x) = -2x^3e^{-x^2-1}\end{aligned}$$

11. $\displaystyle\int\left(x^3+1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ を求めよ。

解： $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/3}$ に注意します。

$$\int\left(x^3+1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \frac{1}{4}x^4 + x + \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^4}{4} + x + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$$

12. $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x^3+8)^4}dx$ を求めよ。

解： II-9 に注意します。

$$\int\frac{x^2}{(x^3+8)^4}dx = -\frac{1}{9}\int\frac{-9x^2}{(x^3+8)^4}dx = -\frac{1}{9}\frac{1}{(x^3+8)^3} + C = -\frac{1}{9(x^3+8)^3} + C$$

13. $\displaystyle\int_0^1(2x-1)^5dx$ を求めよ。

解： $(2x-1)^6$ の導関数はこれも合成関数の微分を用いると $((2x-1)^6)' = 6(2x-1)^5(2x-1)' = 12(2x-1)^5$ ですから、

$$\int_0^1(2x-1)^5 = \frac{1}{12}\int_0^1 12(2x-1)^5 = \frac{1}{12}\left[(2x-1)^6\right]_0^1 = \frac{1}{12}(1^6-(-1)^6) = 0$$

14. $F(x)=\int_1^x (t^2+1)e^{-t^2-1}dt$ の導関数を求めよ。

解： 微分積分学の基本定理を考えると、$F(x)$ は $(x^2+1)e^{-x^2-1}$ の原始関数の一つですから、微分するともとの関数になります。

$$F'(x)=\left(\int_1^x (t^2+1)e^{-t^2-1}dt\right)'=(x^2+1)e^{-x^2-1}$$

III.

1. 下の行列 C の逆行列を求めよ。またその逆行列をもちいて、右下の連立一次方程式の解を求めよ。

$$C=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{cases} -x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & x_2 & -2x_3 & & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & 0 \\ & 2x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & -1 \end{cases}$$

解： まずは $[C,I]$ の形の行列を既約ガウス行列に変形します。

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=C^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

連立一次方程式の係数行列が C であることに注意すると、上の計算から、$x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=-1$. となる。

2. $f(x)$ を $f'(x)=x(x+1)^3(x-2)=x^5+x^4-3x^3-5x^2-2x$ かつ $f(0)=-2$ を満たす関数とする。このとき、

(a) $x = -1, 0, 2$ におて $f(x)$ が極大か、極小か、増加しているか、減少しているかを決定せよ。

(b) $f(x)$ の最小値および最小値をとるときの x の値を求めよ。

解： $f'(x)$ の原始関数の一つが $f(x)$ だから

$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - x^2 + C$$

$f(0) = -2$ であることより $C = -2$ を得、

$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - x^2 - 2,\ f(-1) = -\frac{127}{60},\ f(2) = -\frac{214}{15}$$

次に二次導関数などを計算すると、

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 5x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 10x - 2,\ f''(-1) = 0,\ f''(0) = -2,\ f''(2) = 54,\\
f'''(x) &= 20x^3 + 12x^2 - 18x - 10,\ f'''(-1) = 0,\\
f''''(x) &= 60x^2 + 24x - 18,\ f''''(-1) = 18.
\end{aligned}$$

$f'(x) = x(x+1)^3(x-2) = 0$ となるのは、$x = -1, 0, 2$ のいずれか。さらに、$f''(0) = -2 < 0$ なので $f(x)$ は $x = 0$ で極大。$f''(2) = 54 > 0$ より $f(x)$ は $x = 2$ で極小となる。$x = -1$ ではさらに議論が必要だが、下のようになり、$x = -1$ でも極小。$f(-1) > f(2)$ ですから、$f(x)$ が最小となるのは、$x = 2$ のときで、最小値は $-\frac{214}{15}$ となります。最大値はありません。いくらでも大きくなります。しかし、そのことは聞いていません。

x		-1			0			2	
$f(x)$	↘	極小	↗	↗	極大	↘	↘	極小	↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
	↗		↗		↘			↗	
$f''(x)$	$+$	0	$+$		-2			54	
	↘		↗						
$f'''(x)$	$-$	0	$+$						
		↗							
$f''''(x)$		18							

6.2.5　2001 年度

数学の方法（2001 年 6 月 19 日）

Final Exam

I. 正しいものには ○、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。 (4pts×10)

1. 集合 A, B, C において $A \subset B \cup C$ ならば $A \subset B$ または $A \subset C$ である。

2. 集合 S, T において、S^c は補集合をあらわすものとする。すなわち全体集合を X としたとき $S^c = X - S$ また $S \triangle T = (S \cup T) - (S \cap T)$ とする。A, B, C を集合とする時、$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ である。

3. A を $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が無限に存在すれば他の $\boldsymbol{b}'$ についても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ となる $\boldsymbol{x}$ は無限に存在する。

4. $n < m$ のとき、n 個の $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を未知数とする m 個の連立一次方程式が無限個解を持つことはない。

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ は逆行列をもつ。

6. $m \times n$ (m 行 n 列) の既約ガウス行列に 0 だけからなる行がなければ $m \leqq n$ である。

7. 多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ が $f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 1$ を満たせば a, b, c は一通りに決まる。

8. A, B を $n \times n$ の正方行列とする。A の逆行列を C、B の逆行列を D とすると、AB の逆行列は、CD である。

9. 区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f'(x) = 0$ となるのは、$x = c$ のときだけでそのとき、$f''(c) < 0$ であるとする。このとき、$f(c)$ は この区間のなかの $f(x)$ の最大値である。

10. $F'(x) = e^x \sin x$、$F(0) = 1$ となる関数は存在すればただ一つである。

II. 答えのみ解答欄に記入せよ。 (6pts×10)

1. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ の真理表を作れ。このことは何を意味しているか。(注意：p, q, r の値のとり方は全部で 8 通りあります。)

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c-3a \\ b \end{bmatrix}$

3. 下のような x_1, x_2, x_3 に関する 3 個の連立一次方程式で解が無限にあるものを一組書け。
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{cases}$$

4. $f(0) = 4$、$f(1) = 3$、$f(2) = -6$、$f(3) = 1$ を満たす多項式で次数が 3 以下のものを一つ求めよ。

5. 等比級数 $a_n = (-2/5)^{n-1}$ の無限和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ を求めよ。

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2-n-2}$ を求めよ。

7. $\displaystyle\frac{1}{(3x^2+1)^3}$ の $x = 1$ における微分係数を求めよ。

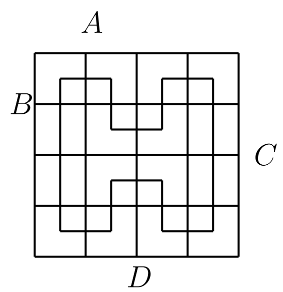
8. $(\sin x)e^{-3x^2}$ の導関数を求めよ。

9. $\displaystyle\int \sin(2-3x)dx$

10. $\displaystyle\int \frac{6x}{(3x^2+1)^4}dx$

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。 (10pts×5)

1. 右の図は、集合 A, B, C, D, H を表したものである。A は左 2 列、B は上 2 行、C は中 2 行、D は中 2 列、H は中央の H の形を下部分とする。このとき、解答欄の図の $(((A \triangle B) \triangle C) \triangle D) \triangle H$ の部分を斜線で表せ。



2. 左下の連立一次方程式の拡大係数行列に行の基本変形をして右下の行列を得た。この行列をさらに変形して既約ガウス行列を求め、この連立一次方程式の解を求めよ。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 & = & b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 & = & b_4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ。

4. $f(x) = (x-c)^2 g(x) + d$ とする。$g(c) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = c$ で極小値 d を持つことを証明せよ。(ただし、$g(x)$ は何回でも微分できる関数とする。)

5. $f'(x) = x^3(x-2)(x+2) = x^5 - 4x^3$ かつ $f(0) = 1$ を満たす関数を求め、$f(x)$ が極大、極小をとる点を求め、この関数のグラフを描け。

Final 2001 略解 **I.**

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
×	○	×	×	×	○	○	×	○	○

II.

1.

p	q	r	$((p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \Rightarrow r))$	$\Rightarrow$	$(p \Rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	T	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F
T	F	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	F	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F
F	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

4.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 3\frac{x(x-2)(x-3)}{1(1-2)(1-3)} - 6\frac{x(x-1)(x-3)}{2(2-1)(2-3)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3(3-1)(3-2)} \\ &= -\frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{3}{2}x(x-2)(x-3) + 3x(x-1)(x-3) \\ &\quad +\frac{1}{6}x(x-1)(x-2) \\ &= 4x^3 - 16x^2 + 11x + 4 \end{aligned}$$

5.

$$\frac{1}{1-\left(\frac{-2}{5}\right)} = \frac{5}{7}.$$

6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{3n^2-n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{3}.$$

7.

$$\left(\frac{1}{(3x^2+1)^3}\right)'=((3x^2+1)^{-3})'=-3(3x^2+1)^{-4}\cdot(3x^2+1)'=-3(3x^2+1)^{-4}\cdot(6x)=\frac{-18x}{(3x^2+1)^4}$$

この式に $x=1$ を代入して $-18/4^4=-9/128$ が微分係数である。

8.

$$((\sin x)e^{-3x^2})'=(\cos x)e^{-3x^2}+(\sin x)e^{-3x^2}(-3x^2)'=(\cos x-6x\sin x)e^{-3x^2}.$$

9.

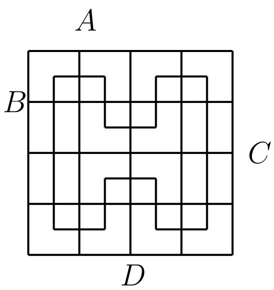
$$\int\sin(2-3x)dx=\frac{1}{3}\cos(2-3x)+C\quad(C\text{ は定数})$$

10.

$$\int\frac{6x}{(3x^2+1)^4}dx=\int(3x^2+1)'(3x^2+1)^{-4}dx=-\frac{1}{3}(3x^2+1)^{-3}+C=-\frac{1}{3(3x^2+1)^3}+C\quad(C\text{ は定数})$$

III.

1.



左下の L 字形のブロックを斜線でぬりあとはすべて市松模様 (like Checker Board) に塗ったものが正解。

2.

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0&3&4\\0&1&3&0&2&5\\0&0&0&1&0&3\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\0\\3\\0\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}-2\\-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}-3\\-2\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix}-1&-3&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\-2&-4&0&1\end{bmatrix}$$

4.
$f(x) = (x-c)^2g(x)+d$ としたとき $f'(x) = 2(x-c)g(x)+(x-c)^2g'(x)$、$f''(x) = 2g(x)+4(x-c)g'(x)+(x-c)^2g''(x)$ だから $f(c)=d$、$f'(c)=0$ かつ $f''(c)=2g(c)>0$ である。したがって $f(x)$ は $x=c$ で極小値 d を持つ。

[別解] $f(c)=d$ でかつ $g(c)>0$ だから c の近くでは $g(x)>0$ 従って x が c の近くで c とは等しくないとすると $f(x)=(x-c)^2g(x)+d>d=f(c)$ だから $f(x)$ は $x=c$ で極小値 d を持つ。

5.
$f(x)$ の導関数が ($f(x)$ を微分すると) $f'(x) = x^5-4x^3$ だから $f(x) = \frac{x^6}{6}-x^4+C$ と書ける。$f(0) = 1$ が仮定にあるから、$C = 1$ を得る。従って、$f(x) = \frac{x^6}{6}-x^4+1$、$f'(x) = x^5-4x^3 = x^3(x+2)(x-2)$、$f''(x) = 5x^4-12x^2 = x^2(5x^2-12)$、$f'''(x) = 20x^3-24x = 4x(5x^2-6)$、$f''''(x) = 60x^2-24$ である。これより $f'(x)=0$ となるのは、$x=-2,0,2$ の 3 点である。$f''(-2)=f''(2)=32>0$ だから $f(x)$ は $x=-2,\ 2$ で極小値をとる。$x=0$ については $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$ で $f''''(0)=-24<0$ だから、それぞれの増減をしらべると $f(x)$ は $x=0$ で極大値をとることが分かる。グラフは滑らかな W 字型で中央の頂点の座標は $(0,1)$ である。[グラフなどは略]