第2章　集合と論理

この章では、集合と論理という数学を記述していく上での基本的な言語について学びます。

2.1　数学を学ぶにあたって

まず簡単に、集合とは何かを定義しておきましょう。

集合 (Set)：　「もの」の集まり

どんなものをもってきてもよいが、それがその集まりの中にあるかないかがはっきりと定まっているようなものでなければならない。

例 **2.1.1** 「ものの集まり」であっても以下のものは、集合ではない。
テロリスト支援国家全体、英語のできる ICU 生全体、国際人全体。はっきりとした基準がないからである。

例 **2.1.2** 次の集合は、それぞれ何を意味するでしょうか。これらは、等しいでしょうか。

$$A = \{2, -1\},\ B = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\},\ C = \{x \mid x^3 - 3x - 2 = 0\}.$$

例 **2.1.3** 2007 年大学全入時代に突入などと言われますが、それは、どういう意味でしょうか。進学率はどうやって決まるのでしょうか。大学の募集人員は、調査すればわかるとして、大学は、4 年生大学だけを言うのか、短期大学も入れるのか、大学進学志願者はどうやって決めるのか、浪人の人などはどうやって数えるのでしょうか。こういうことを考えるときにも、計算は百分率ですが、分母や分子にくる数の元の集団が集合としてはっきりしていなければ、求めることはできません。文部科学省のホームページには何種類かの進学率が年度ごとにのってますが、そのうちの一つには、次のような式がついていました。

$$\text{進学率} = \frac{\text{当該年度の大学・短大の入学者数}}{3\,\text{年前の中学卒業者数}} \times 100$$

これなら計算できそうです。しかし、海外の大学に進学したり、ICU の 9 月生のように、海外からの受験者は含まれないことになりますね。それは、無視できる数なのでしょうか。いずれは、この式も変えないといけないかも知れません。

新聞を見ていて、自分の興味のある分野でこのような数値が出てきたら、それは、どうやって計算したのか、考えてみてはどうですか。例えば、「喫煙者の肺ガンでの死亡率」などどうやって調べるのでしょうか。

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ のように、A を表すのに A の元をすべて列挙する定義を外延的定義といい、$A = \{x \mid x$ は 10 以下の素数 $\}$ の様に、その元の満たすべき条件を記述することによる定義を内包的定義という。ここで、素数 x とは、1 と x 以外に約数がない 2 以上の自然数である。

元、要素 (Element)： 集合 A のなかに入っている個々の「もの」を A の元、要素といい、a が集合 A の元であることを、記号で

$$a \in A \text{ または } A \ni a$$

と書く。a は A の属する、a は A に含まれるなどと言う。その否定 (a は A の元ではない) を

$$a \notin A \text{ または } A \not\ni a$$

と書く。

部分集合 (Subset)： 集合 A、B において A のすべての元が、B の元であるとき、A は B の部分集合であると言い、

$$A \subset B \text{ または } B \supset A$$

と書く。

共通部分 (Intersection)： 二つの集合 A, B において、A と B の両方に共通な元全体の集合を A と B との共通部分といい $A \cap B$ と書く。すなわち、

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}.$$

和集合 (Union)： 二つの集合 A, B において、A の元と B の元とを全部寄せ集めて得られる集合を A と B との和集合といい $A \cup B$ と書く。すなわち、

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}.$$

このように、決めていきたいのですが、すこし問題があります。たとえば、$A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{y \mid Q(y)\}$ と、A は $P(x)$ という条件をみたす x 全部、B は $Q(y)$ という条件を満たす y 全部とするとします。たとえば、$P(x)$ は x は素数である。という命題（条件)、$Q(y)$ は y は、10 以下の数である。とします。すると、$A \cap B$ は、10 以下の素数全部を意味しますから、$A \cap B = \{2, 3, 5, 7\}$ となりますが、$A \cup B$ はどうでしょうか。素数であるか、10 以下の数であるかどちらかを意味することになります。ここでは、「か」とか「または」の意味をはっきりさせないといけませんし、誤解のないようにしようとすると、たくさんの注釈が必要になります。そこで、集合について学んでいく前に、命題や条件の組合せをどのようにするかを決めておいたほうがよいことになります。集合については、一端中断して、論理の話をします。

2.2 論理

まず命題を定義します。

命題 (Proposition) : 正しい (真 True) か正しくない (偽 False) が明確に区別できる文を命題という。「正しい」を「成り立つ」、「正しくない」を「成り立たない」と考えても良い。

真理値 (Truth Value) : 命題が真であることを「T」(True)、偽であることを「F」(False) で表す。これを命題の真理値という。

否定 (negation)・論理和 (logical 'or')・論理積 (logical 'and')・含意 (implication) : $\neg P$（命題 P の否定)、$P \vee Q$（命題 P と Q の論理和)、$P \wedge Q$（命題 P と Q の論理積)、$P \Rightarrow Q$（命題 P は Q を含意）を次の真理値をもつ命題と定義する。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

P、Q、R が命題である時、$\neg P$、$P \vee Q$、$P \wedge Q$、$P \Rightarrow Q$ も命題である。

$\neg P$ は「P ではない。」ということを表現したものです。P が真のときに、偽、P が偽のときに 真であるような命題だと定義しています。A を集合とするとき、$a \in A$ は一つの命題ですから、$\neg(a \in A)$ も一つの命題です。これは、$a \notin A$ を表しています。$3 > 5$ も命題です。これは、偽な命題です。この否定 $\neg(3 > 5)$ は何を表しているでしょうか。これは、$3 \leqq 5$ を表しています。これは真の命題です。

数学語では、'and'「かつ」は 'logical and'「論理積」を、'or'「または」は 'logical or'「論理和」をあらわします。自然言語では曖昧ですが、数学ではある利用法に明確にしておきます。それを明確に定義する方法が、この真理表である。例えば、$3 \leqq 5$ は $(3 < 5) \vee (3 = 5)$ を表します。実は、$\leqq$ と言うことを決める時に、そのように定義するのですが。

例 2.2.1 $(\neg p) \vee Q$, $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ と $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ の真理表を求めてみましょう。

P	Q	$(\neg P)$	$\vee$	Q	$(\neg Q)$	$\Rightarrow$	$(\neg P)$	$(P \wedge Q)$	$\Rightarrow$	P
T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F
F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F

$(\neg P) \vee Q$ および $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ の真理値と $P \Rightarrow Q$ の真理値は P, Q の真理値が何であっても同じになります。P, Q などの真理値が論理式の真理値をきめるので、真理値の値をとる関数と言う意味で、一つ一つの論理式によって、真理値関数が一つずつ決まる、という言い方をします。二つの論理式が同一の真理値関数を決める時、この二つの論理式は互いに等値であるといいます。このことを $\equiv$ で表します。P, Q に関する論理式としては同じことを意味しているといったことです。

$$(\neg P) \vee Q \equiv P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$$

$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ を $P \Rightarrow Q$ の対偶 (contraposition) と言います。この二つの真理値がすべて等しいと言うことは、命題の対偶はその命題と等値ということになります。ある命題が正しいことを証明するには、その対偶が正しいことを証明すれば良いことになります。対偶のそのまた対偶はもとの命題にもどります。

$(\neg P) \vee Q \equiv P \Rightarrow Q$ ですから、論理式のなかに、$\Rightarrow$ が出てきたら、$\neq$ と $\vee$ とあとは、演算の順序（どこから計算するか）を決めるかっこを使って、書き替えることができることも言っています。すなわち、$\Rightarrow$ は使わなくても、式を書くことができるわけです。

また、$(P \wedge Q) \Rightarrow P$ の真理値は、P と Q の真理値が何であっても、真です。つまりこの様な命題は常に真だということになります。

練習問題 **2.2.1** 次の真理表を作れ。

1. $(P \wedge Q) \Rightarrow \neg Q$
2. $((\neg P) \vee Q) \Rightarrow P$

命題 **2.2.1** 次が成立する。

(1) $P \vee P \equiv P.$

(2) $P \wedge P \equiv P.$

(3) $\neg(\neg P) \equiv P.$

(4) $P \vee Q \equiv Q \vee P.$

(5) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R).$

(6) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P.$

(7) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R).$

(8) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$

(9) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$

(10) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q).$

(11) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.

上の式は、それぞれ、真理表を書くことによって確かめることができます。P, Q, R と三つの命題に関するものは、それぞれの真理値が、T か F によって、8 通りの場合に分かれます。

練習問題 2.2.2 命題 2.2.1 を証明せよ。

この命題にある式を使うと、真理表を書かなくても、等値であることを示すことができます。

例 2.2.2 命題 2.2.1 と、$P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$ を使って、$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P) \equiv P \Rightarrow Q$ を証明してみましょう。まず、$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ は、$\neg Q$ を ひとかたまりの命題、$\neg P$ をひとかたまりの命題と見て、$P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$ を使うと、

$$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P) \equiv (\neg(\neg Q)) \vee (\neg P) \equiv Q \vee (\neg P) \equiv (\neg P) \vee Q \equiv P \Rightarrow Q.$$

となります。

練習問題 2.2.3 次の式を、上の命題と、$(\neg P) \vee Q \equiv P \Rightarrow Q$ を使って示せ。

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

例 2.2.3 次の式は、一般には、<u>成立しません</u>。

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv P \wedge (Q \vee R).$$

真理表を書いてみても、分かりますが、P, Q, R の真理値がそれぞれ、F, T, T である時を考えると、左辺は、T ですが、右辺は、F になります。かっこの付け方に注意しなければいけないという例です。

2.2.1 全称命題・存在命題*

全称命題 (Universal Proposition)： 「任意の（すべての）x について命題 $P(x)$ が成り立つ」を全称命題といい $\forall x\, P(x)$ と書く。

存在命題 (Existential Proposition)： 「ある x について命題 $P(x)$ が成り立つ」を存在命題といい $\exists x\, P(x)$ と書く。

x はある条件をみたすものについて考えますので、たとえば x の動く範囲が集合 A だとすると、$(\forall x \in A)P(x)$ などと書きます。この意味は、“For all $x \in A$, $P(x)$ holds.” です。“for all” は、“for every” とか “for any” と言うこともあります。$(\exists x \in A)P(x)$ は、“There exists some $x \in A$ such that $P(x)$ holds.” となります。きれいな日本語で表すの

が難しい部分でもあります。例えば、$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ などを整数といいます。整数全体を $\boldsymbol{Z}$ で表すとします。

$$(\forall x \in \boldsymbol{Z})((\exists y \in \boldsymbol{Z})(x + y = 0))$$

などということを言いたいわけです。わかりますか。どんな整数 x をとってきても、整数 y で $x + y = 0$ となるものがありますよ。と言う命題を言っているわけです。$y = -x$ とすれば良いわけです。どんな x と言っていますが、それは整数なら何でもと言う意味です。1 でも -3 でも 0 でも。もうすでに日常語では、表現するのが難しくなっていると思います。日常語では x と y がよもや同じ場合は考えないでしょう。でも、たとえば上の命題で $x = 0$ のときは $y = 0$ です。上の命題の意味を約束通り理解して、論理を組み立てていくには、やはり訓練が必要です。数学を勉強するときに一番力がつくのはその約束（だけ）の上に組み立てていく推論力だと思いますがどうでしょうか。

上の命題の (10), (11) の拡張ですが、次が成立します。

$$\neg((\exists x)P(x)) = \forall x(\neg P(x)),\ \neg((\forall x)P(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

練習問題 2.2.4 $\boldsymbol{R}$ で実数（数全体、正の数、負の数、少数や分数、0 をすべて含むものとします）をあらわすものとする。以下のうち、正しいものは証明し、誤っているものについてはその命題の否定は何であるか書いてみましょう。

1. $(\forall x \in \boldsymbol{R})[x^2 > 0]$.
2. $(\exists x \in \boldsymbol{R})[x^2 > 0]$.
3. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[x + y = 0]$.
4. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[x + y = 0]$.
5. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[x + y = y]$.
6. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[x + y = y]$.
7. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[xy = 1]$.
8. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[xy = 0]$.
9. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[xy = y]$.
10. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[xy = y]$.

2.3 集合と集合の演算

論理演算を定義しましたが、これを用いて、集合の演算を定義しましょう。

部分集合 (Subset)： 集合 A、B において A のすべての元が、B の元であるとき、A は B の部分集合であると言い、

$$A \subset B \text{ または } B \supset A$$

と書く。すなわち、

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B) \text{ がつねに真} \Leftrightarrow (\forall x \in A)[x \in B]$$

$A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{x \mid Q(x)\}$ と書かれている時は、

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)].$$

集合の相等 (Equality of Sets)： 二つの集合 A, B において、$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つ時 A と B は相等であると言い $A = B$ と書く。ですから二つの集合 A と B が等しいことをいうときは、$x \in A$ はいつでも、$x \in B$ であり、$x \in B$ はいつでも $x \in A$ であることをいえば良いことになります。

共通部分 (Intersection)： 二つの集合 A, B において、A と B の両方に共通な元全体の集合を A と B との共通部分といい $A \cap B$ と書く。すなわち、

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} = \{x \mid x \in A, x \in B\}.$$

和集合 (Union)： 二つの集合 A, B において、A の元と B の元とを全部寄せ集めて得られる集合を A と B との和集合といい $A \cup B$ と書く。すなわち、

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

A と B の両方に入っているときは、$(x \in A) \vee (x \in B)$ は真ですから、$A \cup B$ にも入っていることになります。またはという日本語も使いますが、これは、両方の条件をともに満たすときも含まれるという事になります。

ベン図 (Venn Diagram by John Venn (1834–1923)) で、集合の共通部分、和集合について表してみましょう。

空集合 (Empty Set)： 元を全く含まない集合を空集合といい $\emptyset$ で表す。

差集合 (Difference)： 二つの集合 A, B において、A の元で B の元ではない元全体の集合を A と B との差集合といい、$A \setminus B$ または $A - B$ と書く。すなわち、

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

定義から $A \setminus B \subset A$ です。

補集合 (Complement)： 全体集合 (U または Ω が良く使われる：(Universal Set)) を一つ定めた時その部分集合 A に対し、A に含まれない要素全体を A^c または $\overline{A}$ で表し、A の補集合と言う。 定義から $A \cap \overline{A} = \emptyset$ かつ、$A \cup \overline{A} = U$ となっています。差集合も $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ と表すことができます。

対称差（Symmetric Difference)*： $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ を A と B の対称差という。$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ となっています。

例 **2.3.1** 一般に命題 P, Q について $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ でした。（例 2.2.1）したがって、

$$(x \in A) \wedge (x \in B) \Rightarrow x \in A$$

が常に成り立ちますから、$A \cap B \subset A$ となっています。$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ でしたから、$A \cap B \subset B$ も成立します。直観的には、明らかです。しかし、複雑になると、直観に頼るのは危険です。

$A \cap B \subset A$ かつ $A \cap B \subset B$ ですが、同様に、$A \subset A \cup B$、$B \subset A \cup B$ も簡単にわかります。

例 **2.3.2**

1. $\boldsymbol{N} = \{x \mid x$ は自然数$\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$：The set of natural numbers.
2. $\boldsymbol{Z} = \{x \mid x$ は整数$\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$：The set of integers.
3. $\boldsymbol{R} = \{x \mid x$ は実数$\}$：The set of real numbers.
4. $S = \{x \mid x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0\} = \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

   このように簡単には具体的に元が分かりにくいものもありますが、この集まりに入るか入らないかは決まっているので、これは集合です。

5. A を 2 の倍数である整数全体。B を 3 の倍数である整数全体。C を 4 の倍数である整数全体。D を 5 の倍数である整数全体、E を 6 の倍数である整数全体とする。整数に関する命題を次のように定義する。$P(x)$：x は 2 の倍数である。$Q(x)$：x は 3 の倍数である。$R(x)$：x は 4 の倍数である。 $S(x)$：x は 5 の倍数である。このとき、次を証明せよ。

   (a) $A \cap B = E$。
   (b) $A \cup B \neq \boldsymbol{Z}$。
   (c) $C \subset A$。
   (d) $A \cap C \subset E$。
   (e) $E \not\subset A \cap C$。

練習問題 **2.3.1** 以下を証明せよ。

1. $A \cap B = A$ ならば $A \subset B$

   Let $x \in A$. Since $A = A \cap B \subset B$, $x \in B$. Thus $x \in A$ implies $x \in B$. We have $A \subset B$.

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

問題 2.3.1　1. 7の集合のすべての部分をあらわす図をそれぞれの集合がつながっている図形として平面に書くことができるでしょうか。$2^7 = 128$ の部分にわかれることになりますが、一つ一つの部分集合が穴がない平面図形としてあらわすことができるでしょうか。（クラスで6つまでは例を示しました。）

2. 同様の条件のもとで、n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ のすべての部分を表す図を作れるでしょうか。

注.　この続きは、論理学概論 (HPh104, Introduction to Logic)、数学通論 I (MSMa210, Basic Concept of Modern Mathematics I)、計算理論 I-II (NSCo 300, 310, Theory of Computation I-II) で扱っています。

2.4　お茶の時間

2.4.1　Russel のパラドックス

集合は数学の厳密化の中で生まれてきたものですが、それ自体のなかに矛盾を含むと指摘されたのが、以下の Russel の逆理です。

Russel の逆理（１９０３）:　集合を次のように２つの種類に分類する。すなわち自分自身を元として持たない集合を第一種の集合とし、自分自身を元としてもつ集合を第二種の集合とする。すべての集合は第一種または第二種である。そこですべての第一種の集合を M とする。かりに M が第一種の集合とすると、M 自身は M の元ではないはずであるが、M の定義からは、第一種の集合 M は M の元でなければならない。これは、矛盾である。またかりに M が第二種の集合であるとすれば、M 自身が M の元であることになるが、M の定義からは、第二種の集合 M は M の元ではありえない。すなわち M を第一種としても、第二種としても、矛盾をおこす。これは不合理である。

Let S be the set of all sets. Let

$$C_1 = \{M \in S \mid M \notin M\},\ C_2 = \{M \in S \mid M \in M\}.$$

Both $C_1 \in C_1$ and $C_1 \notin C_1$ imply a contradiction. ■

最初に集合を定義しましたが、厳密には不完全です。数学自体のなかの矛盾は、数学者をおおいに悩ませましたが、それがまた、数学基礎論というような新しい分野を生み出し、現在では基本的には、上のような矛盾については、解決しています。詳しくは説明できませんが、考える範囲をたとえば、ICU の学生全体とか、実数およびその部分集合全体などと限っておけば、矛盾が起こらないことがわかっています。もうすこし、知りたい人は、「新装版：集合とはなにか (はじめて学ぶ人のために)」竹内外史著、講談社 (BLUE BACKS B1332 ISBN4-06-257332-6, 2001.5.20) [19] を参考にしてください。

2.4.2　ベン図

このように 4 つ以上の集合になると、Venn diagram で表すことは難しくなります。たとえば、3 つの集合では、それぞれに入っている部分と入っていない部分で、一般的には、$2^3 = 8$ 個の部分が図に必要ですが、4 つの集合では、$2^4 = 16$ 個、5 つの集合では、$2^5 = 32$ 個の部分が必要であることがわかります。

たとえば 4 つの集合の場合、次のようなことも考えられます。

	1	2	3	4
a				
b	$\star$	$\star$		
c	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
d				

A はタテ 1,2 列、B はヨコ a, b 行、C はヨコ b, c 行、D は タテ 2,3 列からなるそれぞれ 8 個のマス目の部分で表される部分集合とする。

たとえば、星印のところを 集合 E とすると、$E = (A \cup \overline{B}) \cap C$ となります。

さて、5 個、6 個、7 個 ... の集合について、このような図が作れますか。どのような条件を付けると綺麗なずができるかな。

2.4.3　ブール代数と電子回路

Distinctive Normal Form (DNF)　P と Q から論理演算によって作られた命題は、それぞれが T か F かによって 4 通りの場合があることがわかります。3 つの命題から得られる時は 8 種類ですね。それらに、かってに T か F をかきこんだとき、それを表す論理式は $\neg, \wedge, \vee$ から作れるでしょうか。

二つの場合を考えてみましょう。$P \wedge Q$ は P, Q どちらも T のときだけ T でそれ以外は F です。では、$(\neg P) \wedge Q$ はどうですか。これは、P が F で Q が T の時だけ、T で

そうでないとき、F となっています。それでは、P, Q がどちらも T のときか、P が F で Q が T のときこの二つの場合に T でそれ以外で F というものはどうでしょうか。実は、これは、

$$(P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge Q)$$

と表せば良いことがわかります。どうようの考えで、T の値をとるべきところを一つずつ $\wedge$ を用いてあらわし、それらを $\vee$ で結ぶと、どんな真理値関数も作ることができることがわかります。このようにして作ったものを Disticntive Normal Form と言います。でも実は、上で作ったものは、Q と同じになっています。つまり、このようにして作ったものは、必ずしも一番簡単な（短い）表現ではないと言うことです。

じつは、この一番簡単な表現を見つけると言う問題は、回路の設計などでもとても重要なのですが、難問でまだ完全解答はわからないのだそうです。

もう一つは、$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ と 4 つを使って勉強してきましたが、これらはすべて必要なのだろうかと言うことです。実は、たとえば $\neg$ と $\wedge$ だけあれば十分であることがわかっています。もちろんそうすると表現は長くなりますが。

2.4.4 自然言語と記号論理

このように、記号を使って、命題に演算を定義して論理を組み立てていく学問を記号論理といいます。論理を扱っていますが、自然言語の言葉の使い方とは、違っています。

例 **2.4.1** またはの使い方：「太郎か花子」
太郎か花子は来るよ（包含的)。太郎か花子が来るよ（排他的)。
23 日か、22 日（列挙でも順番に意味がある場合がある）
「日本語と数理」細井勉著、共立出版 (ISBN 4-320-01344-1, 1985.10.1)

「または」が使われる場所によって意味が少し変わることは上の例からもわかると思います。曖昧さをなくすため、論理和は、真理値で定義するわけです。しかし、含意が「ならば」の記号化だということには、疑問をいだく方が多いようです。友人がこんな説明がいいよと教えてくれたのは、次の例です。

おとうさんが、こどもに、「こんど数学で 5 をとったらゲーム機を買ってあげるよ」と約束したとする。5 をとったのに、ゲーム機を買ってあげなかったら、おとうさんは約束違反だけれど、5 をとれなかったのに、ゲーム機を買ってあげたとする。それは、約束違反ではない、ですね。

仮定が成り立っていない時は、結論が成り立っていても、成り立っていなくても、嘘ではない、真だという意味で、$P \Rightarrow Q$ は P の真理値が F のときは、Q の真理値が何であっても、真としていることに注意して下さい。

日常的には、「あす晴れたらピクニック」といったら、雨でピクニックということはないでしょう。でも、あす晴れたらという条件を満たしていなければ、ピクニックに行っても、いかなくてもそれは、偽にはならないと約束しましょうということです。はっきりい

いたければ、「あす晴れたらピクニック、あす晴れなかったらピクニックはしません」と数学のことばではいうことにしましょうということです。もちろん、晴れの定義が曖昧ということは、別として。

たとえば、英語でルールなどを記述するときは、'A or B or both' で論理和をあらわして、混乱を避けます。曖昧さがなにで、それを避けるためにはどうするかは、数学の問題ではありませんが、論理的に考える訓練のもとで、コミュニケーションのときに、これらに、注意深くなることは混乱をさけるためにも大切だと思います。しかし、数学の世界を絶対として、日常の会話でも、「または」といえば、数学の意味の論理和の意味でそれ以外は間違いなどとするような数学帝国主義は困りますね。

上で引用した、「日本語と数理」細井勉著、共立出版 (ISBN 4-320-01344-1, 1985.10.1) からもう少し引用しましょう。

1. 「あしたはどこへ行ったのでしょう」

   きょうとあしたの区分点？　いつでも「あした」は遠くへ行ってしまうのです。

2. 「いまって、なぜか、ねばっこい」

   関数の連続性でも「議論のための幅」が必要なイプシロン・デルタ論法。

3. 「西の方って」

   西って何でしょうか。西というのは、北極に近づくにつれて曲がるんですよ。

   西という概念は、ずっとむかし、世界がまだ平らだったときに、いえ、平らだと思われていたときに使われていた概念なんですね。そして、地球が丸くなったとき、いえ、球形であることがわかったときに、修正しないといけなかったのに、うまい修正がなされなかったのに違いありません。(３７ページ)

4. 「無限って、簡単に言いますが」

   無限に速いコンピュータ？

   フェルマーの定理のコンピュータによる証明。

   休憩をはさみ、1/3 の累乗で推移。

   $f(x) = x\sin^3 x - \cos^3 x$ を満たす実数 x ?

   無限度はいくらでも高められる。

   いくら速い、たとえば、無限に速いコンピュータを実現しても、実行できない仕事がある。

5. 「ぜんぶ白くない、ってどういうこと」

   ぜんぶやさしくなかった。ぜんぶできなかった。参加者はぜんぶ小学生ではなかった。この薬をぜんぶのんではいけないよ。ぜんぶで二千円じゃない。根はぜんぶ正

でない。根はぜんぶえられなかった。直線はぜんぶ一点で交わらない。根はぜんぶでたかだかｎ個でない。三角形の内角ぜんぶの和は２直角でない。

all not も not all も部分否定

All is not gold that glitters.　光るもの必ずしも金ならず。

6. 「『勝手に』といっても、勝手にはできません」

   任意のｎに対して、A^n を求めよ。

   プロの数学者を育てようとしている場合には、数学者の方言になれさせることも必要かと思います。そうでない場合でも、数学の講義中は、学生に数学方言になれてもらう必要は、いくらかはありましょう。でも、教師の側に、数学方言についての認識が、ある程度は、必要ではないかと思うのです。そして折りにふれて、学生に方言の解説をしてやることが望まれると思うのです。（７７ページ）

7. 「部分は一部分とは限りません」

   彼らのぜんぶが幸福とは限らない。

   係数のすべてが正とは限らない。

8. 「限らない、ということ」

   石は黒か白だとします。ここに石が三つありあんす。つまり、

   黒黒黒、黒黒白、黒白白、白白白

   のいずれかの組み合わせになっていると思われます。このとき、

   （１）ぜんぶの石が白とは限らない。

   ということを教えられたとします。上の四つの組み合わせのうち、可能性のあるものに○、ないものに×をつけてください。○は必要ならいくつつけてもかまいません。

   ○○○○;40-47%、×○○○;24-38%、○○○×;19-8% sophomore, freshman

   （２）ぜんぶの石が白というわけではない。

   ○○○○;6%、○○○×;60.6%、×○○○;9.1%、×○○×;24.2%

   （３）「○○○×」という状態を表す文を「ぜんぶ」を入れて作ってください。

   ぜんぶの石が白ではない。ぜんぶの石が白と言うわけではない。ぜんぶの石が白ということはない。ぜんぶの石が白とはかぎらない。

9. 「ならば、っていうこと」

   右に曲がると駅がある。これができたらごほうびをあげるよ。これができれば天才だ。雨が止んだらでかけよう。花は桜木、人は武士。

   彼が行くなら僕も行く。¡-¿ 僕が行くなら彼も行く。

この人なら、太郎だ（含意)、これを押すとブザーがなる（因果)、冬が終わる春になる（時間の前後)、ここが神田なら次は東京（空間の前後)、雪がとけると、水になる（状態の推移)、雪がとけると春になる（状況の変化）

数学で使っている「ならば」文は、ふつうに信じられているほどには、論理的に明快とはいえないように思う。

10. 「『ならば』は、なぜ、難しい」

    明日晴れなら動物園へ行く。裏を引きずる。

    雨が降れば、かえるが鳴く。かえるがなかなければ雨が降らない。

    夏が来れば尾瀬を思いだす。尾瀬を思いださなければ、夏が来ない。

    p → q で q が行動または、判断のとき注意が必要。p というスイッチがついた行動・判断

    if P then Q

    未成年の子が婚姻をするには、父母の同意を得なければならない。(民法第７３７条)

    成年の子の婚姻には、父母の同意は要しない。(反対解釈)

11. 「及びと並びに」

    ＡかＢとＣ

    Ａ定食かハンバーグとライス。おにぎりかサンドイッチと飲み物。

    ＡかＢかつＣ、ＡまたはＢとＣ

    短い語は長い語よりも強く結合すると約束したらよい？

12. 「２２日か２３日」「２３日か２２日」(列挙でも順番に意味がある場合がある）

13. 「そのつぎに小さい数」

    ここに5個の数があります。それは、10，20，30，40，50 です。そこで質問です。

    (1) 10 の次に小さい数はいくつですか。
    (2) 50 の次に小さい数はいくつですか。
    (3) 30 の次に小さい数はいくつですか。

14. 「５日まで」

    今年は最初のゴミの収集日は１月６日です。

    ５日までゴミを出さないでください。６日までゴミを出さないでください。

15. 「だぁれもなんにも見なかった」

    三重否定

16. 「ないものはない」
17. 「なければならない」
18. 「お弁当にしゅうまいはいかがですか」

    お弁当にお茶はいかがですか。お弁当にサンドイッチはいかがですか。

19. 「国語辞典と反例」

    counter-example OED にはあるが、日本の辞書にはない。

20. 「法則と理論」

    法則：守らなければならないきまり、おきて。一定の条件のもとでは、どこでも成り立つ事物相互の関係。

2.4.5 法科大学院適性試験問題：論理的判断力問題

1. 次の主張のなかで、論理的に正しいものを選びなさい。

   (1) 火のないところには絶対に煙は立たないものとする。いま、煙は立っていないとすると、火はないと判断することができる。

   (2) 風が吹けば必ず桶屋が儲かるものとする。いま、桶屋が儲かっていないならば、風は吹かなかったと判断することができる。

   (3) 夕焼けがあれば、必ず翌日は晴れるものとする。今日は、夕焼けがなかったら、明日は晴れないと判断することができる。

   (4) 鳥は多くの場合空を飛ぶものとする。チコは空を飛ばないとすると、チコは鳥ではないと判断することができる。

   (5) 故意または過失があれば罪になるものとする。いま扱っている事件では、加害者は故意または過失がないから、彼は罪にはならないと判断することができる。

2. 次の文章を読み、下の問いに答えよ。

   ある大学で入学試験を行なった日に雪が降った。その地方ではめったに雪が降ることはなかったので、交通機関に遅れが生じ、多くの遅刻者が出ることになった。このことについて、次の A, B, C の三つの主張が三人から出された。

   A. 遅刻した人は電車とバスを両方利用していた。

   B. 電車もバスも利用しなかった人は遅刻しなかった。

   C. 電車を利用しなかった人は遅刻しなかった。

   問: A, B, C の主張相互の論理的関係として正しいものを、次の (1)–(6) のうちから一つ選べ。

(1) A が正しいとき、必ず B も正しい。また、B が正しいとき、必ず C も正しい。
(2) A が正しいとき、必ず C も正しい。また、C が正しいとき、必ず B も正しい。
(3) B が正しいとき、必ず A も正しい。また、A が正しいとき、必ず C も正しい。
(4) B が正しいとき、必ず C も正しい。また、C が正しいとき、必ず A も正しい。
(5) C が正しいとき、必ず A も正しい。また、A が正しいとき、必ず B も正しい。
(6) C が正しいとき、必ず B も正しい。また、B が正しいとき、必ず A も正しい。

3. 次の文章を読み、したの問い（問１、問２）に答えよ。

新しい接続表現「とんで」を次のように定義する。

> 定義： 文 x が真であり、かつ文 y が偽である場合、文「x とんで y」は真とし、それ以外の場合、すなわち、文 x が偽であるか、文 y が真である場合には、文「x とんで y」は偽とする。

ここで、x, y などの文は、真又は、偽のいずれかであるとする。また、「x とんで y」も一つの文であるから、それと文 z を「とんで」で接続して、「(x とんで y) とんで z」や、「z とんで (x とんで y)」のような文を作ることができる。

問１ 次の文 A, B, C の真偽の組合せとして正しいものを、下の (1) – (6) のうちから一つ選べ。ただし、イワシ、カラス及びタヌキの分類については常識に従うものとする。

A. （イワシは魚だ、とんで、カラスは鳥だ)、とんで、タヌキはほ乳類だ。
B. イワシは魚だ、とんで、(カラスは鳥だ、とんで、タヌキはほ乳類だ)。
C. イワシは魚だ、とんで、(カラスは両生類だ、とんで、タヌキはは虫類だ)。

(1) A は真、B と C は偽である。
(2) B は真、A と C は偽である。
(3) C は真、A と B は偽である。
(4) B と C は真、A は偽である。
(5) A と C は真、B は偽である。
(6) A と B は真、C は偽である。

問２ 次の (1) – (5) の中から誤っているものを一つ選べ。

(1) 「x とんで x」は、x の真偽によらず常に偽である。
(2) 「(x とんで y) とんで x」は、x と y の真偽によらず常に偽である。
(3) 「x とんで (y とんで x)」は、x の真偽と同じである。
(4) 「(x とんで y) とんで y」は、「x とんで y」の真偽と同じである。
(5) 「x とんで (x とんで y)」の真偽は、「y とんで (x とんで x)」 の真偽と同じである。

法科大学院の適性試験に興味のあるかたは：

- http://www.jlf.or.jp/
- 朝日新聞 2003 年 9 月 2 日 朝刊

解答：1. (2) 正解率 35.6%　2. (2) 3-1. (4), 3-2 (5).

どうですか、ICU の一般学習能力試験を思い出した方、こういう問題は得意だという方、ちんぷんかんぷんな方、いろいろでしょう。これは、数学の論理の問題からとられていることは確かですね。少し時間をかけて適性試験手にはいるものは解いてみましたが、数学的に考えると難しいと思える問題はありませんでした。しかし、少し問題も感じましたので、ひとこと。それは、日常語、自然言語を用いる危なさですね。法科大学院のためだから、法律家を目指す人に動機を失わさないようにするには、純粋に数学の言葉で書くことはできないのでしょうが、曖昧さを含むことになります。
たとえば最初の問題を考えてみることにしましょう。

> 火のないところには絶対に煙は立たないものとする。いま、煙は立っていないとすると、火はないと判断することができる。

これは、逆命題は一般的には成り立たないから、これは正しくないというのが、ここでの「正解」です。しかし、正解でないというためには、こう判断することができない状況が存在して（反例があって）はじめてこの命題は正しくないはずです。では、どのような状況が考えられるのでしょうか。一応、数学的に考えるため、単純化しましょう。

命題 P: 火がない

命題 Q: 煙がない

このもとで最初の仮定は「$P \Rightarrow Q$」と考えることができると思います。正しいかどうか判断する結論は「$Q \Rightarrow P$」。ですから反例があるとすると「$P \Rightarrow Q$」が True で、「$Q \Rightarrow P$」が False という場合です。あとの方が False となるのは、P が False で Q が True の場合だけで、確かに、その場合は最初の命題は、True ですから、もしそのような状況があるとすると、「$P \Rightarrow Q$」が True で、「$Q \Rightarrow P$」が False。すなわち、次の命題は False となります。

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$$

では、P が False で Q が True とはどのような状況でしょうか。「火はないが、煙はある」という状態です。「火がある」とはどういう状態で、「煙がある」とはどういう状態かを定義しなければ議論にならないといいきるのはへ理屈でしょうか。確かに「火は消えたけれどまだ煙はくすぶっているよ」なんてことは日常的には良くいいますね。「でも、それはまだ火が完全には消えていないということでしょう」といわれると、言い返すのは難しい。何を言っているかわかりますか。煙があるときはまだ火があるのだとすると、$Q \Rightarrow P$

は True であることになります。最初の問題を正しいとした人もおそらく、そういうことを考えたからなのでしょう。ですから、

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$$

という数学の命題をいつでも真 (True) とするのは間違いですが、最初の問題を論理的に正しくないというかどうかは単純ではありません。まあ他の問題を見ると、比較において、正しくなさそうなのがあるから、まあこれは誤りだと出題者は言いたいのでしょう。と出題者に愛をもって接さないと痛い目にあうかもしれませんね。

日常語でこの論理の話しをすると、いまのような難しいこと（数学ではない問題）を多く含んでしまいます。でも、同時に、数学を純粋にすることによって、上のような反例はどのような場合かをはっきりさせることができるのも確かですね。

最後に、ICU に 10 年程前までおられた野崎先生がよく使われていたという命題。

怒られないと勉強しない。

これを $P \Rightarrow Q$ の形であらわしてその対偶 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg Q)$ を考えてみましょう。最初の命題が真であることと、対偶が真であることは同値なはずです。

勉強すると怒られる。

こうなりましたか。なんか変な気はしませんか。この話しをしたら、わがやでは「起こさないと起きない」を今のように言い換えると「起きたら起こされる」になって絶対におかしい。でも何がおかしいのだろうと言うことになってしまいました。行動に関係した、時間的前後関係があるときは、気をつけないといけないと言うことですね。注意して表現すると「勉強しているのは、怒られたからだ。」「起きたのは、起こされたからだ。」となるわけですね。そう考えると上で考えた「あす晴れならピクニックへ行く」というのも時間的前後関係が含まれていますから、注意しないといけないことになりますね。これを「ピクニックにいかなければ明日は晴れない。」と同じだと思う人はいないでしょうけれど。

2.4.6　いつも数学・もっと Google

- Google 検索は大文字・小文字の区別はしません。

  ICU と icu は同じ検索結果です。

- 検索語は 10 語まで。space を入れなくても、勝手に単語に区切るので、続ければ良いというわけではありません。

- 複合検索はできない組合せもあります。

“*phrase*”　Quatation marks で囲むと一続きの言葉として検索します。

“International Christian University” とすると、International Christian University の検索結果の 1/200 になります。

AND space または、AND は logical and $\wedge$ を意味し、キーワード全てが含まれているものを探します。

“International Christian University” AND “国際基督教大学” とすると、上のさらに 1/30 になります。

OR OR または、| は logical or $\vee$ を意味し、キーワードのどちらかを含むものを探します。

“International Christian University” OR “国際基督教大学” とすると、“International Christian University” の検索の 3 倍ぐらいヒットします。

(*keys*) 括弧を使うこともできます。たとえば次のように使います。

(“International Christian University” OR ICU) AND Mitaka

これは次のものとも同じです。

(“International Christian University” | ICU) Mitaka

縦棒と I (ninth letter) は違いますから気をつけて。

- minus はそれを含まないという意味です。negation $\neg$ そのものは無いのですが、これを使えば、同じことができます。

教養学部 - (“国際基督教大学” “東京大学”)

ちょっと注意が必要です。論理的には、(教養学部 - “国際基督教大学”) | (教養学部 - “東京大学”) と同じはずですが、– においては、教養学部 - “国際基督教大学” - “東京大学” を検索するようです。

これ以外にも、任意の文字列を表す “*” や、AND や OR のような予約語や、THE や A の様に短いものを自動的に省いてしまうことを避ける、+ もありますが、詳しくは下のサイトなどで調べて下さい。

特別構文を少し説明します。intitle:, allintitle:, intext:, allintext:, inurl:, allinurl:, inanchor:, allinanchor:, site:, link:, cash:, daterange:, filetype:, related:, info:, phonebook:, rphonebook:, bphonebook:, stocks: などです。

“phonebook:, rphonebook:, bphonebook:” はアメリカの電話番号が調べられるというものですし、“stocks: ” は株ですから、これらは日常的にはあまり関係ないでしょう。説明を必要とするものもあるので、少しだけ言葉の解説。

“*http://douweosinga.com/projects/googlehacks/*” は “Google Hacks” という本のホームページの住所ですが、この様な住所を URL (Uniform Resource Locator) といいます。これに対して、以下で SITE といっているのは、douweosinga.com または、www.icu.ac.jp のことで、domain 名とか、host 名とか普通言われるものです。ホームページが置いてある機械の住所と思って下さい。つまり、url のほうが細かいと思って下さって構いません。

site: colon が必要です。site 名の最後が、jp なら日本、国を表したり、com という commercial site を表したりいまでは、たくさんできましたから簡単ではありませんが、日本の学術機関は最後が、ac.jp アメリカは、edu 他の国は、ac.+ 国名のところと、edu. + 国名のところとあるようです。

教科書検定 site:mext.go.jp

これは、文部科学省内の、教科書検定という項目を含むところを探します。

(ICU | 国際基督教大学) -site:icu.ac.jp

これは、icu.ac.jp 以外のところで、最初の keyword のどちらかを含むところを探します。

ビスフェノール site:ac.jp

「ビスフェノール A」は環境ホルモンまたは、内分泌攪乱物質とよばれるものですが、これは安全だということを主張している企業も多くあります。学術的にはどういっているのかをみるときは、site などで絞るのも良いでしょう。-site:(com co.jp) も一つの方法です。

inurl: URL の中に限定して調べます。site と同じようにも使えますが、例えば、help を探そう等と言うときにも有効です。

Google inurl:help site:ac.jp

これは、Google という言葉を含み、URL に help を含むものを ac.jp の中から検索します。

地球温暖化 (inurl:ac.jp | inurl:go.jp), (ICU | 国際基督教大学) (inurl:co.jp | inurl:com)

上にも書いたように、site も使えます。

link: そのページにリンクされているページを検索します。

link:www.icu.ac.jp

filetype: filetype は、例えば、Hypertext Markup Language で書かれたものは、file の最後に、html や、htm がついていてそれを認識するようになっている場合が多く、最後に doc とついているとは Microsoft Word の文書などとなっているわけです。詳しくは、

http://nic.phys.ethz.ch/readme/113 などを見て下さい。

filetype:pdf site:icu.ac.jp

とすると、icu.ac.jp がつくサイトにある、pdf file を見つけてくれます。

w3.icu.ac.jp の中などアクセス制限がある場合には、Google 検索は使えません。現在は、Namazu という全文検索システムが一応使える状態にありますが、十分ではないようです。

他にもいろいろとありますが、電卓機能は便利なので、書いておきます。

電卓機能：　通常の電卓よりはかなり便利で、換算などは、オススメです。太字の答えを返してくれます。

70 * 3 * 10 + 120

(70 * 3 * 10) + 120 = 2 220

seventy times three times ten plus one hundred and twenty

(seventy times three times ten) plus one hundred and twenty = two thousand two hundred twenty

50 * 45 minutes in hours

50 * 45 minutes = 37.5 hours

18 degree c in f

18 degree Celsius = 64.4 degrees Fahrenheit

42.195 km in mile

42.19500 kilometers = 26.2187575 mile

2 pint in cc

2 US pint = 946.35295 cc

Google で運営するサイト：　次のものは、その中で検索もまた使えます。directory, groups, images, news, catalogs, froogle　これらの言葉のあとに、google.com をつけて下さい。

Google 検索結果の視覚化:　次のサイトで、Enter Starting URL に、たとえば、www.icu.ac.jp とでも入れてみて下さい。少し待つと、ちょっと感激するかな。上のボタンの Title だと日本語が化けるので、url を選んだ方がおもしろいかも知れません。

http://touchgraph.com/TGGoogleBrowser.html

Page Rank Algorithm:　Google でどのようなものを一番上にリストするかは、重要ですよね。特に宣伝の為には、このページの評価点を与えるのが、次の計算式です。

$$PR(A) = (1-d) + d\left(\frac{PR(T1)}{C(T1)} + \cdots + \frac{PR(Tn)}{C(Tn)}\right)$$

- $T1, \ldots, Tn$ は page A にリンクを張っているページです。
- $PR(A)$ は page A の PageRank です。
- $PR(T1), \ldots, PR(Tn)$ は page $T1, \ldots, Tn$ の PageRank です。
- $C(T1), \ldots, C(Tn)$ は、page $T1, \ldots, Tn$ から外に向けられているリンクの数。
- d は $0 < d < 1$ である制動係数といわれるもので、通常は、0.85 となっています。

被リンクが多く、リンクしてくれているところの PageRank が大きく、かつ、そのページのリンク数が少ないとき、自分の PageRank が大きくなりますね。

この節の内容は [1, 2, 3, 4, 5] を参考にしました。現在は、Google も maps や、earth も登場し、さらに世界が広がっています。

このあと、たてつづけに Google 関連の書籍および、ネット検索に関するものが出版されています。図書館にもかなり入っていますので、調べてみて下さい。

注意：論理式を使った検索で $(key1) - (key2, key3)$ とした場合、単に論理式を翻訳すると $(key1) \wedge \neg(key2 \wedge key3)$ となりますが、実際には、$(key1) \wedge \neg(key2 \vee key3)$ が検索されます。いろいろとためしてみて下さい。

モンティ・ホール・ジレンマ

これは、数学者も簡単な論理を間違えるという例として引用されるものです。

> マリリンへ「あなたがゲーム番組に出ていて、3 つのドアのうち一つを選ぶとします。一つのドアの後ろには車があって、あとの二つのドアの後ろには山羊がいます。あなたは、ドアを一つ、たとえば一番のドアを選んだとします。番組の司会者は残った二つのドアのうち、一つ、たとえば三番のドアを開けます。司会者は、それぞれのドアの後ろに何があるのかを知っています。三番目のドアには山羊がいました。ここで司会者はあなたに、「二番目のドアに変えますか。」と聞きます。さて、二番のドアに変えた方がいいでしょうか。」(クレイグ・F・ウィタカー)
>
> クレイグへ「はい、変えるべきです。最初に選んだドアで車にあたる確率は 1/3 ですが、二番目のドアであたる確率は 2/3 です。次のように考えるとわかりやすいでしょう。たとえば、100 万のドアがあったとします。あなたは、その中から一番のドアを選びました。司会者はドアの後ろに何があるか知っていて、賞品の入っているドアは開けません。司会者は 77 万 7777 番のドアをのぞいて、のこりすべてのドアを開けました。あなただったら、すぐに 77 万 7777 番に変えるでしょう。

これには、たくさんの数学者が反論。結局、マリリンが正しいことが証明された有名な問題。日常の問題を数学語に厳密に翻訳することが、数学者にも難しいことをあらわす一例。

「気がつかなかった数字の罠　論理思考力トレーニング法」マリリン・ヴォス・サヴァント (Marilyn vos Savant) 著、東方雅美訳 中央経済社 ISBN4-502-36500-9 [18].

2.5　練習問題

Quiz 1, 2005

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	x
T	T	T			F
T	T	F			F
T	F	T			T
T	F	F			F
F	T	T			F
F	T	F			T
F	F	T			F
F	F	F			T

[判定と理由]

2. $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\wedge$ は使わないこと。

3. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。

$$\begin{aligned} x \quad \equiv \quad & ((((\neg\, p) \underline{\quad} (\neg\, q)) \underline{\quad} (\neg\, r)) \ \vee \\ & (((\underline{\quad}\, p) \underline{\quad} (\neg\, q)) \ \wedge \ (\underline{\quad}\, r))) \underline{\quad} \\ & (((\underline{\quad}\, p) \ \wedge \ (\underline{\quad}\, q)) \underline{\quad} (\underline{\quad}\, r)) \end{aligned}$$

Quiz 1, 2005, 解答

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$(p$	$\vee$	$q)$	$\Rightarrow$	r	$(p$	$\Rightarrow$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)$	x
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F
T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	F
T	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F
F	T	F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	F	T

[判定と理由]

二つの論理式の真理値が、p, q, r の真理値に関わらず等しいから、等値である。すなわち、上の式は成立する。

2. $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\wedge$ は使わないこと。

   解：一般的に $a \Rightarrow b \equiv (\neg a) \vee b$。上の二つの論理式は等しいから、前の式を書き替えると、次のようになる。

$$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r \equiv (\neg(p \vee q)) \vee r$$

3. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。

$$\begin{aligned} x \quad \equiv \quad & ((((\neg\, p) \,\underline{\wedge}\, (\neg\, q)) \,\underline{\wedge}\, (\neg\, r)) \;\; \vee \\ & (((\underline{\quad}\, p) \,\underline{\wedge}\, (\neg\, q)) \;\; \wedge \;\; (\underline{\quad}\, r))) \,\underline{\vee} \\ & (((\underline{\neg} p) \;\; \wedge \;\; (\underline{\quad}\, q)) \,\underline{\wedge}\, (\underline{\neg}\, r)) \end{aligned}$$

Quiz 1, 2004

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

[判定と理由]

2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\vee$ は使わないこと。
3. *key1* または *key2* を含み、かつ *key3* は含むが、*key4* は含まない項目を Google で検索したい。どのような検索式をインプットすれば良いか。ここで、*key1* などは検索語を表すものとする。

Quiz 1, 2004, 解答

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\Rightarrow$	r	p	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)$
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	T	F	F
T	F	T	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
T	F	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	F
F	T	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
F	T	F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	F
F	F	T	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
F	F	F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	F

[判定と理由]

解：成立しない。p, q, r の真理値がそれぞれ F, T, F である場合は、$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ の真理値は F であるが、$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ の真理値は T であり、等しくない。したがって、真理値が同じではない場合があるので、等値ではない。

2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\vee$ は使わないこと。

   解：一般に、命題 x, y について $x \Rightarrow y \equiv (\neg x) \vee y$ であること、$\neg(\neg x) = x$、$\neg(x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y)$ であることを用いる。

$$\begin{aligned}(p \Rightarrow q) \Rightarrow r &= \neg(p \Rightarrow q) \vee r = \neg((\neg p) \vee q) \vee r \\ &= (p \wedge (\neg q)) \vee r = \neg(\neg((p \wedge (\neg q)) \vee r)) \\ &= \neg(\neg(p \wedge (\neg q)) \wedge (\neg r))\end{aligned}$$

3. *key1* または *key2* を含み、かつ *key3* は含むが、*key4* は含まない項目を Google で検索したい。どのような検索式をインプットすれば良いか。ここで、*key1* などは検索語を表すものとする。

   解：

$$(\ \textit{key1}\ \ \mathrm{OR}\ \ \textit{key2}\ )\quad \mathrm{AND}\quad \textit{key3}\ -\ \textit{key4}$$

   または、

$$(\ \textit{key1}\ \ |\ \ \textit{key2}\ )\quad \textit{key3}\ -\ \textit{key4}.$$

Quiz 1, 2003

1. p, q を命題とする。このとき、下の真理表のような真理値をもつ命題 x, y を p, q, $\neg$, $\vee$ を用いて表せ。$\wedge$ や $\Rightarrow$ は使ってはいけないが、括弧は使っても良い。(p, q, $\neg$, $\vee$ や括弧は何度用いても良い。)

p	q	x	y
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	F

$x \equiv$

$y \equiv$

2. p, q, r を命題とする。このとき、下の真理表を完成することによって、次の式が成り立つかどうか判定せよ。理由も記せ。

$$(p \vee q) \Rightarrow (\neg r) \equiv \neg(p \vee (q \wedge r)).$$

p	q	r	$(p \quad \vee \quad q) \quad \Rightarrow \quad (\neg \quad r)$	$\neg \quad (p \quad \vee \quad (q \quad \wedge \quad r))$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

[判定と理由]

Quiz 1, 2003, 解答

1. p, q を命題とする。このとき、下の真理表のような真理値をもつ命題 x, y を p, q, $\neg$, $\vee$ を用いて表せ。$\wedge$ や $\Rightarrow$ は使ってはいけないが、括弧は使っても良い。(p, q, $\neg$, $\vee$ や括弧は何度用いても良い。)

p	q	x	y
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	F

$$x \equiv (\neg p) \vee q$$

$$y \equiv \neg((\neg p) \vee (\neg q))$$

気付いた方が多いと思いますが、$x \equiv p \Rightarrow q$, $y \equiv p \wedge q$ です。これらが $\neg$, $\vee$ だけで書き直すことができることは、$\Rightarrow$ や $\wedge$ は使わなくても等値な式を表すことができることを意味しています。同様に、$p \vee q \equiv \neg((\neg p) \wedge (\neg q))$ ですから、$\neg$ と $\vee$ のかわりに $\neg$ と $\wedge$ を使うこともできることがわかります。しかし、すこし余分に記号を用いた方が意味がわかり易かったり、式が短くなったりしますね。どのような論理記号を用いるのが、ある目的のために有効かというのは、コンピュータなどの回路を設計する時に非常に重要な問題です。

2. p, q, r を命題とする。このとき、下の真理表を完成することによって、次の式が成り立つかどうか判定せよ。理由も記せ。

$$(p \vee q) \Rightarrow (\neg r) \equiv \neg(p \vee (q \wedge r)).$$

p	q	r	$(p$	$\vee$	$q)$	$\Rightarrow$	$(\neg$	$r)$	$\neg$	$(p$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r))$
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	F

太字の部分がそれぞれの真理値。

[判定と理由] 成立しない。なぜなら、p, q, r の真理値がそれぞれ、T, T, F であるとき、$(p \vee q) \Rightarrow (\neg r)$ の真理値は T であるのに対し、$\neg(p \vee (q \wedge r))$ の真理値は F で異なるから。（これか一つでも異なればことなるので、一箇所示せば良いことに注意。）

Quiz 1, 2002

1. 右の図は、集合 A, B, C, D を表したものである。

   (1) E は $\star$ のついている 6 つのマス目の部分で表される部分集合とする。E を A, B, C とそれらの補集合 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ および $\cap, \cup$ を用いて表せ。括弧（かっこ）は用いて良いが、D や、$\overline{D}$ は用いないこと。

   (2) 一般に S, T を集合とするとき $S \triangle T = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$ とする。このとき、$((A \triangle B) \triangle C) \triangle D$ の部分を斜線で表せ。

	1	2	3	4
a				
b	$\star$	$\star$		
c	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
d				

A はタテ 1,2 列、B はヨコ a, b 行、C はヨコ b, c 行、D は タテ 2,3 列からなるそれぞれ 8 個のマス目の部分で表される部分集合とする。

2. p, q, r を命題とする。このとき、

(1) $r \Rightarrow ((\neg p) \wedge q)$ の真理表を完成せよ。

p	q	r	$r \quad \Rightarrow \quad ((\neg \quad p) \quad \wedge \quad q)$	x
T	T	T		T
T	T	F		F
T	F	T		T
T	F	F		F
F	T	T		F
F	T	F		F
F	F	T		T
F	F	F		F

(2) 真理値が上の表の最後の列となるような論理式 x を $p, q, r, \neg, \wedge, \vee$ を用いて表せ。括弧は良いが、$\Rightarrow$ は用いないこと。

Quiz 1, 2002, 解答

1. 右の図は、集合 A, B, C, D を表したものである。

(1) E は $\star$ のついている 6 つのマス目の部分で表される部分集合とする。E を A, B, C とそれらの補集合 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ および $\cap$, $\cup$ を用いて表せ。括弧（かっこ）は用いて良いが、D や、$\overline{D}$ は用いないこと。

$E = (A \cup \overline{B}) \cap C$. ただし答えはこれだけではありません。いくつか書いておきましょう。$E = (A \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) = (A \cap C) \cup (\overline{\overline{A} \cap B} \cap C) = (A \cap B \cap C) \cup (\overline{B} \cap C)$. いくつかの集合にまたがって補集合をとっているものは、点をひきました。最初のものが、一番短い書き方で、短い書き方はそれなりに重要ですが、単に、表すだけなら、星のついているところを一つずつ表す方法があります。すなわち、A, B, C すべてに入っているところ $A \cap B \cap C$ と、A と C には入っているが、B に入っていないところ、$A \cap \overline{B} \cap C$ と、A と B には入っていないが、C に入っているところ $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ を合わせたものだから、$E = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$ と表すことができます。ちょっと長いですが。3 つの集合を表すだけなら、2, 3 列はなくても良かったことになります。注意しないといけないのは、括弧です。$A \cup \overline{B} \cap C$ と書くと、$(A \cup \overline{B}) \cap C$ なのか $A \cup (\overline{B} \cap C)$ なのか分かりませんね。この後の方だと、違う部分を表します。どこの部分を表しているか分かりますか。

(2) 一般に S, T を集合とするとき $S \triangle T = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$ とする。このとき、$((A \triangle B) \triangle C) \triangle D$ の部分を斜線で表せ。

右の図で $*$ をつけたところを表します。$A \triangle B$ は論理関数の方では、和を表しますといいました。そう考えると、1 の場所が奇数個の時、1 そうでない時、0 となりますから、A, B, C, D のうち、奇数個に入っているところだけが、斜線で塗られることになり、A, B, C, D のうち偶数個に入っているところは、入らないことになります。このことを考えると市松模様が出来上がります。和と同じだと考えれば、括弧の付け方によらないことも分かりますから、$((A \triangle B) \triangle C) \triangle D = (A \triangle B) \triangle (C \triangle D)$ となり、授業で説明した、昨年度の小テストと同じ問題になります。

	1	2	3	4
a				
b	$\star$	$\star$		
c	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
d				

	1	2	3	4
a		$*$		$*$
b	$*$		$*$	
c		$*$		$*$
d	$*$		$*$	

2. p, q, r を命題とする。このとき、

(1) $r \Rightarrow ((\neg p) \wedge q)$ の真理表を完成せよ。

p	q	r	r	$\Rightarrow$	$((\neg$	$p)$	$\wedge$	$q)$	x
T	T	T	T	***F***	F	T	F	T	T
T	T	F	F	***T***	F	T	F	T	F
T	F	T	T	***F***	F	T	F	F	T
T	F	F	F	***T***	F	T	F	F	F
F	T	T	T	***T***	T	F	T	T	F
F	T	F	F	***T***	T	F	T	T	F
F	F	T	T	***F***	T	F	F	F	T
F	F	F	F	***T***	T	F	F	F	F

答えは、太字の二重線で囲まれた五列目。

(2) 真理値が上の表の最後の列となるような論理式 x を $p, q, r, \neg, \wedge, \vee$ を用いて表せ。括弧は良いが、$\Rightarrow$ は用いないこと。

x の真理値が (1) の答の真理値と逆であることに気づけば、答えは、$\neg(r \Rightarrow ((\neg p) \wedge q))$ しかし、$\Rightarrow$ は使えないので、$s \Rightarrow t = (\neg s) \vee t$ を用いると、$\neg((\neg r) \vee$

$((\neg p) \wedge q))$ となります。論理式の性質を用いると、これから、

$$\begin{aligned}
&\neg((\neg r) \vee ((\neg p) \wedge q)) \\
&\quad = \quad \neg(\neg r) \wedge \neg((\neg p) \wedge q)) = r \wedge \neg((\neg p) \wedge q)) \\
&\quad = \quad r \wedge ((\neg(\neg p)) \vee (\neg q)) = r \wedge (p \vee (\neg q)) = (p \vee (\neg q)) \wedge r
\end{aligned}$$

となります。じつは、p が真である集合を A、q が真である集合を B、r が真である集合を C とすると、x の真理値が T である部分が3箇所ありますから、それらを最初の問題の図で表してみるとそれは、1(1) と同じになります。そこから、1(1) の答を翻訳し直すと、答が得られます。または、x が T という値をとるところを表すと、$p \wedge q \wedge r$ が T となる場合か、$p \wedge (\neg q) \wedge r$ が T となる場合か、$(\neg p) \wedge (\neg q) \wedge r$ が T となる場合のいずれかですから、結局、次のようにも書けます。

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge (\neg q) \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge r).$$

これらもかっこの付け方によって、違うものを表しますから、気をつけて下さい。

Quiz 1, 2001

1. 右の図（省略）は、集合 A, B, C, D を表したものである。

   (1) $\star$ の部分を A, B, C, D とそれらの補集合 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ および $\cap, \cup$ で表せ。

   (2) 一般に S, T を集合とするとき $S \triangle T = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$ とする。このとき、$(A \triangle B) \triangle (C \triangle D)$ の部分を斜線で表せ。

   A : 左 2 行、B : 上 2 行、

   C : 中 2 行、D : 中 2 行

	1	2	3	4
a				
b				
c		$\star$		
d				

A はタテ 1,2 列、B はヨコ a, b 行、C はヨコ b, c 行、D は タテ 2,3 列からなるそれぞれ 8 個のマス目の部分で表される部分集合とする。

2. p, q を命題とする。このとき、

   (1) $\neg(p \wedge q)$ と $(\neg p) \vee (\neg q)$ の真理値は等しいことを示せ。(真理表を作れ)

   (2) (1) の結果を命題 p, q に具体的な言葉を当てはめて説明せよ。