# 7　微分係数と導関数

次の二つの関数を考える。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x + 1 \\ g(x) &= x^2 - 2x - 1 \;=\; (x-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

微分を利用する最初は、関数がどんな動きをしているかを調べることである。例えば具体的には次のような問題を考える。

A. $f(x) = 0$ はいくつ解を持つでしょうか。$f(x)$ と $g(x)$ は何回交わるでしょうか。

B. $x = 1$ の辺では $f(x)$ は増えているのでしょうか、減っているのでしょうか。

C. $x \geq 0$ で $f(x)$ が一番小さくなるのはいつでしょうか。

まず $y = f(x)$、$y = g(x)$ が大体どのようなグラフかを書いてみるために、それぞれの $x$ にたいする値を書いてみましょう。

| | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3 - x + 1$ | $\cdots$ | $-5$ | $1$ | $1$ | $1$ | $7$ | $25$ | $\cdots$ |
| $x^2 - 2x - 1$ | $\cdots$ | $7$ | $2$ | $-1$ | $-2$ | $-1$ | $2$ | $\cdots$ |
| $x^3 - x^2 + x + 2$ | $\cdots$ | $-12$ | $-1$ | $2$ | $3$ | $8$ | $\cdots$ | |

これから大体予想できる。

a. $f(x) = 0$ は $-2 < x < -1$ に解を一個もつ。$0 < x < 1$ の間に解があるかも知れないがどうもあとはなさそうだ。
$h(x) = f(x) - g(x)$ を考えると、交わるのは $h(x) = 0$ の時だから $-1 < x < 0$ で交わる。あとは、交わらないようだ。

b. $f(x)$ が $x = 1$ の辺で増加しているか減少しているかを見るためには、$h$ を小さな数として $f(1+h) - f(1)$ を考えてみるのが良いのではないでしょうか。

$$(f(1+h) - f(1) > 0 \text{ if } h > 0) \wedge (f(1+h) - f(1) < 0 \text{ if } h < 0) \Leftrightarrow \text{増加}$$

となっています。ここで、$\Delta f = f(1+h) - f(1)$ ($\Delta$ は Difference からとっています。前にも他のものを $\Delta f$ で表しましたから注意して下さい）とおいて計算してみると、

$$\Delta f = f(1+h) - f(1) = (1+h)^3 - (1+h) + 1 - (1^3 - 1 + 1) = h((1+h)^2 + (1+h))$$

となり、$h > 0$ なら $\Delta f > 0$、$h < 0$ なら $\Delta f < 0$ ですから上のことから $f(x)$ は $x = 1$ で増加していることがわかります。ただこの $\Delta f$ は $h$ がゼロに近づくとやはりゼロになってしまいます（これは、$f(x)$ が連続という性質でした)。そこで、$\Delta f$ ではなくこれを $h$ で割ったものを考えると、一般に $x = a$ の近くで（すなわち小さい $h$ に対して）

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0 \Leftrightarrow \; f(x) \text{ は } x = a \text{ の近くで増加}$$

となっています。では、$h$ を 0 に近づける、すなわち極限をとって、それが正か負かで増加しているか、減少しているかが分かりそうです。

ほかの見方をすると、これは、$x=a$ における接線の傾きを考えていることになっています。

c. 一番ちいさくなっていたり、大きくなっていたりするところでは、減少から増加に変わったり、増加から減少にかわったりしていますから、$(f(a+h)-f(a))/h$ が $h$ が 0 に近づいて来て負から正になるときに、負から正に変わったり、正から負に変わったりすることがわかります。ですから、この極限値が存在すれば、そこでは 0 になっているはずです。他の言い方では、接線が $x$-軸に平行になる点を求めれば、そのへんで一番ちいさくなっていたり、大きくなっていたりするところが分かりそうです。

A. グラフの概形を描きたい。

B. 関数の変化率を調べたい。

C. 山のテッペン、谷の底を知りたい。

D. もっと難しい複雑な関数も扱いたい。

E. $x$ だけじゃなくて、$y$ も含んでいるような関数、例えば、$f(x,y)=4xy-2y^2-x^4$ なんかについては、分からないの。

F. 微分てほかにどんなことに使えるの。

**定義 7.1** 関数 $f(x)$ が、点 $x=a$ 及びその近くで定義されていて、かつ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ \left(=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

が存在するとき、この値を $f(x)$ の点 $a$ における微分係数と言い、$f'(a)$ と書く。関数 $f(x)$ が、各点 $a$ で微分可能であるとき、$a$ に $f'(a)$ を対応させる関数を $f(x)$ の導関数と言い、$f'(x)$、$df/dx$、$Df$ で表す。関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求めることを、微分するという。

**命題 7.1** (1) $h\neq 0$ が小さいとき常に $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$ であることと、$f(x)$ が $x=a$ で増加していることは同値。

(2) $h\neq 0$ が小さいとき常に $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}<0$ であることと、$f(x)$ が $x=a$ で減少していることは同値。

(3) $f'(a)>0$ ならば $f(x)$ は $x=a$ で増加。

(4) $f'(a)<0$ ならば $f(x)$ は $x=a$ で減少。

**Note.**　(3), (4) の逆は成り立ちません。その例はあとで学びます。

最初の例では、

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} ((1+h)^2 + (1+h)) = 2 > 0.$$

ですから、$x = 1$ で $f(x)$ は増加しています。

**命題 7.2** 関数 $f(x)$ が、点 $a$ で微分可能ならば、点 $a$ で、連続である。

証明.　関数 $\alpha(x)$ を次のように定義する。

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & x \neq a \\ f'(a) & x = a \end{cases}$$

すると、$\alpha(x)$ は、定義から、点 $a$ で連続。従って、

$$f(x) = \alpha(x)(x - a) + f(a)$$

も、点 $a$ で連続。 ■

**Note.**　上の命題において、逆は必ずしも成り立たない。すなわち、連続でも、微分可能とは言えない。例えば、$f(x) = |x|$。

$\lim_{x \to a} \alpha(x) = f'(a)$ だから $a$ の近くでは $f(x)$ は $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ となっていることがわかります。この関数は、$g(a) = f(a)$ で傾きが $f'(a)$ の直線をあらわしています。これを $f(x)$ の $x = a$ における接線といいます。

**命題 7.3** $f(x)$, $g(x)$ を微分可能な関数、$c$ を定数とすると以下が成り立つ。

(1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, $(cf(x))' = cf'(x)$

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

証明.　まず、$f(x)$, $g(x)$ が微分可能ということから、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),\ \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

が成り立っています。

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

したがって (1) が得られます。(2) も同様に、

$$\begin{aligned}(cf(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\\ &= c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= cf'(x).\end{aligned}$$

(3) は少し複雑ですが、途中に式をはさむと、

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h))+(f(x)g(x+h)-f(x)g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned}$$

最後のステップでは $g(x)$ が微分可能であることから、$g(x)$ は連続であり（命題 7.2)、したがって $\lim_{h\to 0} g(x+h)=g(x)$ が成り立つことを使っています。普通は、$(f(x)g(x))'=f'(x)g'(x)$ となりそうですが、こうならない理由を上の証明から考えて下さい。たとえば、

$$(x^2)'=(x\cdot x)'=(x)'x+x(x)'=x+x=2x$$

であって、$1=(x)'\cdot(x)'$ ではありません。(3) は二段階に分けて考えましょう。まずは、$f(x)=1$ の場合。

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{hg(x+h)g(x)}(g(x)-g(x+h))\\ &= \frac{1}{g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}\lim_{h\to 0}\left(-\frac{g(x+h)+g(x)}{h}\right)\\ &= \frac{1}{(g(x))^2}(-g'(x))\\ &= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

ここで $f(x)/g(x)=f(x)\cdot(1/g(x))$ であることから、上に示したことと (2) を用いると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)'\\ &= f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\left(-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right)\\ &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

となり結果が得られます。 ■

**例 7.1** 1. （多項式の微分）$f(x) = x^n$ の、$x = a$ における、微分係数と導関数。

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \\
&= na^{n-1}
\end{aligned}$$

従って、$f(x) = x^n$ の導関数は、$f'(x) = nx^{n-1}$。

2. （三角関数の微分）$f(x) = \sin x$ の、$x = a$ における、微分係数と導関数。

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$x = a + h$ と置くと、

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(a + h/2)\sin(h/2)}{h/2} \\
&= \lim_{h \to 0} \cos(a + h/2) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \\
&= \cos a
\end{aligned}$$

従って、$f(x) = \sin x$ の導関数は、$f'(x) = \cos x$。ここで、以下の公式を用いている。

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

これは、単位円の扇形と、それを挟む、三角形の面積を用いた次の不等式から得られる。

$$\frac{1}{2}\sin\theta \leq \pi \cdot \frac{\theta}{2\pi} \leq \frac{1}{2}\tan\theta, \quad 1 \leq \frac{\theta}{\sin\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}$$

3. （指数関数の微分）$(e^x)' = e^x$。ここで、

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

とする。$e = 2.718281828459045 23\ldots$ は、無理数のなかでも、特に、超越数と呼ばれ、どんな有理数係数の多項式の根にもなっていないことが知られている。

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

従って、$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ を示せばよい。
$e^h = 1 + 1/t$ とおく。$h = \log(1 + 1/t)$ だから、

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1/t}{\log(1 + 1/t)} = \frac{1}{\log(1 + 1/t)^t}$$

従って、結局、$h \to 0$ のとき、$e^h \to 0$ のとき、従って、$t \to \infty$ で、$(1 + 1/t)^t \to e$ を言えばよい。実は、これは上の、自然対数 $e$ の定義から得られる。

## 微分法復習

**例 7.2** 微分（導関数を求めること）。

1. $y = 4x^3 + 5x^2 - 3x$, $y' = 4 \cdot (x^3)' + 5 \cdot (x^2)' - 3 \cdot (x)' = 12x^2 + 10x - 3$.
2. $y = x^2 - 3x + 1$, $y' = 2x - 3$.
3. $y = 3x^3 - 2$, $y' = 9x^2$.
4. $y = 2x^3 - 5x^2 - 3$, $y' = 6x^2 - 10x$.
5. $y = (3x+1)(x^2+x+2)$, $y' = 3(x^2+x+2) + (3x+1)(2x+1) = 9x^2 + 8x + 7$.
6. $y = (x+1)(3x-1)$, $y' = (3x-1) + 3(x+1) = 6x + 2$.
7. $y = (2x+1)(x^2-x-3)$, $y' = 2(x^2-x-3) + (2x+1)(2x-1) = 6x^2 - 2x - 7$.
8. $y = (x^2-x+1)(x^2-2x+3)$, $y' = (2x-1)(x^2-2x+3) + (x^2-x+1)(2x-2) = 4x^3 - 9x^2 + 12x - 5$.
9. $y = (x^2+1)(x^3-x^2)$, $y' = 2x(x^3-x^2) + (x^2+1)(3x^2-2x) = 7x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x$.
10. $y = \dfrac{1}{x^3}$, $y' = \dfrac{-3}{x^4}$.
11. $y = \dfrac{7x-6}{x^2+1}$, $y' = \dfrac{-7x^2+12x+7}{(x^2+1)^2}$.
12. $y = \dfrac{1}{x+3}, y' = \dfrac{-1}{(x+3)^2}$.
13. $y = x^2e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x}$, $y' = (2x - x^2)e^{-x}$

**練習問題 7.1** 以下の関数を微分せよ。

1. $y = x^2 - 2x - 1$
2. $y = x^3 - x^2 + 2x + 1$
3. $y = -7x^5 + x^3 + 2x - 6$
4. $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$
5. $y = \dfrac{3x-5}{x^2+x+2}$
6. $y = (2x+3)^2$
7. $y = (x+1)(x+2)(x+3)$.

8. $y = \dfrac{x-2}{2x-1}$.

9. $y = \dfrac{3x-1}{x^2+2}$.

10. $y = \dfrac{3x^2+1}{x^2-x+1}$.

## 7.1 合成関数の微分

**命題 7.4** $g(x)$ は、点 $a$ で微分可能、$f(x)$ は、点 $g(a)$ で微分可能とする。このとき、

$$\frac{d}{dx}f(g(a)) = f'(g(a))g'(a)$$

証明. $F(x) = f(g(x))$ とおく。すると、

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(g(a))g'(a) \end{aligned}$$

$g(x)$ は、点 $x=a$ で微分可能だから、連続、すなわち、$x$ が、$a$ に近づくとき、$g(x)$ は、$g(a)$ に近づく。 ■

この公式が使えるようになるととても便利です。英語では Chain Rule と言います。

**例 7.3**

1. $y=(3x+1)^4$。これは、展開して、$y=81x^4+108x^3+54x^2+12x+1$ として、微分すると、$y'=324x^3+324x^2+108x+12$ となります。しかし、ここで、$f(x)=x^4$, $g(x)=3x+1$ とすると、$f(g(x))=(3x+1)^4$ となりますから、上の公式を用いることができる状況にあります。$f(g(x))$ のいみは、$f(x)=x^4$ の $x$ を $g(x)=3x+1$ で置き換えたと言う意味です。$f'(x)=4x^3$, $g(x)=3$ ですから、$y=f(g(x))$ のとき $y'=f'(g(x))g'(x)=4(3x+1)^3\cdot 3=12(3x+1)^3$ となります。すなわち、$3x+1$ をひとかたまりたとえば $X$ とおいて（この場合は $X^4$ と考え)、$X$ の関数だと思って全体を微分し、その結果（この場合は $4X^3=4(3x+1)^3$）に $X$ の部分（この場合は、$3x+1$）を $x$ で微分したもの（この場合は 3）をかけておくという形になっています。

2. $y=(1-2x^2)^3$。この場合は $f(x)=x^3$, $g(x)=1-2x^2$ とおくと、$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=-4x$ ですから $y'=3(1-2x^2)^2(-4x)=-12x(1-2x^2)^2$ となります。

3. $y=e^{-x^2}$ では、$f(x)=e^x$, $g(x)=-x^2$ と見ることができます。ですから、$y'=-2xe^{-x^2}$ となります。

4. $y=(2x+3)^5$, $y'=5(2x+3)^4\cdot 2=10(2x+3)^4$.

5. $y=(3x-2)^7$, $y'=21(3x-2)^6$.

6. $y=\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$, $y'=6\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^5\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)$

## 7.2 $x^n$ の微分

$y = x^n$ の微分について考えましょう。

**$n$ が正の整数または $0$ のとき:** $y = x^n$ とおくと、$y' = nx^{n-1}$ でした。$1 = x^0$ の微分は $0$ です。

**$n$ が負の整数のとき:** $n = -m$ とおくと $m$ は自然数になります。$y = x^n = x^{-m} = 1/x^m$ ですから、商の微分をつかうと、

$$y' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m}{x^{m+1}} = nx^{n-1},\ (x^n)' = nx^{n-1}.$$

すなわち、$n$ が負のばあいもおなじ式が成り立つことがわかります。

**$n$ が分数のとき:** $n = p/q$ ただし $p$ は整数（負の整数の可能性も含む）$q$ は $1$ 以上の整数とします。$y = g(x) = x^n = x^{p/q}$ から $g(x)^q = x^p$ となります。$f(x) = x^q$ とすると、$f(g(x)) = x^p$ となりますから、この微分を考えると、

$$px^{p-1} = f'(g(x))g'(x) = q(x^{p/q})^{q-1}g'(x) = qx^{\frac{p(q-1)}{q}}g'(x)$$

となります。ここで $n$ が整数のときは、$(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つことを使っています。$g'(x)$ は分かりませんが、実にそれが求めたいものでした。そこで、

$$(x^n)' = g'(x) = \frac{px^{p-1}}{qx^{\frac{p(q-1)}{q}}} = \frac{p}{q}x^{p-1-\frac{p(q-1)}{q}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1}.$$

これは、$(x^n)' = nx^{n-1}$ が $n$ が有理数（分数で表される数）の時も成り立つことを意味しています。

**例 7.4**

1. $y = \sqrt{x}$ とすると、$y = x^{1/2}$ のことですから、

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となります。

2. $y = \sqrt{x^2+1}$ は、$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 1$。$y = f(g(x))$ ですから、上の場合と、合成関数の微分を用いて、

$$y' = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. $y = 1/(x+3)^2$ のときは、

$$y' = ((x+3)^{-2})' = (-2)(x+3)^{-3} = \frac{-2}{(x+3)^3}$$

となります。

## 7.3 対数関数の微分

$(x^n)' = nx^{n-1}$ は $n$ がいろいろな場合に成り立つことが分かりました。ここで 逆に微分して $x^n$ になる関数について考えてみましょう。たとえば、

$$y = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \longrightarrow y' = x^n$$

となっていることが分かります。しかし、うまくいかないところが一箇所あります。それが、$n+1=0$ すなわち、$n=-1$ のところです。すなわち、微分して $x^{-1}=1/x$ になる関数は $x^n$ の $n$ をいくらいろいろな数にしてみても、係数をつけてみても、見つからないということです。しかし、すでに知っている関数で微分するとこの関数になるものがあります。実は、

$$y = \log_e x \longrightarrow y' = \frac{1}{x}$$

となっています。このことを見てみましょう。

　$\log$ の定義から、

$$x = e^y \longleftrightarrow y = \log_e x$$

でした。ここで $f(x) = \log_e x$ とおくと、$x = e^{f(x)}$ です。この両辺を合成関数の微分をつかって微分すると、

$$1 = (x)' = (e^{f(x)})' = e^{f(x)}f'(x) = xf'(x)$$

ですから、

$$f'(x) = (\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

が得られました。

　この $\log_e x$ という関数はとても便利なので、数学では $e$ を省いて、$\log x$ と書きます。ほかの自然科学では $\log_{10} x$ も良く使うので、$\log x = \log_{10} x$、$\ln x = \log_e x$ として用いることも良くあります。ここでは、$\log x = \log_e$ と約束しましょう。

**例 7.5** $y = \log f(x)$ とすると、

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$