# 第3章　線形代数

## 3.1　連立一次方程式

### 3.1.1　連立一次方程式とその解

ここで学ぶのは線形代数と言われるものです。線形代数の一番の基本は連立一次方程式を考えることです。線形代数は微分積分とともに数学の基礎をなすもので、自然科学でも、社会科学でも使われている理論であり、考え方です。応用という面からも、連立一次方程式の理論は、重要です。このあと連立一次不等式、線形計画法へと進んで行く土台もこの連立一次方程式の理論です。

連立一次方程式とは次のようなものです。

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

これは $n$ 個の変数（$x_1, x_2, \ldots, x_n$）に関する $m$ 個の 1 次方程式からなる連立一次方程式です。英語では A system of linear equations と言います。$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ など $a$ に添字のついたものは、数で、係数 (coefficients) と呼ばれます。また、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数と呼びます。$x_1$, $x_2$ など変数がすべて 1 乗で $x_1^2$ などが現れないので「一次」といいます。これに対して、$x^2 - x - 2 = 0$ は二次方程式です。$x^2$ が入っており、それよりも高い次数の項 $x^3$ や、$x^{100}$ などは入っていないからです。次数については、多項式のところで学びます。$n$ 個の数の組で $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に代入した時、上の $m$ 個の方程式すべてを満たす（成立させる）ものを解 (solution) といいます。 例えば、

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 3x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \end{array}\right.$$

は、変数 $x_2$ と $x_2$ に関する連立一次方程式で、$n = 2$, $m = 2$ となっています。$x_1 = 8$, $x_2 = 2$ とすると（$x_1$ に 8 を、$x_2$ に 2 を代入すると）

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 8 & - & 3 \cdot 2 & = & 2 \\ 8 & + & 2 \cdot 2 & = & 12 \end{array}\right.$$

となるので、$x_1 = 8,\ x_2 = 2$ は、この方程式の解であると言うわけです。変数に使う記号は $x_1, x_2, \ldots$ ではなく他の記号を用いることもあります。たとえば $x, y$ を用いれば、

$$\begin{cases} x & - & 3y & = & 2 \\ x & + & 2y & = & 12 \end{cases}$$

と、なじみのあるものとなります。ここでは、変数がたくさんある場合も一緒に扱いたいので、$x, y, z$ などではなく、$x_1, x_2, x_3, \ldots$ を使っているわけです。

さて、ここで考えたいのは以下の問題です。

1. 解き方、アルゴリズム（算法）[必ず解ける方法]
2. 解はいくつ（何組）あるか。解がいくつあるかはどうやって分かるか。
3. 解はどんな形をしているか。

### 3.1.2　行に関する基本変形

まず次の連立方程式を解いてみましょう。これは、二元連立一次方程式です。変数（未知数）が $x$ と $y$ の二つだからです。右の列に書いたものは、方程式の係数だけを取り出して書いたものです。$+$ と $=$ は省いてありますが、$-3$ のところは、$+(-3)$ と考えて $-3$ としてあることに注意して下さい。

$$\begin{cases} x & - & 3y & = & 2 \\ x & + & 2y & = & 12 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

- 2式から、1式を引く。　　第2行から第1行を引く。 $([2, 1; -1])$

$$\begin{cases} x & - & 3y & = & 2 \\ & & 5y & = & 10 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

- 2式を $\frac{1}{5}$ 倍する。　　第2行に $\frac{1}{5}$ をかける。$([2, \frac{1}{5}])$

$$\begin{cases} x & - & 3y & = & 2 \\ & & y & = & 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 2式の3倍を1式に足す。　　第1行に第2行の3倍を加える。 $([1, 2; 3])$

$$\begin{cases} x & & & = & 8 \\ & & y & = & 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

上の変形を追ってみれば分かりますが、$x$ とか $y$ とかいう変数を書かなくても、係数だけに注目すれば、良いことが分かります。
このように数を矩形に並べたものを行列と呼びます。横に並んだものを行、縦を列と言います。例えば、最後の行列の第一行は $[1\,0\,8]$、第三列の第一行目は8、第二行目は 2 となっています。数を矩形にならべた周りを括弧でくくってありますが、それは、他のものと区別するためで重要ではありません。

この方程式を他の方法で解くこともできますが、いま使った操作は以下のいずれかです。2 は用いていませんが。

連立方程式に対する以下の変形を基本変形という。

1. 1次方程式を何倍かする。(0倍はのぞく。)

2. 2つの方程式を交換する。

3. ある方程式に別の方程式を何倍かして加える。

これを行列の変形の言葉に変えると以下のようになります。

以下の変形を行列の「行の基本変形」という。

1. ある行に 0 でない定数をかける。

2. 2 つの行を交換する。

3. ある行に、別の行を何倍かして加える。

最初の二つはそう難しくありませんが、3つ目の操作はちょっとなれないと難しいかも知れません。次の様に言い換えてみましょう。
「第 $i$ 行に第 $j$ 行の $c$ 倍を加える。」
この変形で大切なのは、変わるのは第 $i$ 行だけで、第 $j$ 行は変わらないことです。3.1.2 節の最初の例で行なった 1 つめと 3 つめの変形をこの言葉を使って言い換えてみると、次のようになります。

- 「2 式から、1 式を引く」→「第 2 行に第 1 行の $-1$ 倍を加える」

- 「2 式の 3 倍を 1 式に足す」→「第 1 行に第 2 行の 3 倍を加える」

3.1.2 節での例では、一番右に対応する記号が書いてありますが、上のそれぞれに対応する部分には、$[2, 1; -1]$, $[1, 2; 3]$ とあります。これはこの記号によってどんな操作をしているかをわかるようにしているわけです。
もう少し正確に、それぞれの操作を表す記号も一緒に定義してみましょう。

**定義 3.1.1** $m$ 行 $n$ 列の行列に関する以下の三つの操作を、行に関する基本変形とよぶ。

**$[i; c]$:** 第 $i$ 行の成分をすべて $c$ 倍する。(但し $c$ は $\underline{0 \text{ でない}}$ 数で、$1 \leqq i \leqq m$)

**$[i,j]$:**　第 $i$ 行と第 $j$ 行を交換する。(但し、$1 \leqq i,j \leqq m$)

**$[i,j;c]$:**　第 $i$ 行に第 $j$ 行の $c$ 倍を加える。(但し、$c$ は任意の数で、$1 \leqq i,j \leqq m$)

「任意」の英語は arbitrary ですが、any、all、every を使うこともあります。何でもよいと言う意味です。

**練習問題 3.1.1** 次の問題を行列表示を用い、行の基本変形のみを用いて解いてみましょう。

$$\begin{cases} 3x+y &= 17 \\ 2x-5y &= 3 \end{cases}$$

解は $x = \frac{88}{17}$, $y = \frac{25}{17}$ です。

次の連立方程式を解いてみましょう。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x &+& y &+& 2z &=& 4 \\ x &+& y &+& z &=& 1 \\ 11x &-& y &+& 5z &=& 17 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

- 1 式と、2 式を交換する。$[1,2]$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &+& z &=& 1 \\ 3x &+& y &+& 2z &=& 4 \\ 11x &-& y &+& 5z &=& 17 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 11 & -1 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

- 2 式から 1 式の 3 倍を引く（$-3$ 倍を加える）。$[2,1;-3]$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &+& z &=& 1 \\ && -2y &-& z &=& 1 \\ 11x &-& y &+& 5z &=& 17 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 11 & -1 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

- 3 式から 1 式の 11 倍を引く（$-11$ 倍を加える）。$[3,1;-11]$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &+& z &=& 1 \\ && -2y &-& z &=& 1 \\ && -12y &-& 6z &=& 6 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -12 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

- 3 式から 2 式の 6 倍を引く（$-6$ 倍を加える）。$[3,2;-6]$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &+& z &=& 1 \\ && -2y &-& z &=& 1 \\ &&&& 0 &=& 0 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これは、解が一つに決まらない形をしています。例えば $z = 4$ とすると、$y = -2$ となり、それを用いると、$x = -1$ となります。すなわち、$x = -1, y = -2, z = 4$ は解です。しかし、$z$ が他の値であったも、それぞれに、$y, x$ が決まり、そこから解が得られます。すなわち、解は無限組、得られます。このような場合は、パラメター (媒介変数 (parameter)) を使って解を表示します。そのためもう少し変形してみましょう。

- 2 式を $-2$ で割る（$-\frac{1}{2}$ をかける）。$[2; -\frac{1}{2}]$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1 式から 2 式を引く（-1 倍を加える）。$[1, 2; -1]$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = \frac{3}{2} \\ y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

- これは、$z = t$ として、解をパラメターを使って表すと以下のようになります。

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

一番最後の形をベクトル表示と言います。これについては、行列のところで詳しく説明します。

この例でもわかるように三元連立一次方程式で、方程式が 3 個であっても、解が無限個存在する場合もあることがわかりました。中学校・高等学校では、答が一つに決まる場合が殆んどで、たまにそうでない「変な」問題が混ざっている程度でそれは無視してもどうにかなりましたが、上の例でも実際は単純ではなくいろいろと複雑な問題をはらんでいることを示唆しています。

上の解き方は行列の形に直してあと、変形に制限をつけただけで、いままで勉強してきたものとそうかわっていないと思います。では、最後に $x, y, z$ を求めましたが、それは、本当に最初の連立方程式を満たしているのでしょうか。つまり最初の方程式の解となっているのでしょうか。もちろんそうでなければ一所懸命解いた意味がありません。これは、代入してみれば、確かめることができます。ちょっと確かめて見て下さい。だいたい変な答が出たのですから。解が無限個などという。もう一つ問題があります。それは、最後にもとめたもの以外には、最初の連立方程式の解はないのでしょうか。そういうことも考えていきたいと思います。

### 3.1.3　既約ガウス行列と基本定理

$n$ 変数の 1 次方程式 $m$ 個からなる連立一次方程式は、

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

の形に表すことができます。ここで、$a_{ij}$、$b_k$ は定数。係数を表すのには、$a_{ij}$ のような 2 重添字 (double index) を用います。上のように変形して解を求めるときは、$x, y, z$ や、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ などの変数の係数のみが変化するから、他の部分を省略し、長方形（矩形）に書いたものを考えます。これを、連立一次方程式の「拡大係数行列 **(Augmented Matrix or Extended Coefficient Matrix)**」といいます。実際、この係数の変化のみを拡大係数行列を使って書いたものを上の変形の右に並べて書いてみました。上の一般の連立一次方程式の場合は、以下のようになります。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

また、$b_1, b_2, \cdots, b_m$ の部分をのぞいたものを「係数行列 **(Coefficient Matrix)**」といいます。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

**練習問題 3.1.2** 次の二つの連立一次方程式の拡大係数行列を書き、上に行った方法で解いてみてください。よくイメージがわかないときは、方程式の変形をし、それと並べて、行列の変形をしてみましょう。

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ 9x - y + 5z = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 11x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

左上の方程式の解は、ただ一組で、$x = -4, y = -2, z = 8$、右上の方は解は解がありません。

次はどうでしょうか。

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1 \\ 3x - 9y - 6z = -3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

これより、$x = 3t + 2u - 1, y = t, z = u$、となります。この場合には、2 つのパラメターによって解が表示されました。即ち、自由度は 2 個あります（正確な意味は後述)。このように解が無いもの、解がちょうど一個（一組：変数がたくさんあるわけですからこのような言い方の方が正確ですが）のもの、解が無限個（無限組）ありそれらがいくつかの自由変数によって表されるものがあることが分かりました。では、解がちょうど二組あるような連立一次方程式はあるのでしょうか。実は次のことが成り立っています。

**「連立一次方程式の解は、ないか（0 個)、1 個か、無限個である。」**

さてこれまで見てきたように連立一次方程式解法のアウトラインは、連立一次方程式の「拡大係数行列」に、3 種類の「行の基本変形」だけを行って、今まで見てきたような「簡単な行列」にし、そこから機械的に解を読みとることである。そこで、「簡単な行列」とは何かを定義します。

**定義 3.1.2** 次のような行列を「既約ガウス行列 **(Reduced Echelon Form)**」という。

1. もし、ある行が 0 以外の数を含めば、最初の 0 でない数は 1 である。（これを先頭の 1 (the leading 1) という。）
2. もし、すべての数が 0 であるような行が含まれていれば、それらの行は下の方によせて集められている。
3. すべてが 0 ではない 2 つの行について、上の行の先頭の 1 は、下の行の先頭の 1 よりも前に存在する。
4. 先頭の 1 を含む列の他の数は、すべて 0 である。

(3.1)、 (3.2) の行列も、 (3.3) の拡大係数行列を変形して得られた、右側の行列も、上の 4 つの条件を満たしているので、すべて、既約ガウス行列です。3 番目までの条件を満たす行列をガウス行列または、階段行列と呼ぶこともありますが、ここでは、基本的には既約ガウス行列にまで変形して解を考えることにします。英語の Echelon という単語は軍隊での階級を表す言葉だそうです。ガウスはドイツの数学者で、正規分布曲線と呼ばれる釣り鐘型の曲線（ガウス曲線とも呼ばれる）の絵とともに、以前は 5 マルク札にも肖像が使われていました。

次の定理は、どんな行列であっても、定義 3.1.1 で定義した行に関する 3 種類の基本変形を何回か施すと、定義 3.1.2 で定義した既約ガウス行列にする事ができることを主張したものです。

**定理 3.1.1** 任意 (arbitrary) の行列は、行に関する基本変形を何回か施して、既約ガウス行列に変形することができる。

証明. まず、大体の方針を述べましょう。一番左の列から見ていき、零ではないものがあれば、その零でない「行」を、行の入れかえ（2 番目の操作）を使って、一番上に移動

する。その行を、1番目の操作で何倍かし（またはある数で割っ）て、一番左の零でない成分が丁度1になるようにする。この行（第一行目）の何倍かを他の行から引く（または加える）こと（3番目の操作）により、この列は、この行にある1以外はすべて零にすることができる。一行目以外で、零ではない成分のある列を選び、また、行の入れ替えで、零ではない成分のある行を第二行目に移動する。その零ではない成分を何倍かして、1にする。この行（第二行）を何倍かして、他の行から引くことにより、その列の他の成分をすべて零にする。1行目、2行目以外で、零ではない成分のある列を見つけ...と続けていくと、最終的には、既約ガウス行列にたどり着きます。

行の基本変形を何回か施して、既約ガウス行列にする算法（アルゴリズム）を以下に述べる。

1. すべての成分が0ならその行列は既約ガウス行列だから、その場合は良い。すべての成分が0ではない最初の列を $i_1$ とする。行の順序を入れ替え（2番目の操作を何回か施すことによって得られる)、第1行第 $i_1$ 列に零でない成分が来るようにする。それを $c_1$ とする。

2. 第1行を $c_1$ で割る（$[1, 1/c_1]$)。すると第1行の最初の零でない成分は $i_1$ 列目でそれは、1（先頭の 1) である。他の行の零でない成分は、$i_1$ 列目以降である。第 $j$ 行の $i_1$ 列目に零でない成分 $c$ があれば、第1行の $-c$ 倍を、第 $j$ 行に加える $([i_1, 1; -c])$ と、第 $i_1$ 列で零でないのは、第1行目にある先頭の1だけになる。

3. 2行目以降がすべて0ならそれは既約ガウス行列である。第2行目以降ですべての成分が0ではない最初の列を $i_2$ とする。行の順序を入れ替え、第2行第 $i_2$ 列に零でない項が来るようにする。それを $c_2$ とする。

4. 第2行を $c_2$ で割る。すると第2行の最初の零でない成分は $i_2$ 列目でそれは、1（先頭の 1) である。3行目以降の零でない成分は、$i_2$ 列目以降である。第 $j$ 行（第1行も含めて）の $i_2$ 列目に零でない成分 $c$ があれば、第2行の $-c$ 倍を、第 $j$ 行に加えると、第 $i_2$ 列で零でないのは、第2行目にある先頭の1だけになる。

5. 3行目以降がすべて0ならそれは既約ガウス行列である。第3行目以降ですべての成分が0ではない最初の列を $i_3$ とする。行の順序を入れ替え、第3行第 $i_3$ 列に零でない成分が来るようにする。それを $c_3$ とする...
   これを続けていけば良い。

この方法で、必ず、既約ガウス行列が得られるので、定理が証明された。 ■

厳密な証明にするには、最後に、既約ガウス行列になることをと確かめないといけませんが、煩雑になるので、ここでは、省略します。この方法で、実際に、行列を、既約ガウス行列に変形してみて下さい。定理の証明を理解することができると思います。この方法は、必ずしも、既約ガウス行列に変形する最善の方法ではない場合がありますが、大切なのは、必ずできること。もう一つは、これをコンピュータに理解できる言葉に書き替えれば、コンピュータにもこの変形をさせることができる事です。アルゴリズムはコンピュー

タのプログラムの基礎をなすものです。論理的なギャップがないように、その方法を書き下すこと。証明を書くことはその訓練にもなります。

では、次に、既約ガウス行列から解を求める、または、読み取ることを考えましょう。連立一次方程式の拡大係数行列から出発して、既約ガウス行列が得られれば、解をほぼ自動的に書き下すことができます。まずは、解がどのくらいあるかを記述するための用語の定義をします。

**定義 3.1.3** 行の基本変形で得た既約ガウス行列の $0$ でない行の数をその行列の階数 **(rank)** と言い、行列 $A$ に対して、$\mathrm{rank}\ A$ と書く。

大切なのは、２点です。まず、階数は、すべての行列に対して定義されていること。つまり、連立一次方程式の拡大係数行列の階数も、係数行列の階数も定義されていることです。さらに、その行列が、連立一次方程式と関係していなくても、階数は定義されています。二番目のことは、すぐには証明できませんが、どのような道筋をたどって既約ガウス行列にたどり着いても、階数は一通りに決まり、変形の道筋によって違う階数が得られることは無いと言うことです。それほど難しくないので、あとで証明します。もう少し考えると、既約ガウス行列に至る過程は種々あっても、最後に行きつく既約ガウス行列自体はまったく同じであることも分かります。こちらはちょっと面倒なので、ここでは証明しません。

さて、次に、連立一次方程式の解についての定理を述べますが、その前に、係数行列と、拡大係数行列の階数について考えておきましょう。係数行列と、拡大係数行列は最後に一列加わったかどうかだけの差です。さらに、行に関する基本変形をしているので、拡大係数行列に行に関する基本変形を施せば、それは、係数行列の部分の行に関する基本変形にもなっています。さらに、最後にできた、行列は、拡大係数行列の部分が、既約ガウス行列になっていれば、その最後の一列をのぞいたものが、係数行列から変形して得られた、既約ガウス行列になっています。既約ガウス行列の定義から確かめてみましょう。3.1.2 における例も参考にすると良いでしょう。最後に、階数は、行の基本変形で得られた、既約ガウス行列の零ではない、行の数ですから、拡大係数行列の階数と、係数行列の階数は同じか、一つ違うかのどちらかで、既約ガウス行列の定義から、もし、この二つの階数が異なるときは、拡大係数行列の最後の列に、先頭の $1$ があり、その行はその $1$ 以外すべて零となっていることが分かります。
では、定理を述べましょう。

**定理 3.1.2** $n$ 変数の連立一次方程式の解について以下が成立する。但し $r$ は係数行列の階数とする。

(1) 拡大係数行列と係数行列の階数が異なれば、その連立一次方程式は解を持たない。

(2) 拡大係数行列と係数行列の階数が等しく、その階数が $n$ ならば、その連立一次方程式はただ一組の解を持つ。

(3) 拡大係数行列と係数行列の階数が等しく、 $r < n$ ならば、その連立一次方程式の解（の組）は無限個あり、$n - r$ 個の媒介変数（パラメター）を用いて表すことができる。

注.

1. 最後の列にのみ 1 があると言うことは、先頭の 1 が最後の列にあるということ、すなわち、$[0, 0, \cdots, 0, 1]$ といった行があると言うことです。方程式から拡大係数行列を作ったことを考えてみるとこれは、左辺が 0 なのに、右辺は 1 だということを意味しています。たしかにこのようになっていれば、解はありません。

2. 既約ガウス行列の階数は 0 でない行の数ですが、それは「先頭の 1 の数」と言い換えても同じです。0 でない行には必ず先頭の 1 があるわけですから。

3. 方程式の解を書き上げる時は、既約ガウス行列の先頭の 1 のある列に対応する変数はそのままとして、先頭の 1 の無い列に対応する変数を $t_1$ から順に $t_2, t_3$ とおいていくと階数を $r$ とした時 $n - r$ のパラメタをおくことができます。最後の列は変数とは関係なかったですね。すると簡単に解を書くことができます。例 3.1.2 で見てみると、先頭の 1 に対応しないのは $x_2, x_5$ ですからこれらをパラメターとします。

4. なぜ上のようにおくと良いのでしょうか。これは既約ガウス行列の定義と関係します。第 $i$ 行の先頭の 1 のある列に対応する変数をたとえば $x_j$ とします。すると、第 $i$ 番目の方程式だけに $x_j$ が出てきます。かつその係数は 1 です。かつこの方程式にはパラメタにとった変数以外は出てきません。（なぜだか分かりますか。）ですから $x_j$ はパラメターだけで書くことができるわけです。

例で確認しましょう。

**例 3.1.1** 以下の行列を係数拡大行列とする、連立一次方程式の解は何でしょうか。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

変数を $x_1, x_2, x_3$ とすると、左は、$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$、中は、$x_1 = 2 - 5t, x_2 = 1 - t, x_3 = t$、右は、解なし。

例 3.1.1 の各行列を $B$ で表し、最後の列を除いた部分を $A$ で表すことにします。$A$ は係数行列です。既約ガウス行列となっていないものはどれでしょうか。最後のものは、既約ガウス行列ではありません。これをさらに変形して既約ガウス行列にすると、他の列（縦の並び）は変わらず最後の列だけ $0, 0, 1$ となります。変数の個数は拡大係数行列の列の数を一つへらしたものですからこれら三つとも $n = 3$ です。最後の列は方程式の右辺

に対応するものであることを思い出して下さい。係数行列の列の数が変数の数 $n$ だとしても良いですね。

最初の例では、$n = \mathrm{rank}\ B = \mathrm{rank}\ A = 3$ ですから、上の定理により、解をもち解は一組のみ。たしかに、$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ と決まります。

2 番めの例では、$n = 3 > \mathrm{rank}\ B = \mathrm{rank}\ A = 2$ ですから、上の定理により、解を無限個持ち、それは $n - \mathrm{rank}\ B = 1$ 個のパラメターで表されます。今の場合、先頭の 1 に対応する列は 1 番目と 2 番目ですから それ以外の列に対応する変数は $x_3$ ですから $x_3$ を $t$ というパラメターにおきました。ちょうど一個のパラメターで解は $x_1 = 2 - 5t, x_2 = 1 - t, x_3 = t$ と表すことができました。

3 番目の例では、$n = \mathrm{rank}\ B = 3 > \mathrm{rank}\ A = 2$ ですから、解を持ちません。

行列 $B$ と $A$ の違いは最後の列だけですから、最後の列にだけ零でない数がある行があるかどうかで、解があるかどうかが決まることになります。そう考えると、3 番目のものは、既約ガウス行列まで変形しなくても、解がないことはわかると思います。ですから、上でも既約ガウス行列ではない例が上げてあります。解を読みとるように自動的に書くためには、既約ガウス行列にしたほうが間違いが少ないと思います。階数だけで、解が丁度一個か、パラメターがいくつ必要かなどが決まるわけですから、階数を求めることは重要です。それは、実は、既約ガウス行列まで求めなくてもわかりますが、ここでは、混乱を避けるためすべて既約ガウス行列に持っていくことを勧めておきます。

特に、定理の (3) は少し難しいので、もうすこし複雑な例で確認しましょう。

例 **3.1.2** 次の行列を拡大係数行列とする方程式の解は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

この例では、先頭の 1 に対応しない列は 2, 5 ですから、$x_2 = t$, $x_5 = u$ とおいています。

### 定理の証明

さて、定理 3.1.2 の証明ですが、いますぐにはできません。しかし、拡大係数行列が、既約ガウス行列になっていれば、定理が成り立つことはそれほど難しくはありません。簡単に見てみましょう。まず、階数は既約ガウス行列に変形して、その零でない行の数でしたが、いまは、すでに既約ガウス行列になっていますから、単にその零でない行の数です。

(1) 拡大係数行列の階数と、係数行列の階数が違うとします。係数行列は、拡大係数行列の最後の列を省いた部分でした。階数（零でない行の数）がことなると言うことは、最後の列に 1（先頭の 1）がありあとはすべて零という行があることを意味しています。これは方程式で考えると、$0 = 1$ を意味しているわけですから、解はありません。

(2) 拡大係数行列の階数と、係数行列の階数が同じで、それが変数の数 $n$ と等しいとします。すると、係数行列の部分は、一番下にいくつか 0 ばかりの行が並ぶかも知れませんが、それ以外の部分は、正方形で、対角線に 1 が並んだ形になっていることがわかります。これは、方程式で考えると、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が拡大係数行列の最後の列の対応する部分の値になることを意味していますから、解は一通りに決まります。

(3) 拡大係数行列の階数と、係数行列の階数が同じで $r$、変数の数は $n$ で $n > r$ となっているとします。係数行列の列の数は変数の数と同じしたから $n$。先頭の 1 のある列は $r$ 列ですから、先頭の 1 がない列は $n-r$ 列あることになります。その列に対応する変数をパラメタとしておきます。先頭の 1 に対応する変数については、先頭の 1 のある行が表す方程式を考えると、その行の 0 でないものは、先頭の 1 に対応していない変数の列ですから、パラメターで表すことができます。これから、解を $n-r$ 個のパラメターで表すことができることがわかりました。今の決め方から、$n-r$ 個の変数の部分は何をとっても解が一組決まりますから、解は無限個、かつ、$n-r$ 個の媒介変数が必要であることがわかります。

## 3.2 行列

### 3.2.1 行列の定義と演算

今まですでに、何度も「行列 (Matrix)」という言葉を使ってきましたが、ここで、改めてその定義を述べます。

**定義 3.2.1** 1. $m \times n$ 個の数を長方形（矩形）に並べた

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を $(m, n)$ 行列、又は、$m \times n$ 行列 と言う。上の行列を略して、$A = [a_{ij}]$ などと書くこともある。

2. 二つの行列は、そのサイズ $(m, n)$ が等しく、かつ、その成分（矩形に並べた $m \times n$ 個の数）が等しいときに等しい。

3. $1 \times n$ 行列 $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ を $n$ 次行ベクトル、$m \times 1$ 行列、

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

を $m$ 次列ベクトルという。

4. 上の行列 $A$ において、左から、$j$ 番目の縦に並んだ、

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

を $A$ の 第 $j$ 列と言い、上から、$i$ 番目の横に並んだ、

$$\boldsymbol{a}'_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$$

を $A$ の第 $i$ 行と言い、$A$ を次のようにも書く。

$$A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_m \end{bmatrix}$$

5. 第 $i$ 行 第 $j$ 列を $(i,j)$ 成分と呼ぶ。上の行列 $A$ は、$(i,j)$ 成分が $a_{ij}$ であるような行列である。

ベクトルも行列の一種だと考えることができます。2 次や、 3 次のベクトルは、平面や、空間の点を対応させて、扱うこともありますが、ここでは、行列の一種と考えて、連立一次方程式の理論のなかで考えます。

次に行列に演算（足し算とスカラー倍と積）を定義する。

**定義 3.2.2** $A$、$B$ を共に同じ型（$m \times n$）の行列、$c$ を数（スカラー）とする、和 $A+B$、スカラー倍 $cA$ を成分での和と、$c$ 倍とで定義する。すなわち、

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}, cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

ここで、連立一次方程式の解に戻ってみましょう。解を、以下のように書いたのは、上の行列の和とスカラー倍の定義を使って書いたものであることがわかると思います。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ y &=& -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ z &=& t \end{array} \right. \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

**定義 3.2.3** $A=(a_{i,j})$ を $(m,r)$ 行列、$B=(b_{k,l})$ を $(r,n)$ 行列とする。このとき、$(m,n)$ 行列 $C=(c_{s,t})$ の各成分は次のようにして定義されたものとする。

$$c_{s,t}=\sum_{u=1}^{r}a_{s,u}b_{u,t}=a_{s,1}b_{1,t}+a_{s,2}b_{2,t}+\cdots+a_{s,r}b_{r,t}.$$

このとき、$C=AB$ と書き、行列 $A$ と $B$ の積という。

$$C=AB=\begin{bmatrix}\sum_{u=1}^{r}a_{1,u}b_{u,1} & \sum_{u=1}^{r}a_{1,u}b_{u,2} & \cdots & \sum_{u=1}^{r}a_{1,u}b_{u,n}\\ \sum_{u=1}^{r}a_{2,u}b_{u,1} & \sum_{u=1}^{r}a_{2,u}b_{u,2} & \cdots & \sum_{u=1}^{r}a_{2,u}b_{u,n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ \sum_{u=1}^{r}a_{m,u}b_{u,1} & \sum_{u=1}^{r}a_{m,u}b_{u,2} & \cdots & \sum_{u=1}^{r}a_{m,u}b_{u,n}\end{bmatrix}$$

積は複雑なのでゆっくり見ていきましょう。まず、行列 $A$ と 行列 $B$ をかけるときには、それぞれの行列のサイズが重要です。最初の行列 $A$ の列の数と、後の行列 $B$ の行の数が等しいときだけ積 $AB$ が定義されます。列は縦並びのもので、行は横並びでした。上の定義では、$A$ は $(m,r)$ 行列、$B$ を $(r,n)$ で確かに、$A$ の列の数は $r$、$B$ の行の数は $r$ で等しいのでかけることができます。サイズは行の数、列の数の順です。「行列」だからまず行の数そして列の数と覚えれば良いでしょう。行という漢字は横の線が多いから行は横、列という漢字は縦の線が多いから列は縦を表すと説明する人もいるようです。到底 universal ではありませんが、確かに覚えるのにはいいかも知れません。さて、かけた結果は、最初の行列の行の数と同じ行の数、後の行列の列の数と同じ数の列をもった行列になります。定義においては、結果は $(m,n)$ 行列になるわけです。さて、成分は、定義では $(s,t)$ 成分が書いてあります。これは、結果の行列の $s$ 行 $t$ 列にある数のことです。結果の行列の $s$ 行 $t$ 列を計算する時には、最初の行列 $A$ の 第 $s$ 行と、後の行列 $B$ の第 $t$ 列を使います。$A$ の 第 $s$ 行は $a_{s,1},a_{s,2},\ldots,a_{s,r}$ が横にならんでいます。$B$ の第 $t$ 列は $b_{1,t},b_{2,t},\ldots,b_{r,t}$ が縦にならんでいます。結果は、これらの 1 番目と 1 番目、2 番目と 2 番目、とかけてそれらの和をとったものです。それと、つぎのように表しています。

$$c_{s,t}=\sum_{u=1}^{r}a_{s,u}b_{u,t}=a_{s,1}b_{1,t}+a_{s,2}b_{2,t}+\cdots+a_{s,r}b_{r,t}.$$

うまくこの計算ができるためには、$A$ の第 $s$ 行にある列の数 $r$ と、$B$ の第 $t$ 列にある行の数 $r$ が等しくないといけません。それが実は、最初の積が定義できる条件でした。ここで現れる $\sum_{u=1}^{r}a_{s,u}b_{u,t}$ ですが、最初の $\sum$ はギリシャ語の $\sigma$ (シグマ) の大文字で英語の $s$ にあたります。和は summation と言いますから、和をとるといういみで $\Sigma$ が用いられています。その後ろの式、$a_{s,u}b_{u,t}$ のうち $u$ の部分を 1 から順に $r$ まで動かして得られる

$$a_{s,1}b_{1,t},a_{s,2}b_{2,t},\ldots,a_{s,r}b_{r,t}$$

の和を表すものです。結果として、右辺に現れる和となります。

なかなか複雑です。例を見てみましょう。次の例では、$A$ は $(2,3)$ 行列、$B$ は $(3,2)$ 行列です。

**例 3.2.1** 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 3 + 2\cdot 4 & 1\cdot 5 + 0\cdot 6 + 2\cdot 7 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 & 0\cdot 5 + 1\cdot 6 + 1\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 5\cdot 0 & 2\cdot 0 + 5\cdot 1 & 2\cdot 2 + 5\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 6\cdot 0 & 3\cdot 0 + 6\cdot 1 & 3\cdot 2 + 6\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 7\cdot 0 & 4\cdot 0 + 7\cdot 1 & 4\cdot 2 + 7\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \\ 4 & 7 & 15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

このように、$AB$ と、$BA$ は、そのサイズすら違います。また、たとえサイズが等しくても、殆どの場合、$AB \neq BA$ となることに注意して下さい。

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ とすると、

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 11x_1 - x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}$$

従って、$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$ とすると最初に扱った方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書くことができます。行列が等しいのは、サイズが等しくそれぞれの成分がすべて等しいということでした。ですから、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は連立方程式を表しているわけです。連立一次方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ というようなコンパクトな形に書けるようにしたのも、積を、上のように定義した一つの理由です。

3. 一般には、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書ける。その意味は、

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

が成り立つ事と、各成分が等しいこととが同値だからです。

**Note.**

1. ２つの行列に対して、積がいつも定義できるわけではありませんが、$A, B$ を共に、$(n, n)$ 行列とすると、$AB$ も、$BA$ も共に定義することが出来、どちらも $(n, n)$ 行列となります。この様に、行の数と、列の数が等しい行列はとくに重要です。これを $n$ 次正方行列、又は、単に 正方行列と言います。

2. すべて成分が零の $(m, n)$ 行列を 零行列と言い、$\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m,n}$ と書きます。$A$ を $m \times n$ 行列とすると、

$$A + \mathbf{0}_{m,n} = \mathbf{0}_{m,n} + A = A,\ A\mathbf{0}_{n,l} = \mathbf{0}_{m,l},\ \mathbf{0}_{l,m}A = \mathbf{0}_{l,n}$$

が成り立ちます。すべての成分が 0 ですから当たり前ですね。$\mathbf{0}_{n,n}$ を簡単に $\mathbf{0}_n$ と書くこともあります。零行列は、行列の世界に於ける「0 もどき」です。どんな行列に加えても変わりませんし、この行列をかけると必ず零行列になります。しかし、それぞれの場合に、どのサイズの零行列を意味しているか、注意して下さい。同じように 0 と書いてあっても、違うサイズの場合もあります。

3. 正方行列において、$i$ 行 $i$ 列の成分（$(i, i)$ 成分）を対角成分と言います。正方行列を矩形に書くと、行の数と列のかずが同じですが、その左上から右下に伸びる対角線の部分に $(i, i)$ 成分があるからです。$n$ 次正方行列で、対角成分がすべて 1 他は、すべて 0 であるような行列を、単位行列と言い、$I = I_n$ とかきます。（高校の教科書など、教科書によっては、$E = E_n$ を使っているものもあります。しかしかけ算の 1 に対応するものですから、$I$ をここでは使うことにします。）簡単に確かめられるように、$A$ を $(m, n)$ 行列、$B$ を $(n, m)$ 行列とすると、$A \cdot I = A$、$I \cdot B = B$ となっています。単位行列は「1 もどき」です。単位行列はいつでも、正方行列です。ただし、零行列のときと同じように、サイズは変化することがありますので、注意して下さい。

行列の演算に関しては、通常の数の場合と同じように次のような性質が成り立ちます。

**命題 3.2.1** 行列の演算に関して次の諸性質が成り立つ。

(1) $A + B = B + A$ （加法に関する交換法則）

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ （加法に関する結合法則）

(3) $A(BC)=(AB)C$ （乗法に関する結合法則）

(4) $A(B+C)=AB+AC$、$(A+B)C=AC+BC$ （分配法則）

(5) $cA=(cI)A$

細かい条件を書いてありませんが、たとえば、$A(BC)=(AB)C$ は、行列 $A,B,C$ において、$B$ と $C$ さらに、$A$ と $BC$ をかけることができ、右辺もこの順番でかけることができれば、等しい。と言う意味です。行列はいつでも、加えたり、かけたりする事ができるわけではないことに注意して下さい。

証明もそう難しくはありませんが、ここでは省きます。大切なのは割算を除いて大体の計算が数の場合と似た法則にしたがってできること、しかし積に関しては交換法則 $AB=BA$ が（必ずしも）成り立たないことです。もちろん、成り立つ場合もあります。たとえば $A$ を $n$ 次正方行列、$I=I_n$、$O=O_n$ とすれば、

$$A\cdot I=A=I\cdot A,\ A\cdot O=O=O\cdot A.$$

もう一つ、積においては、行列のサイズに常に注意して計算をしないといけないと言うことです。

### 3.2.2 行列の積と連立一次方程式

連立一次方程式について考えてきました。もう一度道筋を復習してみましょう。

**Step 1.** 連立一次方程式の拡大係数行列を作りそれを $B$ とする。

**Step 2.** $B$ に行に関する基本変形を何回か施して既約ガウス行列 $C$ を得る。

**Step 3.** $C$ から得られる情報をもとに、基本定理を適用して、解の存在・非存在、一つにきまるかどうか、無限個の場合のパラメーターの数を決定する。

ここで問題がありました。

1. $C$ を拡大係数行列として求めた解は、本当に最初の $B$ を拡大係数行列とする連立一次方程式の解になっているのか。($C$ の解 $\Rightarrow$ $B$ の解？)

2. $B$ を拡大係数行列とする連立一次方程式の解はすべて最後の $C$ を拡大係数行列として求めた解に含まれているのか。($B$ の解 $\Rightarrow$ $C$ の解？)

さて、一番簡単な一次方程式を考えてみましょう。たとえば $2\cdot x=4$。これを解くには、両辺を 2 で割ります。連立一次方程式は、$A$ を係数行列とすると、行列の積を用いて $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と表すことができることを前の節で見ました。それなら $A$ で割ることによって

$\boldsymbol{x}$ を求める方法はないでしょうか。上に掲げた問題とともにこの問題を考えるのが、これからの主題です。

もう一度簡単な一次方程式を考えてみましょう。$ax = b$ これから $x = b/a$ を導くのですが、正確には条件があり、$a \neq 0$ が必要でした。いま考えたいのは、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ですから、$1/A$ のようなものが存在する $A$ の条件も考えないといけなそうです。

さて、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考えたとき、$A$ に対して $BA = AB = I$ となるような $B$ があったとしましょう。$I$ は大体 1 の働きをしていましたからこの $B$ が $1/A$ の働きをするものです。すると、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = BA\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b}.$$

逆に、

$$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b} \Rightarrow A\boldsymbol{x} = AB\boldsymbol{b} = I\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

これは何を言っているのでしょうか。最初の方は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において、$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{b}$ に左から $B$ をかければ求めることができます、ということです。後の方は、$B\boldsymbol{b}$ を $A\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{x}$ に代入すると、$\boldsymbol{b}$ が得られ、$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b}$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす、行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であることを言っているわけです。したがって、このような $B$ が存在する場合は、一番最初の問題 1, 2 についても言及していることに注意して下さい。上のような $B$ を $A$ の逆行列といい、$B = A^{-1}$ と書きます。逆行列が次のトピックですが、逆行列について理解すると、1, 2 の解答も同時に得られることになります。それについては、またあとでまとめることにしましょう。

### 3.2.3　逆行列

連立一次方程式は、行列を用いて、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書けるのでした。ここで、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

さて、この方程式を一次方程式 $ax = b$ を解くのに、$a$ で割るように、$A$ で割ると言うことを考えられないかを考えます。そのため、以下のような定義をします。

**定義 3.2.4** 正方行列 $A$ について、$AB = BA = I$ を満たす正方行列 $B$ が存在するとき、$A$ は、可逆である（又は、可逆行列 (invertible matrix) [正則行列 (nonsingular matrix)] である）と言う。$B$ を $A$ の逆行列と言い $B = A^{-1}$ と書く。

実際 $A$ が可逆で、$B = A^{-1}$ とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から $B$ をかけると、

$$B\boldsymbol{b} = BA\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

逆に、$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{b}$ とすると、$A\boldsymbol{x} = A(B\boldsymbol{b}) = (AB)\boldsymbol{b} = I\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$。従って、$B\boldsymbol{b}$ が解で、解は、$B\boldsymbol{b}$ の形に限る。すなわち、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は、ただ一つです。すなわち、このような $B$ が存在するのは特殊な場合であることをまず言っておきます。上の定義自体、正方行列について逆行列を定義していることに注意して下さい。

次の定理は、複雑な形をしていますが、逆行列存在の判定条件と、実際に逆行列をもとめる方法の両方を与えるものです。

**定理 3.2.2** $A$ を $n$ 次正方行列、$I = I_n$ を $n$ 次単位行列とし、$C = [A, I]$ なる、$n \times 2n$ の行列を考える。この行列 $C$ に、行に関する基本変形を施し、既約ガウス行列に変形する。その結果を $D$ とする。もし、$D = [I, B]$ の形になれば、$B = A^{-1}$ である。もし、$D$ の左半分が、$I$ で無ければ、$A$ は、逆行列を持たない。とくに、$A$ が逆行列を持つことと、$\mathrm{rank}\, A = n$ であることとは、同値である。

上の定理の証明はあとに回し、実際にこの方法で逆行列を求めてみましょう。

**例 3.2.2**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ に対して、} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおき、次のように行の基本変形を施します。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2,1;-2]} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3,1;-3]} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2,3;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1,2;-2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[3,2;4]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2,3;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

これより、$A$ は、可逆行列で、その逆行列は、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

となります。これが、$A^{-1}A = I = AA^{-1}$ となることを確かめてみて下さい。

上の例では、定理に書いてある方法で $A^{-1}$ を求めましたが、こんな風に求まってしまうのは、驚きではないですか。私は最初正直感動しました。$A^{-1}$ の成分を未知数として方程式を立て解こうとするととても大変ですから。

例 **3.2.3**

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{に対して、} C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおき、行の基本変形を施す。

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

これは、この後、いくら変形しても、この既約ガウス行列は、$[I, B]$ の形にならないことは、明らかである。実は、rank $A = 2$ で（ここまでで分かるのは、rank $A \leq 2$）rank $A \neq 3$ なので、$A$ は、逆行列を持たない。

上の例からも分かるように、可逆かどうかを判定するだけなら、$A$ をそのまま、変形して、rank $A$ を求めれば良いことが分かりました。それには、既約ガウス行列まで変形しなくても、ガウス行列（既約ガウス行列の条件の 1-3 を満たすもの）まで変形すれば十分です。

既約ガウス行列と、ガウス行列の定義（定義 3.1.2）を確認しておきましょう。ガウス行列のほうは、3 までを満たすものです。

次のような行列を (既約) ガウス行列という。

1. もし、ある行が 0 以外の数を含めば、最初の 0 でない数は 1 である。（これを先頭の 1 という。）
2. もし、すべての数が 0 であるような行が含まれていれば、それらの行は下の方によせて集められている。
3. すべてが 0 ではない 2 つの行について、上の行の先頭の 1 は、下の行の先頭の 1 よりも前に存在する。
4. (先頭の 1 を含む列の他の数は、すべて 0 である。)

定理から関連して得られる命題を数学では「系」というので、上で得たことを系として書いておこう。

**系 3.2.3** $A$ を正方行列とするとき、$A$ が可逆すなわち、$A$ に逆行列が存在することと、$A$ から行に関する基本変形によって得られる既約ガウス行列が単位行列 $I$ となることとは同値である。

証明. まず、$G$ は、$n$ 次正方行列で、既約ガウス行列とするとき、$n = \mathrm{rank}\, G$ であれば、0 だけからなる行が一つもなく、$G = I$ である。逆に、$G = I$ であれば $\mathrm{rank}\, G = n$ である。

$A$ に行に関する基本変形を施して $I$ が得られたとすると、$[A, I]$ に同じ基本変形を施すと $[I, B]$ の形の行列になる。すると定理により $B$ は $A$ の逆行列である。また、$A$ に行に関する基本変形を施して得られた既約ガウス行列 $G$ が $I$ ではないとすると、$[A, I]$ に同じ基本変形を施すと $[G, B]$ の形の行列になる。最初に述べたことから、$\mathrm{rank}\, G \neq n$。したがって、$G$ の一番下の行はすべて 0 である。したがって、さらに変形して既約ガウス行列を得ても、左半分は $I$ にはならない。したがって定理より、$A$ は逆行列を持たない。 ■

### 3.2.4 基本変形と行列

既約ガウス行列を求めるのに、行列の行に関する「基本変形」を用いましたが、この基本変形について、もう少し考えてみることにします。

もう一度、例を見てみましょう。最初、$[2, 1; -2]$ を施しました。この意味は、「第 2 行に第 1 行の $-2$ 倍を加える」と言うことでした。しかしこれは、次の行列の計算でも得られることがわかります。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同様に、次のステップでは、$[3, 1; -3]$ すなわち「第 3 行に第 1 行の $-3$ 倍を加える」ことですが、これは

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

その後は、それぞれ、$[2, 3; -1]$, $[1, 2; -2]$, $[3, 2; 4]$, $[3; -1]$, $[2, 3; -1]$ を施していますが、これらはそれぞれ、次の行列を左から順にかけても同じ効果が得られることがわかります。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このように行に関する基本変形は左からある行列をかけることによっても実現できます。そこで、基本変形にあわせて、そのような行列に名前をつけましょう。

**$P(i;c)$:**　第 $i$ 行を $c$ 倍する行列。$(c \neq 0)$

**$P(i,j)$:**　第 $i$ 行と第 $j$ 行を交換する行列。

**$P(i,j;c)$:**　第 $i$ 行に第 $j$ 行の $c$ 倍を加える行列。

これらはもちろん考えている行列のサイズによるわけですが、たとえば上の例のように、行の数が 3 のときは、次のようになります。

$$P(2,3;-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P(1,2;-2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P(3,2;4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P(3;-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ P(2,3;-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上で出てこなかった行の入れ換えをする行列も書いておきましょう。

$$P(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P(1,3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

実は、これらは、$I$ に、求めたい行に関する基本変形を施すと、求める行列がえられるという仕組みになっています。たとえば、$P(2,3;-1)$ は、$I$ の第 2 行に第 3 行の $-1$ 倍を加えたもの、$P(3;-1)$ は、$I$ の第 3 行に $-1$ をかけたもの、$P(1,2)$ は $I$ の第 1 行と第 2 行を入れ換えたものです。

なぜでしょうか。例えば $P = P(i,j;c)$ としましょう。$P \cdot I$ は $I$ に $[i,j;c]$ を施したものになってほしいわけです。しかし、単位行列 $I$ の性質から $P \cdot I = P$ でしたから、$P$ は確かに $I$ に $[i,j;c]$ を施したものになっているわけです。

実は、$P(i,j;c)$ は、$(i,j)$ 成分が $c$ であとは、$I$ と同じ行列になっています。最初に $[i.j;c]$ などの名前を決める時、このようになることを最初から考えて決めていたわけです。わかってしまえば行列を書くのも簡単ですね。

このことを用いると、さらに以下の事が分かります。

**命題 3.2.4**　(1) $P(i;c)P(i;1/c) = P(i;1/c)P(i;c) = I$。すなわち、$P(i;c)^{-1} = P(i;1/c)$。

(2) $P(i,j)P(i,j) = I$。すなわち、$P(i,j)^{-1} = P(i,j)$。

(3) $P(i,j;c)P(i,j;-c) = I$。すなわち、$P(i,j;c)^{-1} = P(i,j;-c)$。
特に、基本変形に対応する行列、$P(i;c), P(i,j), P(i,j;c)$ はすべて可逆である。

証明. $P(i;c)P(i;1/c) = P(i;c)P(i;1/c)\cdot I$ はまず $I$ の第 $i$ 行を $1/c$ 倍し、次に同じ第 $i$ 行を $c$ 倍しますから、結局何もしないのと同じで、結果は $I$ となります。他のものも同じですから、自分で証明してみて下さい。 ■

**例 3.2.4** 上の例で出てきた $P(2,1;-2)$ の逆行列が $P(2,1;2)$ であることを確かめてみましょう。

$$P(2,1;-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P(2,1;-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ですから、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

これを用いて逆行列を求める計算の基本変形を行列の積で書いてみましょう。

**例 3.2.5**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ に対して、} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおき、行の基本変形を施す。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{[1,2]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{[3,1;-3]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{[1,2;-2]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{[3,2;4]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{[3,-1]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \overset{[2,3;-1]}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

これより、$A$ は、可逆行列で、その逆行列は、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

となります。

### 3.2.5　連立一次方程式と可逆性

さて、行に関する基本変形を行列で表しましたが、これを用いていくつかのことを考えてみよう。

まずは、次の補題から。（定理の準備をする命題を補題といいます。）

**補題 3.2.5** $P, Q$ を 可逆な $n$ 次正方行列とすると、$P^{-1}$ も可逆で $(P^{-1})^{-1} = P$。また、積 $PQ$ も可逆で $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$ である。さらに、$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ をすべて可逆な $n$ 次正方行列とすると、積 $P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1$ も可逆で、

$$(P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1)^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}\ldots P_{n-1}^{-1}P_n^{-1}.$$

*証明.* $Q^{-1}P^{-1}PQ = Q^{-1}Q = I,\ PQQ^{-1}P^{-1} = PP^{-1} = I$ より、$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$。一般の場合も同様。 ■

**補題 3.2.6** $A$ を $m \times n$ 行列とし、$A$ に行に関する基本変形を行って、行列 $B$ が得られたとする。すると、$m$ 次可逆行列 $P$ で、$PA = B$ となるものがある。

*証明.* 上で見たように、ある行列に行に関する基本変形を施すことは、それに対応する基本行列を左からかけることであった。$A$ に施した基本変形に対応する基本行列を、$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ とする。$P = P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1$ とすると、

$$B = P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1A = PA.$$

さらに $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ は、命題 3.2.4 で見たように可逆だから、補題 3.2.5 により、$P$ は、可逆である。 ■

ここで、定理 3.2.2 の証明する。まず、定理を再掲する。

> $A$ を $n$ 次正方行列、$I = I_n$ を $n$ 次単位行列とし、$C = [A, I]$ なる、$n \times 2n$ の行列を考える。この行列 $C$ に、行に関する基本変形を施し、既約ガウス行列に変形する。その結果を $D$ とする。もし、$D = [I, B]$ の形になれば、$B = A^{-1}$ である。もし、$D$ の左半分が、$I$ でなければ、$A$ は、逆行列を持たない。とくに、$A$ が逆行列を持つことと、$\operatorname{rank} A = n$ であることとは、同値である。

**定理の証明:** $X, Y$ を $n$ 次正方行列とし、行列 $[X, Y]$ に行に関する基本変形を施し、その基本変形に対応する基本行列を $P$ とする。すると、行に関する基本変形を、$X$、$Y$ それぞれを変形することと同じだから、結果は、$P[X, Y] = [PX, PY]$ である。このことを用いると、行列、$C = [A, I]$ に行に関する基本変形を施し、$D = [I, B]$ を得たとする。$C$ に施した基本変形に対応する基本行列を、$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ とする。$P = P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1$ とすると、

$$[I, B] = D = P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1C = P[A, I] = [PA, P].$$

従って、$PA = I$、$B = P$。$P$ は、可逆行列の積だったから $P$ も可逆。$PA = I$ より、

$$P^{-1} = P^{-1}I = P^{-1}PA = A$$

より、$B = P = A^{-1}$ である。

さて、既約ガウス行列 $D$ の左半分を $L = PA$ とし、$L$ が $I$ でなければ、既約ガウス行列の定義から、$L$ の第 $m$ 行（一番下の行）はすべて 0 である。即ち、rank $L = r < n$。さて、定理 3.1.2 は次のようなものであった。

> $n$ 個の変数を持つ連立一次同次方程式の拡大係数行列の階数を $r$ とする。すると、これは係数行列の階数とも等しい。$n = r$ ならば、この連立一次同次方程式の解は、$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ のみであり、$n > r$ ならば、$n - r$ 個のパラメターを用いて解を書くことができる。とくに解は、無限個ある。

これにより、$n$ 次列ベクトル $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ で $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となるものが存在する。ここで、もし $A$ が可逆であるとすると、$L = PA$ も可逆だから、

$$\boldsymbol{0} = L^{-1}\boldsymbol{0} = L^{-1}L\boldsymbol{y} = I\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$$

となり、これは矛盾。従って、$A$ は、可逆ではない。 ■

系 **3.2.7** $A, B$ を $n$ 次正方行列とする。このとき、$AB = I$ ならば、$A$ も $B$ も可逆行列で、$BA = I$ である。可逆行列は、基本行列の積で書ける。

*証明.* $B$ が可逆でないとすると、$n$ 次列ベクトル $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ で、$B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となるものが存在する。すると、

$$\boldsymbol{0} = A\boldsymbol{0} = AB\boldsymbol{y} = I\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$$

となり、矛盾。従って、$B$ は、可逆である。これより、

$$B^{-1} = IB^{-1} = ABB^{-1} = A$$

となり、$BA = BB^{-1} = I$。最後の部分は、$A$ の行による基本変形で、階数が、$n$ より小さい既約ガウス行列が得られると、$n$ 次列ベクトル $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ で、$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となるものが存在するから、上と同様にして、矛盾が得られる。これから、結果が得られる。 ■

連立一次方程式に戻る。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と行列で表示する。拡大係数行列を、$[A, \boldsymbol{b}]$ とし、これに基本変形を次々に施すと、それに対応する基本行列の積を $P$ として、$P[A, \boldsymbol{b}] = [PA, P\boldsymbol{b}]$ となる。これは、$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ に関する拡大係数行列である。$P$ は、可逆であることから、次のことが分かる。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}.$$

すなわち、$\boldsymbol{x}$ が、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たせば、$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ を満たし、逆に、$\boldsymbol{x}$ が、$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ を満たせば、 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす。従って、基本変形を行っても解は、変わらないのであった。

**定理 3.2.8** $A$ を $n$ 次正方行列とする。次は同値である。

(i) $BA = AB = I$ を満たす $n$ 次正方行列 $B$ が存在する。

(ii) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は、$\boldsymbol{b}$ を一つ決めるといつもただ一つの解を持つ。

(iii) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はただ一つの解を持つ。

(iv) $A$ に行の基本変形を施し得られる既約ガウス行列はいつでも単位行列 $I$ である。

(v) $A$ に行の基本変形を施すと単位行列 $I$ が得られる。

(vi) $A$ は、基本行列のいくつかの積で書くことが出来る。

(vii) ($\det A \neq 0$。)

### 3.2.6　$2 \times 2$ 行列*

$(2, 2)$ 行列についてまとめておく。

**例 3.2.6** $2 \times 2$ 行列の逆行列は簡単に求められます。

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

実際、

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = I$$

同様にして、

$$A^{-1}A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = I$$

例えば、

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

従って、$ad - bc \neq 0$ ならば、逆行列を持つことがわかりました。逆行列を持てば、いつでも、$ad - bc \neq 0$ でしょうか。一つの方法は、行列式と言われるものを使う方法です。一般に、$2 \times 2$ 行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

について、$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ と定義します。成分が $a, b, c, d$ の時は、$ad - bc$ となります。すると、

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= \det A \det B \end{aligned}$$

であることに注意すると、$AB = I$ ならば、$\det I = 1$ ですから、

$$\det A \det B = \det I = 1$$

となります。従って、$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ となります。以下に命題の形でまとめておきます。

**命題 3.2.9** $2 \times 2$ 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ に対して、$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ と定義する。

(1) $A, B$ を $2 \times 2$ 行列とすると、$\det AB = \det A \det B$。

(2) $A$ が可逆であることと、$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ とは、同値であり、そのとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

それでは、行列が、$2 \times 2$ よりも大きいときは、どうでしょうか。その場合も行列式と言われる det に対応するものが定義できて、大体、上の命題に対応する事が成り立ちます。それは、線形代数学 I などで勉強して下さい。

### 3.2.7　連立一次方程式まとめ

以下に連立一次方程式についてまとめる。

1. 連立一次方程式は行列方程式で表すことができる。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

   に対しては、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

   とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書ける。

2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列は $B = [A, \boldsymbol{b}]$ であった。これに、基本変形を何回か施して、$C = [A', \boldsymbol{b}']$ となったとしよう。それは可逆行列 $P$ をかけることと同じであった。したがって、

$$[PA, P\boldsymbol{b}] = P[A, \boldsymbol{b}] = PB = C = [A', \boldsymbol{b}'],$$

   これより、$A' = PA$, $\boldsymbol{b}' = P\boldsymbol{b}$ である。

   さて、次を証明する。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'.$$

   まず、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とする。これに、$P$ を左からかけると、$A'\boldsymbol{x} = PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$ すなわち、$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ が得られた。逆に、$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ とする。$P$ は可逆行列だったから逆行列が存在する。それを $P^{-1}$ とかき、これを $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ に左からかけると、$P^{-1}A'\boldsymbol{x} = P^{-1}PA\boldsymbol{x} = IA\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ 一方、$P^{-1}\boldsymbol{b}' = P^{-1}P\boldsymbol{b} = I\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ だから、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が得られた。

   これは何を言っているのだろうか。$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ を満たし、逆に $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす。これは、とりも直さず、宿題になっていた問題の答となっている。

   (a) $C$ を拡大係数行列として求めた解は、本当に最初の $B$ を拡大係数行列とする連立一次方程式の解になっている。($C$ の解 $\Rightarrow$ $B$ の解)

   (b) $B$ を拡大係数行列とする連立一次方程式の解はすべて最後の $C$ を拡大係数行列として求めた解に含まれている。($B$ の解 $\Rightarrow$ $C$ の解)

3. $\boldsymbol{x}_0$ は、$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ を満たす $n$ 次列ベクトルとする。$\boldsymbol{x}$ が、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすとすると、

$$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

だから、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ とおくと、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ で、$\boldsymbol{y}$ は、$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ を満たす $n$ 次列ベクトルになっています。$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の形のものすなわち、$\boldsymbol{b}$ に対応する部分が $\boldsymbol{0}$ になっているものを同次方程式とよびます。逆に、$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{y}$ を取ると、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす。

$$A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}.$$

この様に、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす解一つと、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす解すべてが分かれば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解はすべて分かる。$\boldsymbol{x}_0$ を特殊解 と言い、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ の形のすべての解を表すものを一般解と言います。

例えば一番最初に考えた連立一次方程式、

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

の場合、一般解は、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

と書くことができますが、特殊解は、いろいろとあり、例えば、$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ です。一方、$t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす解の一般形という形になっています。

4. 一般解を求めたり、解の存在非存在を決定するのには、拡大係数行列を考えて、これに行に関する基本変形を施し、ガウス行列、又は、既約ガウス行列にすることによって求めることができます。

   (a) 行に関する基本変形は 3 種類 $P(i;c)$、$P(i,j)$、$P(i,j;c)$ の基本行列という可逆な行列を左からかけることによって実現しました。これより、基本変形によって、解は変わらないことが示せました。すなわち、基本変形前の拡大係数行列に対応する解と、基本変形後の拡大係数行列に対応する解は、同じものである。

   (b) 係数行列の階数と、拡大係数行列の階数が等しいときは、解が存在し、それらが等しくないときは解は存在しない。

   (c) 解が存在する場合は、変数の数と、拡大係数行列の階数の差が、解を表すときの自由変数（パラメター）の数である。

## 3.3　お茶の時間

### 3.3.1　経済における均衡分析

均衡分析 (Balance Analysis) と言われるものを紹介しましょう。

市場均衡モデル

ある商品市場は、需要 (demand) の量 $D$ と、供給 (supply) の量 $S$、および価格 (price) $P$ によって決まる。需要 $D$ は価格 $P$ が増加するにつれ、減少する傾向にある。ここでは、$a, b$ を正の定数として、

$$D = a - bP$$

と表せると仮定しよう。逆に、供給 $S$ は価格 $P$ が増加すれば増加する傾向にあるので、正の定数 $c$ と $d$ に対し

$$S = c + dP$$

によって与えられるものと仮定する。このような市場では、需要と供給のバランスがとれることによって、均衡を保つと考えられる。したがって、

$$D = S$$

が成り立っている。これらを連立方程式で表せば

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} D & & & + & bP & = & a \\ & & S & - & dP & = & c \\ D & - & S & & & = & 0 \end{array}\right.$$

となる。この拡大係数行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -d & c \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

行に関する基本変形を行なってみましょう。

$$[3,1;-1] \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -d & c \\ 0 & -1 & -b & -a \end{bmatrix}.$$

$$[3,2;1] \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -d & c \\ 0 & 0 & -b-d & -a+c \end{bmatrix}.$$

$$[3;\frac{-1}{b+d}] \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & -d & c \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a-c}{b+d} \end{bmatrix}.$$

$$[1,3;d] \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{ad+bc}{b+d} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a-c}{b+d} \end{bmatrix}.$$

$$[2,1;-b] \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{ad+bc}{b+d} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{ad+bc}{b+d} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a-c}{b+d} \end{bmatrix}.$$

これより、

$$D = S = \frac{ad+bc}{b+d},\ P = \frac{a-c}{b+d}$$

が得られる。$D = S$ は最初からわかっていましたから、ちょっと遠回りをしました。変形にもう少し工夫はありますか。

もう少し複雑な市場を考えてみよう。二つの商品の価格 $P_1$ と $P_2$ の一次関数として、需要量 $D_1$, $D_2$ および供給量 $S_1$, $S_2$ が決まるものと仮定する。もちろん、需要と供給の均衡条件を満たしているものとする。

$$\begin{cases} D_1 &=& S_1 \\ D_1 &=& a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 \\ S_1 &=& b_0 + b_1P_1 + b_2P_2 \\ D_2 &=& S_2 \\ D_2 &=& \alpha_0 + \alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 \\ S_2 &=& \beta_0 + \beta_1P_1 + \beta_2P_2 \end{cases}$$

ここで、$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ はすべて定数である。未知数を $D_1$, $S_1$, $D_2$, $S_2$, $P_1$, $P_2$ として、この連立方程式の拡大係数行列を書くと、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\beta_1 & -\beta_2 & \beta_0 \end{bmatrix}$$

ここで、既約ガウス行列に変形すれば解がえられます。または、

$$Q_1 = D = S_1,\ c_1 = a_1 - b_1, \gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1, c_0 = a_0 - b_0$$

$$Q_2 = D = S_2,\ c_2 = a_2 - b_2, \gamma_2 = \alpha_2 - \beta_2, \gamma_0 = \alpha_0 - \beta_0$$

とおくと、

$$\begin{aligned} c_1P_1 + c_2P_2 &= -c_0 \\ \gamma_1P_1 + \gamma_2P_2 &= -\gamma_0 \end{aligned}$$

これを解くのは、それほど難しくありません。$P_1,\ P_2$ をまず求めて、それから、他のものを求めてみて下さい。

さて、三つ以上の商品の価格、需要量、供給量の場合はどうでしょうか。もう手に負えませんか。実は、方程式自体が簡単な形をしているので、一般に $n$ 個の商品の場合にも、解を求めることができます。ここでは、方的式だけ書いておきましょう。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Q_i &=& D_i = S_i \\ D_i &=& a_{0i} + a_{1i}P_1 + a_{2i}P_2 + \cdots + a_{ni}P_n \\ S_i &=& b_{0i} + b_{1i}P_1 + b_{2i}P_2 + \cdots + b_{ni}P_n \end{array} \right.$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

ケインズによる国民所得モデル

消費 (consumption) の量 $C$ は、所得 (income) $Y$ の増加関数と考えられるので

$$C = a + bY \ (0 < a,\ 0 < b < 1)$$

と仮定することができよう。消費量 $C$ に投資 (investment) の額 $I$ を付け加えたものが所得 $Y$ と均衡するので

$$Y = C + I$$

でなくてはならない。一方、貨幣のある経済社会では、金利 $R$ が上がれば、投資額 $I$ は減少すると考えられるので

$$I = c - dR \ (0 < c,\ 0 < d)$$

と仮定することができる。他方、貨幣の需要 $M_d$ は所得 $Y$ の増加関数で、金利 $R$ の減少関数と考えられるので

$$M_d = e + fY - gR \ (0 < e,\ 0 < f,\ 0 < g)$$

と仮定しておく。

貨幣の供給 $M_s$ は中央銀行の政策によって決められると考えられるから、その供給値を一定値 $M_0$ とすると、

$$M_s = M_0$$

である。さらに、貨幣の需要と供給は均衡しているとすれば

$$M_d = M_s$$

である。以後、簡単のため、$M_0 = M_d = M_s$ とし、$M_0$ を定数扱いとする。$C$, $Y$, $I$, $R$ についての連立方程式を考えると、

$$\begin{cases} C & -bY & & & = & a \\ -C & +Y & -I & & = & 0 \\ & & I & +dR & = & c \\ & fY & & -gR & = & M_0 - e \end{cases}$$

これを、条件を用いて解くと、

$$\begin{aligned} C &= \frac{bd(M_0-e)+bcg+ag+adf}{g(1-b)+df} \\ Y &= \frac{d(M_0-e)+g(a+c)}{g(1-b)+df} \\ I &= \frac{(1-b)(d(M_0-e)+cg)-adf}{g(1-b)+df} \\ R &= \frac{-(1-b)(M_0-e)+f(a+c)}{g(1-b)+df} \end{aligned}$$

となる。

$C$, $Y$, $I$ での $M_0$ の係数はすべて正であるが、$R$ での $M_0$ の係数だけは負である。したがて、中央銀行は、貨幣の供給量 $M_0$ を増やすことにより、金利 $R$ を下げ、その結果、投資 $I$ をうながし、さらに、所得 $Y$ を増大させることによって、消費 $C$ をも助長できることを示している。

### 政府と外国貿易

こんどは、政府の関与および外国貿易が介在する場合を考えてみる。

所得 $Y$ に対し、一定の税率 $t$ を掛けたものを税金 (tax) $T$ として徴収する社会を考える。

$$T = tY \ (0 < t < 1)$$

可処分所得 $Y_d$ とは、税引き後の所得であるから

$$Y_d = Y - T = (1-t)Y$$

が成り立つ。消費 $C$ は $Y$ の増加関数というよりも、$Y_d$ の増加関数と見るべきであるから、

$$C = a + bY_d = a + b(1-t)Y \ (0 < a,\ 0 < b < 1)$$

と修正される。さらに、国民所得 $Y$ は、消費 $C$ と投資 $I$ の和だけでなく、政府による支出 $G$ を加えなければならないし、輸出 $X$ と輸入 $M$ との差 $X - M$ を加えなければならない。したがって、所得方程式は

$$Y = C + I + G + X - M$$

によって与えられる。

一方、輸入 $M$ は可処分所得 $Y_d$ に比例する。

$$M = mY_d = m(1-t)Y \ (0 < m).$$

これを上の所得方程式に代入すると、

$$(1 + m(1-t))Y = C + I + G + X$$

がえられる。

あとは、前の節で見たように、投資 $I$ は金利 $R$ の減少関数として表せるし、貨幣の需要 $M_d$ と供給 $M_s$ は、中央銀行の供給量 $M_0$ と一致し、それは所得 $Y$ の増加関数で、金利 $R$ の減少関数と考えることができよう。

$$I = c - dR \quad (0 < c,\ 0 < d)$$

$$M_0 = M_d = M_s = e + fY - gR$$

$$(0 < e,\ 0 < f,\ 0 < g)$$

これまでの式を整理する。ここでの小文字 $a, b, c, d, e, f, g, m, t$ などはすべて正の定数（他の条件によって決まる一定の定数）で、$b$ と $t$ は 1 より小さい。さらに、$a$ は所得 $Y$ に比べて無視できる程小さな定数で $b > m$ と考えて差し支えない。なぜなら、所得 $Y$ に対する消費 $C$ の平均増加率 $C/Y$ は微小所得変動量 $\Delta Y$ に対する、微小消費変動量 $\Delta C$ の比 $\Delta C/\Delta Y$ に等しいとする根拠があるからである。これを認めれば

$$b(1-t) = \frac{\Delta C}{\Delta Y} = \frac{C}{Y} = \frac{a}{Y} + b(1-t)$$

がえら得るので $a/Y = 0$ と考えられる。

一方、消費輸入量 $M$ は総消費額 $C$ より小さいので

$$C - M = a + (b-m)(1-t)Y > 0$$

この $a$ は $Y$ に比べて小さいので $(b-m)(1-t) > 0$ でなければならない。したがって $m < b < 1$ である。

以下の連立方程式において、$M_0$, $G$, $X$ を定数としてあつかうとする。すると、未知数は $C$, $Y$, $I$, $R$ の四つである。

$$\begin{cases} C - b(1-t)Y = a \\ -C + (1 + m(1-t))Y - I = G + X \\ I + dR = c \\ fY - gR = M_0 - e \end{cases}$$

$0 < b - m < 1,\ 0 < 1 - t < 1$ より $(b-m)(1-t) < 1$ を利用しこれを解くと、$D = g(1-(b-m)(1-t)) + df$ とおいて、

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{D}(bd(1-t)(M_0 - e) + bg(1-t)(G + X + c) \\
&\quad + ag(1 + m(1-t)) + adf) \\
Y &= \frac{d(M_0 - e) + g(G - X + a + c)}{D} \\
I &= \frac{1}{D}((1-(b-m)(1-t)) \times \\
&\quad (d(M_0 - e) + cg) - df(G + X + a)) \\
R &= \frac{1}{D}(-(1-(b-m)(1-t))(M_0 - e) \\
&\quad + f(G + X + a + c)
\end{aligned}
$$

小文字はすべて正で、$0 < 1 - t,\ 0 < b - m < 1,\ 0 < (b - m(1-t)) < 1$ などを利用すると次の事実がわかる。

1. 消費 $C$、所得 $Y$ と投資 $I$ は、中央銀行の貨幣発行額 $M_0$ の増加関数であり、金利 $R$ のみが $M_0$ の減少関数である。

2. 消費 $C$、所得 $Y$ と金利 $R$ は、政府助成金 $G$ と輸出額 $X$ の増加関数であるが、投資額 $I$ のみは、$G$ と $X$ の減少関数となっている。

   ここで $t = m = G = X = 0$ とすれば前節の国民所得モデルと一致する。

以上の分析は極めて単純であった。増加関数であるときは、一次増加関数と考え、減少関数であると考えられる時には、一次減少関数と考えて処理した。したがって複雑な経済減少を扱うには、あまりにも単純化しすぎていて、実態にそぐわないのではないかと考えられるかも知れない。しかし、このように単純化したものであっても、最後の計算結果は、何がしかの新しい情報をわれわれに与えてくれていることは極めて興味深い。

今後の考察の方法としては、非線形として扱うことであり、他面では微積分を利用した局所的扱いをすることも考えられよう。

この節の内容は、[6] から取っています。

### 3.3.2 オーディオ CD のなかの線形代数

誤り訂正符号

これが、今日のタイトルのオーディオ CD です。[1]CD は皆さんもご存知のように、コンパクト・ディスクの略です。最近良く利用されているのは、他にも DAT や、MD が一般的でしょうか。もっと大容量の記憶装置を持っているものも出てきています。DAT は、デジタル・オーディオ・テープ、MD は ミニ・ディスクでしょうか。これらに共通のもの

[1]2003 年度 ICU オープンキャンパスでの模擬授業の一部を改編。

は、保存されているデータがすべて「デジタル」だということです。デジタルという言葉は、世の中に溢れていますね。ちょっと広辞苑で調べてみましたら、「ある量またはデータを、有限桁の数字列（例えば２進数）として表現すること。アナログの対語とあります。アナログは「ある量またはデータを、連続的に変化しうる物理量（電圧・電流など）で表現すること。」となっていました。デジタル化されているとは、数字になっていると言うことだと思いますが、たとえばオーディオの場合、なぜデジタルなのでしょうか。昔のレコード盤でも良いのではないでしょうか。今も、もちろんその愛好家もいるわけですが。みなさんはなぜだと思いますか。なぜ、デジタルなのでしょうか。

さて、理由は、いろいろとありますが、今日はその中の誤り訂正という話しをしようと思います。実は、デジタル化によって誤り訂正という技術が非常に有効に使われるようになっているのです。

誤り訂正？:

$\boxed{\textbf{music data}} \Rightarrow \boxed{\textbf{encoder}} \Rightarrow \boxed{\textbf{CD, MD}} \Rightarrow \boxed{\textbf{decoder}} \Rightarrow \boxed{\textbf{player}}$

途中が問題ですが、エラーは、CD の場合には、ホコリや傷に対応します。ノイズが関係する場合もあります。このことからも容易に想像できるように、携帯電話や、衛星放送などの通信技術にこの技術が利用されています。皆さんは、携帯電話を英語で何と呼ぶか知っていますか。“cellular phone” とか “cell phone” と呼びますね。“portable telephone” とか、“mobile phone” ということばも一部の地域では使われているようですが。これは地域を小さなセル（小さく区切った部屋）に分けて、その中にアンテナをおいて通信をするわけです。この話しも誤り訂正の基本理論ととても関係があるので、時間があればあとで少しお話します。

**Hamming Code:**

ともかく、どんなふうになるかちょっとやってみましょう。

最初に必要なのは、二つの行列です。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

さて、データは2進4桁とします。0, 1 が4つ並んだものです。今日は、$(3,8)$ という二つの数を取り上げてみましょう。ここでは、もともと数を扱いましたが、これが音のデータだったりするのです。この2進表示は、$(0011),(1000)$ となります。一番下の位は、$1=2^0$、次は $2=2^1$、次は、$4=2^2$、一番上の位が $8=2^3$ を表します。こういうことは知っているよと言う人はどのくらいいますか。これは2進表示といいますが、それでは、負の数や、少数は2進では、どうあらわしたらよいかわかりますか。考えてみて下さい。今日は、それは必要ありませんから、先にいきましょう。

これを CD に書き込むと、noise 汚れや傷がついて、0 が 1 または、1 が 0 に変わると、他の数を表すことになりますから、これにちょっと付け加えて送ります。$a$ のかわりに、$a\cdot G$ を使います。0 と 1 の世界の足し算を、次のように約束しておきます。

$K=\{0,1\}$ の足し算：

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

そして、$(0011)\cdot G$ は、$G$ の第3行目と第4行目を、それぞれの列ごとに、足すと考えて下さい。桁あがりなどはありませんよ。$1+1=0$ ですから。すると、

$$\begin{aligned} 3 &: (0011)\cdot G=(0010110)+(0001111)=(0011001) \\ 8 &: (1000)\cdot G=(1000011) \end{aligned}$$

0, 1 のかけ算を

$$0\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=0,\ 1\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1$$

としておけば、これは、行列のかけ算をしていることだということもわかると思います。

さて、noise があり、これらが変わったとして、そこで得たものが $x$ だとしましょう。このとき、今度は、$x\cdot H$ を計算します。これも同じです。1のあるところの行を足すと考えて下さい。例えば、

$$(0011001)\to(0011011)\cdot H=(011)+(100)+(110)+(111)=(110)$$

これは2進数の 6 を表しますから 6 番目にノイズが入ったことがわかります。

ではなぜうまくいくのかを考えてみましょう。

| | $u$ | $u \cdot G$ | $wt$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0000 | 0000000 | 0 |
| 1 | 0001 | 0001111 | 4 |
| 2 | 0010 | 0010110 | 3 |
| 3 | 0011 | 0011001 | 3 |
| 4 | 0100 | 0100101 | 3 |
| 5 | 0101 | 0101010 | 3 |
| 6 | 0110 | 0110011 | 4 |
| 7 | 0111 | 0111100 | 4 |
| 8 | 1000 | 1000011 | 3 |
| 9 | 1001 | 1001100 | 3 |
| $A$ | 1010 | 1010101 | 4 |
| $B$ | 1011 | 1011010 | 4 |
| $C$ | 1100 | 1100110 | 4 |
| $D$ | 1101 | 1101001 | 4 |
| $E$ | 1110 | 1110000 | 3 |
| $F$ | 1111 | 1111111 | 7 |

(3.4)

$$\begin{aligned} C &= \{u \cdot G \mid u \in K^4\} \\ &= \left\{ \begin{array}{llll} (0000000), & (0001111), & (0010110), & (0011001), \\ (0100101), & (0101010), & (0110011), & (0111100), \\ (1000011), & (1001100), & (1010101), & (1011010), \\ (1100110), & (1101001), & (1110000), & (1111111) \end{array} \right\} \subset V = K^7 \end{aligned}$$

とすると、

$$c + c' \in C \ \text{ for every } c, c' \in C$$

となっています。保存されるのは、$C$ の要素ということになります。Code word と呼ばれますから、その全体を $C$ で表しています。このことを、$C$ は足し算に関して閉じているといいます。

実は、$\cdot$ という演算が、

$$u \cdot G + v \cdot G = (u + v) \cdot G \tag{3.5}$$

を満たすことがわかると、その理由もわかります。

さらに、$c \in C$ とすると、いつでも、

$$c \cdot H = O$$

であることがわかります。実は、$G$ の各行 $g$ について、$g \cdot H = (000)$ であることを確かめれば、あとは、性質 (3.5) からわかります。行列の積を使えば、

$$G \cdot H = O$$

を確かめて、あとは、$c \cdot H = (u \cdot G)H = d \cdot (GH)$ ということからもわかります。結局、普通に送られたものに、$H$ をかけてみると (000) がえられるということです。これが送られてくれば、0 列目にあやまりがありますよ。という意味だったわけです。さて、ここで、

$$\begin{aligned} e_1 &= (1000000) \\ e_2 &= (0100000) \\ e_3 &= (0010000) \\ e_4 &= (0001000) \\ e_5 &= (0000100) \\ e_6 &= (0000010) \\ e_7 &= (0000001) \end{aligned}$$

としましょう。$c \in C$ とし、$i$ 番目の bit に error が起こった時は、$c + e_i$ が得られるので、$(c + e_i) \cdot H$ を計算すると、性質 (3.5) から、$e_i \cdot H$ が得られ、$H$ の 第 $i$ 列めが得られます。しかし、 $H$ の第 $i$ 列は、2 進数の $i$ を表しているから、$i$ を特定することができる。したがって、一箇所にしか error が起こっていない時は、その位置を特定し、修正することが可能だということです。

なぜ、うまくいくかを、他の面から考えてみましょう。$x, y \in V = K^7$ とし、

$$\mathrm{dist}(x, y) = \text{ことなる成分の個数}$$

で定義すると、

$$\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(x - y, 0) = x - y \text{ のゼロでない成分の個数} = wt(x - y)$$

となります。$c, c' \in C$ を $c \neq c'$ とすると、$c - c'$ はゼロではない、$C$ の要素だから、表から $\mathrm{dist}(x - y, 0) \geq 3$ となっている。つまり $C$ の要素はお互いに、距離 3 以上離れているので、一箇所ぐらい変わっても、もとの位置を特定できる。という関係になっているのです。

冗長さが、誤り訂正の働きをしてくれる。実は、これは、日常生活の中でもあることで、自然言語を使う場合、冗長さを持つことにより、完全に聞きとることができなくても、また話者のことばが完全ではなくても、必要な内容は伝えることができる場合が多い。

余談ですが、DNA に含まれる塩基列の解明が進み、そのなかに組み込まれている遺伝情報が読みとれるようになってきていますが、そのなかで遺伝情報に関係していない、intron という部分がかなりの部分を占めています。しっかりとは理解できていませんが、細胞内で合成するタンパク質についての情報をもった RNA を転写して DNA からつくり出す時に使われない部分がたくさんあるということではないかと思います。高等生物であっても、下等生物であっても、遺伝子の数はそれほどちがわないが、intron は大分違っている。これは、進化の過程の「試行錯誤」のなかで不要になったもの、ともいわれているようですが、ひょっとして、今ここでお話した、誤り訂正などのために働いてはいないかなと夢のような話しも生物のかたと話す時に考えています。

**CD の符号:**

今、紹介したのは Hamming (7,4,3) 符号というものです。1950 年ごろに作られたものです。長さが 7、情報の場所が 4 桁、最小距離が 3 と言う意味です。どういう符号がいい符号でしょうか。長さに対して、情報の場所が大きくかつ最小距離も大きいものがよい符号です。

実際に CD や MD で使われているのは、2 重符号化 Reed-Solomon Code と言われているものです。最初に、$K = \{0, 1\}$ に足し算とかけ算を定義しましたが、Read-Solomon Code の場合には、要素が $2^m$ の集合に、四則演算を定義します。四則演算が定義された集合を体といいますが、これをつかって符号を定義するのです。それには、もう少し、複雑な代数が必要です。

**Perfect Code:**

$C \subset K^n$ 長さが $n$ の $e$-重誤り訂正符号。$C$ の要素のお互いの距離が $d = 2e + 1$ 以上離れていることが必要です。$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in C$ とすると、$x$ との距離が 1 ということは、$x$ と成分がどこか一つことなるということでしたから、そのようなものの数は、$n$ 個。距離が 2 離れている点は、${}_nC_2$ だけありますから、そのようにして考えると、

$$\bigcup_{c \in C} B_e(c) \subset V \quad \text{(disjoint)}$$

から

$$|C| \cdot \sum_{i=0}^{e} {}_nC_i \leq |K^n| = 2^n$$

となっているはずです。今の場合は、$e = 1$、$d = 3$ だから

$$2^4 \cdot \sum_{i=0}^{1} {}_7C_i = 2^4(1 + 7) = 2^7 = |K^7|$$

ですから、単に不等式になっているのではなく、等式になっているわけです。これは、各 $C$ の要素から距離が $0, 1, \ldots, e$ の点を合わせるとすべての $K^n$ の点が得られるという場合です。この様に上の等式を満たす符号 (code) を完全符号 (perfect code) と呼びます。上の Hamming (7,4,3) 符号は perfect code の例になっています。

長さ $n$、符号の次元が $k$、最小距離が $d$ である（2 元）線形符号を $(n, k, d)$ 符号といいます。$d \geq 2e + 1$ のとき、この符号は $e$ 重の誤り訂正をすることができます。

**Golay Code:**

もう一つすごい符号を紹介しましょう。

$$
G = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
$$

11 で割ったあまりを考え、あるかずの 2 乗になっているものを考えると

$$\{0\} \cup \{\, 1, 3, 4, 5, 9\}$$

これを使って作った行列です。この $G$ を使って作った Binary Golay Code (23, 12, 7) は 3 重誤り訂正符号。

$$2^{12}(1 + {}_{23}C_1 + {}_{23}C_2 + {}_{23}C_3) = 2^{12}(1 + 23 + 253 + 1771) = 2^{12} \cdot 2^{11} = 2^{23}$$

Perfect Codes はあまり存在しないことがわかっています。

**Theorem** 非自明な（Binary) $e$-error correcting code ($e \geq 1$) は、Binary Golay Code か、Hamming code と同じパラメター ($(2^m - 1, 2^m - m - 1, 3)$) を持つものしか存在しない。

**携帯電話と球詰め問題:**

皆さんは、携帯電話は、英語で "cellular phone" とか "cell phone" と呼びますね。これは地域を小さなセル（小さく区切った部屋）に分けて、その中にアンテナをおいて通信をするわけです。こちらには、ある円であまり重なりはないけれど、すべてをおおいたいという問題があります。先ほどの符号の問題は、重なりがない円をどれだけたくさんいれることができるかという問題を考えていたとも言えます。どちらも実は、球詰め問題という同じ問題に関係しています。大きな箱にピンポン球をたくさんいれたい。どのくらいの密度でいれることができるだろうか。という問題は、まだ解決がされていません。キッシングナンバーも、1, 2, 3, 8, 24 が解決していますが、それ以外については、わかっていません。情報科学とも関係の深いこれらの問題が、数学的にもとても深い問題と関係していると言うのは、とても面白いことだとは思いませんか。

**人間の問題:** 今日お話した、符号理論は、暗号理論 (cryptography) [security と関係] とともに情報科学・数学で重要な分野をなしています。わたしは、この符号理論の背景にあるものが好きです。

誤りは避けられない。誤りを指摘されるのは、いやだが、誤りをそっと直しておいてくれるのは何とも嬉しい。通常は無駄なものが癒しを与えてくれる。というのは人間的だと思いませんか。効率が重視される工学でも、世の中の実際の問題を考える時には、われわれが完全ではないということ、人間についてよくわかっていないと、すぐ問題がおこってしまうのです。

## 3.4 練習問題

**Quiz 2, 2005** 行列の行に関する三つの基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。

$[i;c]$: 第 $i$ 行を $c$ 倍する (ただし $c \neq 0$). $[i,j]$: 第 $i$ 行と第 $j$ 行を交換する.

$[i,j;c]$: 第 $i$ 行に第 $j$ 行の $c$ 倍を加える.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -6 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$　(B) $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$　(C) $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。(e) (a)-(d) のいずれでもない。

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

**Quiz 2, 2005,** 解答　行列の行に関する三つの基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。

$[i;c]$: 第 $i$ 行を $c$ 倍する (ただし $c\neq 0$). $[i,j]$: 第 $i$ 行と第 $j$ 行を交換する.

$[i,j;c]$: 第 $i$ 行に第 $j$ 行の $c$ 倍を加える.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -6 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{[4,1;2]}$　(B) $\boxed{[2,1;1]}$　(C) $\boxed{[2,3]}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

   解：右下の行列が求める既約ガウス行列である。

$$\xrightarrow{[4,2;2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1,3;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。 <u>(e) (a)-(d) のいずれでもない。</u>

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

   解：

$$\begin{cases} x_1 &= 1-s-4u, \\ x_2 &= 3+2s-3t+u, \\ x_3 &= s, \\ x_4 &= t, \\ x_5 &= -2+u, \\ x_6 &= u. \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + s\cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u\cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   $s$ と $t$ と $u$ はパラメター

**Quiz 2, 2004**　行列の行に関する三つの基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。

$[i;c]$: 第 $i$ 行を $c$ 倍する (ただし $c \neq 0$). $[i,j]$: 第 $i$ 行と第 $j$ 行を交換する.

$[i,j;c]$: 第 $i$ 行に第 $j$ 行の $c$ 倍を加える.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -15 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -15 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$　(B) $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$　(C) $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。(e) (a)-(d) のいずれでもない。

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

**Quiz 2, 2004, 解答**　行列の行に関する三つの基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。

$[i;c]$: 第 $i$ 行を $c$ 倍する (ただし $c \neq 0$). $[i,j]$: 第 $i$ 行と第 $j$ 行を交換する.

$[i,j;c]$: 第 $i$ 行に第 $j$ 行の $c$ 倍を加える.

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -15 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -15 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{[1,4]}$ (B) $\boxed{[2;-\frac{1}{3}]}$ (C) $\boxed{[3,1;1]}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を何回か施して得られる、既約ガウス行列を書け。

   解：右下の行列が求める既約ガウス行列である。

$$\xrightarrow{[1,4;-1]} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[4,2;2]} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。(e) (a)-(d) のいずれでもない。

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

   解：

$$\begin{cases} x_1 &= & -1-3s-2t, \\ x_2 &= & s, \\ x_3 &= & 5-t, \\ x_4 &= & -1+t, \\ x_5 &= & t, \\ x_6 &= & 8. \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   $s$ と $t$ はパラメター

**Quiz 2, 2003** 行列の行に関する基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。
1. 第 $i$ 行を $c$ 倍する（ただし $c \neq 0$）：$[i;c]$ （例：$[2;3]$: 第 2 行を 3 倍する）
2. 第 $i$ 行と第 $j$ 行を交換する: $[i,j]$ （例：$[2,3]$: 第 2 行と第 3 行を交換する）
3. 第 $i$ 行に第 $j$ 行の $c$ 倍を加える: $[i,j;c]$（例：$[2,3;4]$: 第 2 行に第 3 行の 4 倍を加える）

（カンマとセミコロンに注意！）

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -15 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$　(B) $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$　(C) $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を施して得られる、既約ガウス行列を書け。

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。(e) (a)-(d) のいずれでもない。

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

**Quiz 2, 2003, 解答**　行列の行に関する基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。
1. 第 $i$ 行を $c$ 倍する（ただし $c \neq 0$）: $[i;c]$　2. 第 $i$ 行と第 $j$ 行を交換する: $[i,j]$　3. 第 $i$ 行に第 $j$ 行の $c$ 倍を加える: $[i,j;c]$

以下のようにある連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施した。

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -15 & 3 \end{bmatrix}
\xrightarrow{(A)}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{(B)}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{(C)}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}
$$

1. (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

   (A) $\boxed{[4; -\frac{1}{3}]}$　(B) $\boxed{[2,3;2]}$　(C) $\boxed{[2,3]}$

2. 最後 (4 つ目) の行列にさらに行に関する基本変形を施して得られる、既約ガウス行列を書け。

   $[1,4;-1]$ を施すと右の行列を得る。これは、既約ガウス行列である。

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}
$$

3. この連立一次方程式の解について正しいものを (a)–(e) の中から選べ。

   (a) 解はない。(b) 解はただ一つ。(c) 解は無限個、パラメター一個で表せる。

   (d) 解は無限個、パラメター二個で表せる。(e) (a)-(d) のいずれでもない。

未知数の数 $= 6$、拡大係数行列の階数 $= 4$、係数行列の階数 $= 4$ であるから、Theorem 2.2 (3) の場合となり、解は存在し、パラメーター $6 - 4 = 2$ 個。

4. この連立一次方程式の解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s+t+3 \\ 2s-2t+4 \\ s \\ t+2 \\ -5t-1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

先頭の 1 が今の場合は、第 1, 2, 4, 5 列にありますから、先頭の 1 が無い列に対応する、未知数 $x_3, x_6$ をパラメターにします。あとは、拡大係数行列の意味を考えればわかると思います。

**Quiz 2, 2002** 行列の行に関する基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。
1. 第 $i$ 行を $c$ 倍する（ただし $c \neq 0$）: $[i; c]$ （例：$[2; 3]$: 第 2 行を 3 倍する）
2. 第 $i$ 行と第 $j$ 行を交換する: $[i, j]$ （例：$[2, 3]$: 第 2 行と第 3 行を交換する）
3. 第 $i$ 行に第 $j$ 行の $c$ 倍を加える: $[i, j; c]$（例：$[2, 3; 4]$: 第 2 行に第 3 行の 4 倍を加える）
（カンマとセミコロンに注意！）

1. 以下のように行列に行に関する基本変形を施して、既約ガウス行列を得た。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(1) (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

(A) $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$ (B) $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$ (C) $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$

(2) 上の行列がある連立一次方程式の拡大係数行列を表す時、その解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

2. 次の連立一次方程式を考える。

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -4x_4 & = & 1 \\ x_1 & +3x_2 & +7x_3 & +2x_4 & = & 2 \\ x_1 & -12x_2 & -11x_3 & -16x_4 & = & -1 \end{cases}$$

$\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}$

(1) 拡大係数行列を右上に書け。

(2) 解はないか、ちょうど一個か、無限個あるか判定し、無限個のばあいは、解を表すパラメターの数も記せ。解を求める必要はない。

**Quiz 2, 2002,** 解答　行列の行に関する基本変形をそれぞれ以下の記号で表すことにする。
1. 第 $i$ 行を $c$ 倍する（ただし $c \neq 0$）: $[i;c]$ （例：$[2;3]$: 第2行を3倍する）
2. 第 $i$ 行と第 $j$ 行を交換する: $[i,j]$ （例：$[2,3]$: 第2行と第3行を交換する）
3. 第 $i$ 行に第 $j$ 行の $c$ 倍を加える: $[i,j;c]$（例：$[2,3;4]$: 第2行に第3行の4倍を加える）
（カンマとセミコロンに注意！）

1. 以下のように行列に行に関する基本変形を施して、既約ガウス行列を得た。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(C)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(1) (A), (B), (C) で行なっている行に関する基本変形を上の記号で書け。

(A) $\boxed{[3,2;-2]}$　(B) $\boxed{[3,4]}$　(C) $\boxed{[3;-\frac{1}{3}]}$

(2) 上の行列がある連立一次方程式の拡大係数行列を表す時、その解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-t+2 \\ s \\ t+1 \\ -2t-1 \\ t \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. 次の連立一次方程式を考える。

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -4x_4 & = & 1 \\ x_1 & +3x_2 & +7x_3 & +2x_4 & = & 2 \\ x_1 & -12x_2 & -11x_3 & -16x_4 & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & -12 & -11 & -16 & -1 \end{bmatrix}}$$

(1) 拡大係数行列を右上に書け。

(2) 解はないか、ちょうど一個か、無限個あるか判定し、無限個のばあいは、解を表すパラメターの数も記せ。解を求める必要はない。

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & -10 & -12 & -12 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{階数 2 だから} \\ \text{解は無限個} \\ \text{パラメータ 2 個} \end{array}$$

既約ガウス行列にしなくても、上の形から階数は 2 であることが分かります。計算はなるべく少ないものにしたつもりでしたが、どうでしたか。

### Quiz 2, 2001

1. 次の連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施し、既約ガウス行列にし、連立方程式を解くことを考える。

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 9x + y + 5z = 5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (B)$$

(1) $(A)$ では、行に関する基本変形を 2 回行なっているが、何をしているか記せ。

(2) $(B)$ で得られる既約ガウス行列を書け。また、その階数はいくつか。

(3) (2) で求めた既約ガウス行列を用いて最初の連立一次方程式の解を求めよ。

2. 次の命題が正しければ、証明し、誤っていれば反例（成り立たない例）をあげよ。

「$n$ 変数の 1 次方程式 $m$ 個からなる連立一次方程式が無限個解を持つならば、$m < n$ である。」

### Quiz 3, 2005

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & -22 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -22 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とし（注：$C = [A\, I]$）以下の様にして行列 $A$ の逆行列を求める。

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 \to C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

ここで、$C$ にある行列 $S$ を左からかけると $C_1$ が得られ、$C_1$ に $T$ を左からかけると $C_2$、$C_2$ に行列 $U$ を左からかけると $C_3$ が得られるとする。

1. 行列 $S$ の逆行列 $S^{-1}$ を求めよ。

2. 行列 $U$ と $T$ の積 $UT$ を求めよ。

3. 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ。

4. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、$A$ の逆行列を用いて $x, y, z$ を求めよ。

**Quiz 3, 2005, 解答**

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 \to C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -25 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

ここで、$C$ にある行列 $S$ を左からかけると $C_1$ が得られ、$C_1$ に $T$ を左からかけると $C_2$、$C_2$ に行列 $U$ を左からかけると $C_3$ が得られるとする。

解：それぞれのステップで基本変形、$[2, 1; 1], [3, 1; 2], [2, 3]$ を順に施したことがわかる。($[2, 1; 1], [2, 3], [2, 1; 2]$ とも考えられる。)

1. 行列 $S$ の逆行列 $S^{-1}$ を求めよ。

   解：$S = P(2, 1; 1)$ は、$C_1 = SC = S[A, I] = [SA, S]$ より $C_1$ の右半分の行列だから、

$$[S, I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   となる。これは、$P(2, 1; -1)$ と表される行列である。

2. 行列 $U$ と $T$ の積 $UT$ を求めよ。

   解：$T$ は左からかけると $[3, 1; 2]$, $U$ は左からかけると、$[2, 3]$ で表される行に関する変形をするのだから、$UT = UTI$ より $I$ に $[3, 1; 2]$、$[2, 3]$ を順に施した得られる行列が $UT$ である。従って、

$$UT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ または、 } UT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   を計算しても得られる。

3. 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ。

   解：$C_3$ にさらに、$[3, 2; -4]$, $[3; -1]$, $[1, 3; 3]$, $[2, 3; 6]$ を順に施すと、

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 22 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 22 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 44 & -6 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ 従って } A^{-1} = \begin{bmatrix} 22 & -3 & 12 \\ 44 & -6 & 25 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、$A$ の逆行列を用いて $x, y, z$ を求めよ。

解：$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ だから $\boldsymbol{b}$ に 上で求めた $A^{-1}$ をかければよい。

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 22 & -3 & 12 \\ 44 & -6 & 25 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{cases} x &= -3 \\ y &= -6 \\ z &= -1 \end{cases}.$$

**Quiz 3, 2004**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。(注：$C = [A\, I]$)

1. 上の行列の積 $A\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

2. 以下の様にして行列 $A$ の逆行列を求める。

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

(a) $C$ にある行列 $S$ を左からかけると $C_1$ が得られ、$C_1$ に $T$ を左からかけると $C_2$ が得られる。行列 $S$ と $T$ を求めよ。($S$、$T$ はそれぞれ $SC = C_1$、$TC_1 = C_2$ を満たすもの。)

(b) 行列 $A$ の逆行列 $B = A^{-1}$ を求めよ。

(c) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、$A$ の逆行列を用いて $x_1, x_2, x_3$ を求めよ。

**Quiz 3, 2004, 解答**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。(注：$C = [A\, I]$)

1. 上の行列の積 $A\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 + 6x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 \end{bmatrix}.$$

2. 以下の様にして行列 $A$ の逆行列を求める。

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

(a) $C$ にある行列 $S$ を左からかけると $C_1$ が得られ、$C_1$ に $T$ を左からかけると $C_2$ が得られる。行列 $S$ と $T$ を求めよ。($S$、$T$ はそれぞれ $SC = C_1$、$TC_1 = C_2$ を満たすもの。)

解：$C_1 = SC = S[A, I] = [SA, SI] = [SA, S]$ ですから、$S$ は $C_1$ の右半分です。これは、$P(2,1;1)P(3,1;-2)$ を計算しても得られます。$C_1$ から $C_2$ は、$[2,3]$ を施してから $[1,2;3]$ を施して得られるから、この操作を $I$ に施しても得られますし、または、$P(1,2;3)P(2,3)$ を計算しても得られます。

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) 行列 $A$ の逆行列 $B = A^{-1}$ を求めよ。

解：$[1,3;6]$ をし $[2,3;4]$ を施すと次のようになります。この場合は、順番は影響ありません。

$$C_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、$A$ の逆行列を用いて $x_1, x_2, x_3$ を求めよ。

解：$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{b}$ だから $A^{-1}\boldsymbol{b}$ を計算すればよい。したがって、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Quiz 3, 2003**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。(注：$C = [A\, I]$)

1. 上の行列の積 $A\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

2. 以下の様にして行列 $A$ の逆行列を求める。

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

(a) $C$ にある行列 $S$ を左からかけると $C_1$ が得られ、$C_1$ に $T$ を左からかけると $C_2$ が得られる。行列 $S$ と $T$ を求めよ。($S$、$T$ はそれぞれ $SC = C_1$、$TC_1 = C_2$ を満たすもの。)

(b) 行列 $A$ の逆行列を求めよ。

(c) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、$x_1, x_2, x_3$ を $b_1, b_2, b_3$ を用いて表せ。

### Quiz 3, 2003, 解答

1. $A\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{bmatrix}.$$

2. (a) 行列 $S$ と $T$ を求めよ。

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$C_1 = SC = S[A, I] = [SA, SI] = [SA, S]$ ですから、$S$ は $C_1$ の右半分です。これは、$P(2,1;-2)P(3,1;-2)$ を計算しても得られます。$C_1$ から $C_2$ は、第 2 行と第 3 行の交換で得られるから、$[2,3]$ という行に関する基本変形に対応しているので、$T = P(2,3)$ となります。

(b) 行列 $A$ の逆行列を求めよ。

$$C_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots$$

である、最初は、$[1,2;-2]$, $[3,2;1]$ を施し、次は $[1,3;-3]$ を施している。これらの意味は、Quiz 2 参照。従って、$A^{-1}A = AA^{-1} = I$ となる行列 $A^{-1}$ は、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 17 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とするとき、$x_1, x_2, x_3$ を $b_1, b_2, b_3$ を用いて表せ。

$\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ だから、$\boldsymbol{b}$ に $A^{-1}$ をかければよい。したがって、

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 17 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17b_1 - 3b_2 - 5b_3 \\ -2b_1 + b_3 \\ -4b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 = 17b_1 - 3b_2 - 5b_3 \\ x_2 = -2b_1 + b_3 \\ x_3 = -4b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

**Quiz 3, 2002**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。(注：$C = [B\ I]$)

1. (a) 上の行列の積 $AB$ を計算せよ。

   (b) 行列 $A$ は逆行列を持たない。理由を述べよ。

2. 以下の様にして行列 $B$ の逆行列を求める。

$$C \to C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots$$

   (a) $C_1$ にある行列 $T$ を左からかけると $C_2$ が得られる。$T$ とその逆行列 $S$ を求めよ。($T$、$S$ はそれぞれ $TC_1 = C_2$、$ST = TS = I$ を満たすもの。)

   (b) 行列 $B$ の逆行列を求めよ。

**Quiz 3, 2002, 解答**

1. (a) 行列の積 $AB$。

$$AB = \begin{bmatrix} 1+1-0 & -2-2+3 & 0-1+3 \\ 3-1+0 & -6+2+1 & 0+1+1 \\ -1-2-0 & 2+4-5 & 0+2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(b) 行列 $A$ は逆行列を持たない。理由を述べよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

既約ガウス行列が $I$ ではないので、Proposition 3.3. の 4 を満たさないから逆行列は存在しない。(正方行列 $A$ の rank $A$ が行列のサイズと等しいことと、逆行列が存在することも同値であることが分かります。上の例では rank $A = 2 < 3$ ですから逆行列を持ちません。

[別解：] $AB$ の第 1 列と第 3 列が等しいことに注目し、$A$ に逆行列 $A^{-1}$ があったとすると

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ の両辺に左から } A^{-1} \text{ をかけると } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となりこれは矛盾。したがって、$A$ に逆行列は存在しません。

2. (a) $C_1$ にある行列 $T$ を左からかけると $C_2$ が得られる。$T$ とその逆行列 $S$ を求めよ。($T$、$S$ はそれぞれ $TC_1 = C_2$、$ST = TS = I$ を満たすもの。)

このステップでは「第 1 行に第 3 行の 2 倍を加え」ていますから Quiz 2 の記号では $[1,3;2]$ でこれは $P(1,3;2)$ と表せる行列です。この逆行列は、$[1,3;-2]$ を実現する $P(1,3;-2)$。このことから、次のようになります。

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) 行列 $B$ の逆行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

これは Theorem 3.2 より $[I\ B^{-1}]$ の形になっており、右半分が $B$ の逆行列を表す。

**Quiz 3, 2001**

1. 次の連立一次方程式の拡大係数行列に行に関する基本変形を施し、既約ガウス行列にし、連立方程式を解くことを考える。

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 9x & + & y & + & 5z & = & 5 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (B)$$

(1) $(A)$ では、行に関する基本変形を 2 回行なっているが、何をしているか記せ。

(2) $(B)$ で得られる既約ガウス行列を書け。また、その階数はいくつか。

(3) (2) で求めた既約ガウス行列を用いて最初の連立一次方程式の解を求めよ。

2. 次の命題が正しければ、証明し、誤っていれば反例（成り立たない例）をあげよ。

「$n$ 変数の 1 次方程式 $m$ 個からなる連立一次方程式が無限個解を持つならば、$m < n$ である。」