

5 多項式と多項式関数

5.1 多項式

微分積分に入る前に、基本的な関数として多項式と多項式関数について学びます。

定義 5.1 c_0, c_1, \dots, c_n を数とする時、文字 x を含む式、

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

を (x に関する) 多項式という。 $c_n \neq 0$ のとき、 $f(x)$ を次数 n の多項式といい、 $\deg f(x) = n$ と書く。 x に数を代入して、 $f(x)$ の値を考える場合は、 $f(x)$ を多項式関数という。 $\deg 0 = -\infty$ と約束する。

定理 5.1 $f(x)$ を多項式とする。このとき、以下が成立する。

(1) $g(x)$ も多項式とすると、 $\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$ 。

(2) $g(x) \neq 0$ ならば、多項式 $q(x), r(x)$ で

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \deg r(x) < \deg g(x)$$

となるものが存在する。

(3) $f(a) = 0$ ならば多項式 $g(x)$ で $f(x) = (x - a)g(x)$ をみたすものが存在する。

(3) a_1, a_2, \dots, a_m を相異なる数とする。 $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_m) = 0$ ならば多項式 $g(x)$ で

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_m)g(x), \deg g(x) = \deg f(x) - m$$

をみたすものが存在する。

a_1, a_2, \dots, a_m を相異なる数とする。 $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_m)$ 、 $P_i(x) = P(x)/(x - a_i)$ とすると、 $j \neq i$ のときは、 $P_i(x)$ は $(x - a_j)$ の項を含むから $P_i(a_j) = 0$ となる。また、 $P_i(a_i) \neq 0$ である。そこで $Q_i(x) = P_i(x)/P_i(a_i)$ とすると、 $Q_i(a_j) = 0$ 、 $Q_i(a_i) = 1$ となる。

命題 5.2 a_1, a_2, \dots, a_m を相異なる数とする。このとき、

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_m) = b_m$$

を満たす多項式 $f(x)$ が存在する。ある多項式 $h(x)$ を用いて、 $f(x)$ は次のように書くことができる。

$$f(x) = b_1 Q_1(x) + b_2 Q_2(x) + \dots + b_m Q_m(x) + h(x)P(x)$$

特に次数 $\deg f(x) \leq m$ を満たすものはただひとつだけである。

例 5.1

$$\begin{aligned} f(x) &= b_1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + b_2 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + b_3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= \frac{b_1}{2}(x-2)(x-3) - b_2(x-1)(x-3) + \frac{b_3}{2}(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

は、 $f(1) = b_1, f(2) = b_2, f(3) = b_3$ を満たす多項式であり、逆に $f(x)$ をこの条件を満たす多項式とすると、ある多項式 $h(x)$ で

$$\frac{b_1}{2}(x-2)(x-3) - b_2(x-1)(x-3) + \frac{b_3}{2}(x-1)(x-2) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)$$

と書くことができる。

多項式によって定義される関数は「非常に滑らか」なので、それぞれの点 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ で与えられた値をとる関数を与える方法として上の方法が用いられる。補間法 (Interpolation) と呼ばれる。

例 5.2 $f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 14, f(4) = 30$ となる 3 次の多項式を求めてみましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \\ &\quad + 14 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(1-3)(2-3)(4-3)} + 30 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \\ &= -\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{5}{2}(x-1)(x-3)(x-4) \\ &\quad - 7(x-1)(x-2)(x-4) + 5(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1) \end{aligned}$$

これで原理的には、補間法によって、与えられた点を通る多項式を求めることができました。計算は面倒な部分も多いですが、最近はその部分は計算機が計算してくれます。原理を知っていること。補間法が何をしているのかを理解することは大切です。

5.2 数学的帰納法

次が成り立つ。

$$(5-3) \quad 1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(5-4) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$(5-5) \quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^i b^{n-i-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

証明： (5-3) 2倍にして考えると、

$$2(1 + 2 + \cdots + n) = (1 + n) + (2 + n - 1) + \cdots + (n - 1 + 2) + (n + 1) = n(n + 1)$$

ですから公式が得られます。

(5-4) (5-3) もそうですが、**数学的帰納法**を用いると、簡単に証明できます。数学的帰納法は次の原理によっているものです。

空でない自然数の集合は最小元を持つ。

「いくつかの自然数からなる集合にはいつでも一番小さい元がある」ということです。当たり前のことですね。この原理をもちいると次のことが証明できます。

自然数に関する命題 $P(n)$ において、 $P(1)$ が真かつ、 $P(k)$ が真であることを**仮定した時** $P(k+1)$ が真であれば、すべての自然数 n について $P(n)$ は真である。記号で次のようにあらわすこともあります。 $\forall k$ の部分は ‘for all k such and such hold’ と読みます。

$$(P(1) \wedge (\forall k)[P(k) \Rightarrow P(k+1)]) \Rightarrow (\forall n)P(n)$$

これを数学的帰納法の原理といいます。これが正しいことを証明してみましょう。

$$S = \{n \mid n \text{ は自然数で } P(n) \text{ は偽}\}$$

S は自然数からなる集合で $P(n)$ が真となる自然数すべてからなっているといういみです。ですから、 S に入らない自然数 n については $P(n)$ が真となっています。(英語ではいくつかの自然数からなる集合のばあいは ‘a set of positive integers’ といいます。‘the set of positive integers’ は自然数全体からなる集合を意味します。さて上の S を英語で表現するとどうなるでしょうか。)

$S = \emptyset$ を示せば良いわけですから、 $S \neq \emptyset$ とします。すると上の原理から、 S に最小元 m が存在します。 $m \in S$ ですから、 $P(m)$ は偽です。 $P(1)$ は真だと最初に仮定していますから、 $m \neq 1$ です。 m は 1 とはことなる自然数ですから、 $m-1$ も自然数です。ところが、 m は S の最小元でしたから、それより小さい $m-1$ は S に入りません。したがって、 $m-1 \notin S$ です。 S に入っていない自然数については、命題は真のはずですから、 $P(m-1)$ は真。ところが仮定より m の一つ前 $m-1$ で $P(m-1)$ が真なら、 $P(m)$ も真でした。これは矛盾。したがって $S = \emptyset$ 。すなわち、すべての自然数 n について $P(n)$ は真です。

今、命題 $P(n)$ を次のようにおきます。

$$P(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$P(1)$ は真です。なぜなら左辺は、1 で右辺も 1 となります。 $P(k)$ が真だとすると、

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

です。これが成り立っていると仮定して、次の式を証明します。

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)$$

この式の左辺から出発すると、

$$\begin{aligned} LHS &= (1^2 + 2^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

これが求める式でした。最初のところで、 $P(k)$ が真であることを用いたことに注意して下さい。したがって、数学的帰納法により、すべての自然数について (5-4) が証明できました。

数学的帰納法による証明はなれると簡単ですが、最初から証明する式ができていないと、証明できません。つまり全体が把握されていないと証明に入れません。今の場合それが与えられていましたから、証明もできたという面が大きいのです。よく「証明することがわかれば、証明はそれほど難しくはない」といわれるゆえんです。(5-3) も同じように数学的帰納法で証明できます。証明を書いてみて下さい。

(5-5) この左辺を展開します。

$$\begin{aligned} &(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^i b^{n-i-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^{i+1}b^{n-i-1} + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} \\ &\quad - a^{n-1}b - \cdots - a^{i+1}b^{n-i-1} - \cdots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n \\ &= a^n - b^n \end{aligned}$$

5.3 差分と多項式関数

次のような数列を考えましょう。

0	0	3	13	34	70	125	203	308	444
	0	3	10	21	36	55	78	105	136
		3	7	11	15	19	23	27	31
			4	4	4	4	4	4	

最初の数列を f_n 、二番目を g_n 、三番目を h_n とすると、

$$h_{n+1} - h_n = 4, g_{n+1} - g_n = h_n, f_{n+1} - f_n = g_n$$

となっていることがわかります。。新しい数列を作る方法を

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n = g_n, \Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta g_n = h_n, \dots, \Delta^m f_n = \Delta(\Delta^{m-1} f_n), \dots,$$

とすると、 $\Delta f_n = g_n, \Delta^2 f_n = h_n, \Delta^3 f_n = 4, \Delta^4 f_n = 0$ となっています。同じように、 $\Delta^2 h_n = 0, \Delta^3 g_n = 0$ となっている。さて、このとき、 f_n などを n の関数のように表すことができないでしょうか。

$h_n = 3 + 4(n-1)$ です。この式で h_1, h_2, h_3, \dots の値があっていることを確かめて下さい。この数列を「公差4、初項3の等差数列 (arithmetic sequence)」といいます。上の例の場合では、 $g_{n+1} = h_1 + h_2 + \dots + h_n$ だったので、

$$g_{n+1} = \frac{1}{2}n(4n+2) = n(2n+1), \quad g_n = (n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1$$

となっています。 g_{n+1} から g_n を得るところは g_m 、 $m = n+1$ したがって $n = m-1$ として導いた方が間違いが少ないかも知れません。では、 f_n はどうなっているのでしょうか。 $f_{n+1} - f_n = 2n^2 - 3n + 1$ でしたから、

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= 0 + 3 + \dots + (2n^2 - 3n + 1) \\ &= \sum_{k=1}^n (2k^2 - 3k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \quad \text{ここで公式 (5-3), (5-4) を用いると} \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1) \\ f_n &= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3) \end{aligned}$$

となります。

すこしまとめてみましょう。一般に $\{f_n\}$ を数列としたとき、

- $\Delta f_n = 0$ ならば $f_n = d$ 。
- $\Delta f_n = d$ ならば $f_n = c + d(n-1)$ で $c = f_1$ 。さらにこの場合は、 $\Delta^2 f_n = 0$ となっています。 f_n は n の一次式。 $c_0 + c_1 n$ という形をしています。

定理 5.3 $\Delta^{m+1} f_n = 0$ ならば f_n は n の m 次式、すなわち次の形をしている。

$$f_n = a_0 + a_1 n + \dots + a_m n^m.$$

逆にこの形をしていると、 $\Delta^{m+1} f_n = 0$ 。

証明. まず、 $\Delta n^m = m \cdot n^{m-1} + c_{m-2} n^{m-1} + \dots + c_1 n + c_0$ となる定数 c_0, c_1, \dots, c_{m-2} がとれることを証明します。

$$\begin{aligned} \Delta n^m &= n^m - (n-1)^m \quad \text{公式 (5-5) を用いると} \\ &= (n - (n-1))(n^{m-1} + n^{m-2}(n-1) + \dots + n(n-1)^{m-2} + (n-1)^{m-1}) \\ &= m \cdot n^{m-1} + (m-2 \text{ 以下の } i \text{ にたいする } n^i \text{ に係数がついた項}) \end{aligned}$$

これによって、最初にかいたような定数 c_0, c_1, \dots, c_{m-2} がとれることが分かりました。

それでは、数学的帰納法で、次の命題を証明しましょう。

$P(m) : \Delta^m f_n = 0 \Leftrightarrow f_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_{m-1} n^{m-1}$ となる定数 a_0, a_1, \dots, a_{m-1} がとれる

最初に \Leftarrow を証明します。

$P(1) : f_n = a_0$ となる定数 a_0 があれば $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n = a_0 - a_0 = 0$ ですから、 $\Delta f_n = 0$ を満たします。

$P(k)$ が成り立っているとします。すなわち、どんな数列も n に関して $k-1$ 次式で書けていれば、 Δ^k をとると 0 になるとします。

$$\begin{aligned} & \Delta^{k+1}(a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k) \\ &= \Delta(\Delta^k(a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1})) + \Delta^k(\Delta n^k) \\ &= \Delta 0 + \Delta^k(k n^{k-1} + c_{k-2} n^{k-2} + \cdots + c_1 n + c_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり証明できました。

次に \Rightarrow を証明します。

$P(1) : \Delta f_n = 0$ とすると、 $0 = \Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ ですから、 $f_1 = a_0$ とすると、 $f_n = a_0$ となる。

$P(k)$ が満たされていると仮定する。

$P(k+1) : \Delta^{k+1} f_n = 0$ とします。 $g_n = \Delta f_n$ とおくと $\Delta^k g_n = \Delta^k \Delta f_n = \Delta^{k+1} f_n = 0$ だから $P(k)$ を仮定したことより、 $g_n = b_0 + b_1 n + \cdots + b_{k-1} n^{k-1}$ となる定数 b_0, b_1, \dots, b_{k-1} をとることができます。ここで

$$h_n = f_n - \frac{b_{k-1}}{k} n^k$$

とおき、証明の最初に示したことを使うと、

$$\begin{aligned} \Delta h_n &= h_{n+1} - h_n \\ &= (f_{n+1} - \frac{b_{k-1}}{k} (n+1)^k) - (f_n - \frac{b_{k-1}}{k} n^k) \\ &= (f_{n+1} - f_n) - \frac{b_{k-1}}{k} ((n+1)^k - n^k) \\ &= \Delta f_n - \frac{b_{k-1}}{k} \Delta n^k \quad n^k \text{ に最初に示した式を用いると} \\ &= g_n - \frac{b_{k-1}}{k} (k \cdot n^{k-1} + c_{k-2} n^{k-2} + \cdots + c_1 n + c_0) \\ &= (b_{k-2} - \frac{b_{k-1}}{k} c_{k-2}) n^{k-2} + \cdots + (b_1 - \frac{b_{k-1}}{k} c_1) n + (b_0 - \frac{b_{k-1}}{k} c_0) \end{aligned}$$

となり、 Δh_n は $k-2$ 次になりますから、 \Leftarrow をもちいると、 $\Delta^k h_n = \Delta^{k-1} \Delta h_n = 0$ 。帰納法の仮定より $P(k)$ を用いると、 $h_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1}$ となる定数 a_0, a_1, \dots, a_{k-1} があることが分かります。ここで、 $a_k = b_{k-1}/k$ とおけば、 $f_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k$ となることが分かります。 ■