2　集合と論理

この節では、集合と論理という数学を記述していく上での基本的な言語について学びます。

2.1　Sets : 集合

まず簡単に、集合とは何かを定義しておきましょう。

集合 (Set) : 「もの」の集まり

どんなものをもってきてもよいが、それがその集まりの中にあるかないかがはっきりと定まっているようなものでなければならない。

「ものの集まり」であっても以下のものは、集合ではない。

テロリスト支援国家全体、英語のできる ICU 生全体、国際人全体。はっきりとした基準がないからである。

元、要素 (Element) : 集合 A のなかに入っている個々の「もの」を A の元、要素といい、a が集合 A の元であることを、記号で

$$a \in A \text{ または } A \ni a$$

と書く。a は A の属する、a は A に含まれるなどと言う。その否定 (a は A の元ではない) を

$$a \notin A \text{ または } A \not\ni a$$

と書く。

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ のように、A を表すのに A の元をすべて列挙する定義を外延的定義といい、$A = \{x \mid x$ は 10 以下の素数 $\}$ の様に、その元の満たすべき条件を記述することによる定義を内包的定義という。ここで、素数 x とは、1 と x 以外に約数がない 2 以上の自然数である。したがって、

$$A = \{2, 3, 5, 7\} = \{x \mid x \text{ は 10 以下の素数}\},\ 3 \in A,\ 6 \notin A,\ 11 \notin A.$$

2.2　Logic : 論理

まず命題を定義します。

命題 (Proposition) : 正しい (真 True) か正しくない (偽 False) が明確に区別できる文を命題という。「正しい」を「成り立つ」、「正しくない」を「成り立たない」と考えても良い。

真理値 (Truth Value) : 命題が真であることを「T」(True)、偽であることを「F」(False) で表す。これを命題の真理値という。

否定・論理和・論理積・含意 : $\neg P$（命題 P の否定）、$P \vee Q$（命題 P と Q の論理和)、$P \wedge Q$（命題 P と Q の論理積)、$P \Rightarrow Q$（命題 P は Q を含意）を次の真理値をもつ命題と定義する。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

P、Q、R が命題である時、$\neg P$、$P \vee Q$、$P \wedge Q$、$P \Rightarrow Q$ も命題である。

$\neg P$ は 「P ではない。」ということを表現したものです。P が真のときに、偽、P が偽のときに 真であるような命題だと定義しています。A を集合とするとき、$a \in A$ は一つの命題ですから、$\neg(a \in A)$ も一つの命題です。これは、$a \notin A$ を表しています。$3 > 5$ も命題です。これは、偽な命題です。この否定 $\neg(3 > 5)$ は何を表しているでしょうか。これは、$3 \leqq 5$ を表しています。これは真の命題です。

数学語では、'and'「かつ」は 'logical and'「論理積」を、'or'「または」は 'logical or'「論理和」をあらわします。自然言語では曖昧ですが、数学ではある利用法に明確にしておきます。それを明確に定義する方法が、この真理表である。例えば、$3 \leqq 5$ は $(3 < 5) \vee (3 = 5)$ を表します。実は、$\leqq$ と言うことを決める時に、そのように定義するのですが。

練習問題 2.1 次の真理表を作れ。

1. $(\neg P) \vee Q$
2. $(P \wedge Q) \Rightarrow \neg Q$
3. $((\neg P) \vee Q) \Rightarrow P$
4. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
5. $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$

$(\neg P) \vee Q$ および $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ の真理値と $P \Rightarrow Q$ の真理値は P, Q の真理値が何であっても同じになります。P, Q などの真理値が論理式の真理値をきめるので、真理値の値をとる関数と言う意味で、一つ一つの論理式によって、真理値関数が一つずつ決まる、という言い方をします。二つの論理式が同一の真理値関数を決める時、この二つの論理式は互いに等値であるといいます。このことを $\equiv$ で表します。P, Q に関する論理式としては同じことを意味しているといったことです。上の例では、

$$(\neg P) \vee Q \equiv P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$$

$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ を $P \Rightarrow Q$ の対偶 (contraposition) と言います。この二つの真理値がすべて等しいと言うことは、命題の対偶はその命題と等値ということになります。ある命題が正しいことを証明するには、その対偶が正しいことを証明すれば良いことになります。対偶のそのまた対偶はもとの命題にもどります。

命題 2.1 次が成立する。

(1) $P \vee P \equiv P$.

(2) $P \wedge P \equiv P$.

(3) $\neg(\neg P) \equiv P$.

(4) $P \vee Q \equiv Q \vee P$.

(5) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$.

(6) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$.

(7) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$.

(8) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

(9) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

(10) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

(11) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.

全称命題 (Universal Proposition) : 「任意の（すべての）x について命題 $P(x)$ が成り立つ」を全称命題といい $\forall x\, P(x)$ と書く。

存在命題 (Existential Proposition) : 「ある x について命題 $P(x)$ が成り立つ」を存在命題といい $\exists x\, P(x)$ と書く。

x はある条件をみたすものについて考えますので、たとえば x の動く範囲が集合 A だとすると、$(\forall x \in A)P(x)$ などと書きます。この意味は、“For all $x \in A$, $P(x)$ holds.” です。“for all” は、“for every” とか “for any” と言うこともあります。$(\exists x \in A)P(x)$ は、“There exists some $x \in A$ such that $P(x)$ holds.” となります。きれいな日本語で表すのが難しい部分でもあります。例えば、$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ などを整数といいます。整数全体を $\boldsymbol{Z}$ で表すとします。

$$(\forall x \in \boldsymbol{Z})((\exists y \in \boldsymbol{Z})(x + y = 0))$$

などということを言いたいわけです。わかりますか。どんな整数 x をとってきても、整数 y で $x + y = 0$ となるものがありますよ。と言う命題を言っているわけです。$y = -x$ とすれば良いわけです。どんな x と言っていますが、それは整数なら何でもと言う意味です。1 でも -3 でも 0 でも。もうすでに日常語では、表現するのが難しくなっていると思います。日常語では x と y がよもや同じ場合は考えないでしょう。でも、たとえば上の命題で $x = 0$ のときは $y = 0$ です。上の命題の意味を約束通り理解して、論理を組み立てていくには、やはり訓練が必要です。数学を勉強するときに一番力がつくのはその約束（だけ）の上に組み立てていく推論力だと思いますがどうでしょうか。

上の命題の (10), (11) の拡張ですが、次が成立します。

$$\neg((\exists x)P(x)) = \forall x(\neg P(x)),\ \neg((\forall x)P(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

練習問題 2.2 $\boldsymbol{R}$ で実数（数全体、正の数、負の数、少数や分数、0 をすべて含むものとします）をあらわすものとする。以下のうち、正しいものは証明し、誤っているものについてはその命題の否定は何であるか書いてみましょう。

1. $(\forall x \in \boldsymbol{R})[x^2 > 0]$.
2. $(\exists x \in \boldsymbol{R})[x^2 > 0]$.
3. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[x + y = 0]$.
4. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[x + y = 0]$.
5. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[x + y = y]$.
6. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[x + y = y]$.
7. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[xy = 1]$.
8. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[xy = 0]$.
9. $(\forall x \in \boldsymbol{R})(\exists y \in \boldsymbol{R})[xy = y]$.
10. $(\exists x \in \boldsymbol{R})(\forall y \in \boldsymbol{R})[xy = y]$.

2.2.1 ブール代数と電子回路

Distinctive Normal Form (DNF) P と Q から論理演算によって作られた命題は、それぞれが T か F かによって 4 通りの場合があることがわかります。3 つの命題から得られる時は 8 種類ですね。それらに、かってに T か F をかきこんだとき、それを表す論理式は $\neg, \wedge, \vee$ から作れるでしょうか。

二つの場合を考えてみましょう。$P \wedge Q$ は P, Q どちらも T のときだけ T でそれ以外は F です。では、$(\neg P) \wedge Q$ はどうですか。これは、P が F で Q が T の時だけ、T でそうでないとき、F となっています。それでは、P, Q がどちらも T のときか、P が F で Q が T のときこの二つの場合に T でそれ以外で F というものはどうでしょうか。実は、これは、

$$(P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge Q)$$

と表せば良いことがわかります。どうようの考えで、T の値をとるべきところを一つずつ $\wedge$ を用いてあらわし、それらを $\vee$ で結ぶと、どんな真理値関数も作ることができることがわかります。このようにして作ったものを Disticntive Normal Form と言います。でも実は、上で作ったものは、Q と同じになっています。つまり、このようにして作ったものは、必ずしも一番簡単な（短い）表現ではないと言うことです。

じつは、この一番簡単な表現を見つけると言う問題は、回路の設計などでもとても重要なのですが、難問でまだ完全解答はわからないのだそうです。

もう一つは、$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ と 4 つを使って勉強してきましたが、これらはすべて必要なのだろうかと言うことです。実は、たとえば $\neg$ と $\wedge$ だけあれば十分であることがわかっています。もちろんそうすると表現は長くなりますが。

2.2.2　自然言語と記号論理

このように、記号を使って、命題に演算を定義して論理を組み立てていく学問を記号論理といいます。論理を扱っていますが、自然言語の言葉の使い方とは、違っています。

例 2.1　「日本語と数理」細井勉著、共立出版 (ISBN 4-320-01344-1, 1985.10.1)

1. またはの使い方：「太郎か花子」

   太郎か花子は来るよ（包含的）。太郎か花子が来るよ（排他的）。

   23 日か、22 日（列挙でも順番に意味がある場合がある）

2. 注意すべき言い回しの例：「そのつぎに小さい数」

   ここに 5 個の数があります。それは、10，20，30，40，50 です。そこで質問です。

   (1) 10 の次に小さい数はいくつですか。

   (2) 50 の次に小さい数はいくつですか。

   (3) 30 の次に小さい数はいくつですか。

「または」が使われる場所によって意味が少し変わることは上の例からもわかると思います。曖昧さをなくすため、論理和は、真理値で定義するわけです。しかし、含意が「ならば」の記号化だということには、疑問をいだく方が多いようです。友人がこんな説明がいいよと教えてくれたのは、次の例です。

おとうさんが、こどもに、「こんど数学で 5 をとったらゲーム機を買ってあげるよ」と約束したとする。5 をとったのに、ゲーム機を買ってあげなかったら、おとうさんは約束違反だけれど、5 をとれなかったのに、ゲーム機を買ってあげたとする。それは、約束違反ではない、ですね。

仮定が成り立っていない時は、結論が成り立っていても、成り立っていなくても、嘘ではない、真だという意味で、$P \Rightarrow Q$ は P の真理値が F のときは、Q の真理値が何であっても、真としていることに注意して下さい。

日常的には、「あす晴れたらピクニック」といったら、雨でピクニックということはないでしょう。でも、あす晴れたらという条件を満たしていなければ、ピクニックに行っても、いかなくてもそれは、偽にはならないと約束しましょうということです。はっきりいいたければ、「あす晴れたらピクニック、あす晴れなかったらピクニックはしません」と数学のことばではいうことにしましょうということです。もちろん、晴れの定義が曖昧ということは、別として。

たとえば、英語でルールなどを記述するときは、‘A or B or both’ で論理和をあらわして、混乱を避けます。曖昧さがなにで、それを避けるためにはどうするかは、数学の問題ではありませんが、論理的に考える訓練のもとで、コミュニケーションのときに、これらに、注意深くなることは混乱をさけるためにも大切だと思います。しかし、数学の世界を絶対として、日常の会話でも、「または」といえば、数学の意味の論理和の意味でそれ以外は間違いなどとするような数学帝国主義は困りますね。

2.2.3　法科大学院適性試験問題

以下の問題は最近スタートした法科大学院適性試験問題の中の、「論理的判断力問題」の中からいくつか抜きだしたものです。

1. 次の主張のなかで、論理的に正しいものを選びなさい。

   (1) 火のないところには絶対に煙は立たないものとする。いま、煙は立っていないとすると、火はないと判断することができる。

   (2) 風が吹けば必ず桶屋が儲かるものとする。いま、桶屋が儲かっていないならば、風は吹かなかったと判断することができる。

   (3) 夕焼けがあれば、必ず翌日は晴れるものとする。今日は、夕焼けがなかったら、明日は晴れないと判断することができる。

   (4) 鳥は多くの場合空を飛ぶものとする。チコは空を飛ばないとすると、チコは鳥ではないと判断することができる。

   (5) 故意または過失があれば罪になるものとする。いま扱っている事件では、加害者は故意または過失がないから、彼は罪にはならないと判断することができる。

2. 次の文章を読み、下の問いに答えよ。

   ある大学で入学試験を行なった日に雪が降った。その地方ではめったに雪が降ることはなかったので、交通機関に遅れが生じ、多くの遅刻者が出ることになった。このことについて、次の A, B, C の三つの主張が三人から出された。

   A.　遅刻した人は電車とバスを両方利用していた。

   B.　電車もバスも利用しなかった人は遅刻しなかった。

   C.　電車を利用しなかった人は遅刻しなかった。

   問: A, B, C の主張相互の論理的関係として正しいものを、次の (1)–(6) のうちから一つ選べ。

   (1) A が正しいとき、必ず B も正しい。また、B が正しいとき、必ず C も正しい。

   (2) A が正しいとき、必ず C も正しい。また、C が正しいとき、必ず B も正しい。

   (3) B が正しいとき、必ず A も正しい。また、A が正しいとき、必ず C も正しい。

   (4) B が正しいとき、必ず C も正しい。また、C が正しいとき、必ず A も正しい。

   (5) C が正しいとき、必ず A も正しい。また、A が正しいとき、必ず B も正しい。

   (6) C が正しいとき、必ず B も正しい。また、B が正しいとき、必ず A も正しい。

3. 次の文章を読み、したの問い（問１、問２）に答えよ。

   新しい接続表現「とんで」を次のように定義する。

   > **定義：** 文 x が真であり、かつ文 y が偽である場合、文「x とんで y」は真とし、それ以外の場合、すなわち、文 x が偽であるか、文 y が真である場合には、文「x とんで y」は偽とする。

ここで、x, y などの文は、真又は、偽のいずれかであるとする。また、「x とんで y」も一つの文であるから、それと文 z を「とんで」で接続して、「(x とんで y) とんで z」や、「z とんで (x とんで y)」のような文を作ることができる。

問 1 次の文 A, B, C の真偽の組合せとして正しいものを、下の (1) – (6) のうちから一つ選べ。ただし、イワシ、カラス及びタヌキの分類については常識に従うものとする。

A. （イワシは魚だ、とんで、カラスは鳥だ)、とんで、タヌキはほ乳類だ。

B. イワシは魚だ、とんで、(カラスは鳥だ、とんで、タヌキはほ乳類だ)。

A. イワシは魚だ、とんで、(カラスは両生類だ、とんで、タヌキはは虫類だ)。

(1) A は真、B と C は偽である。
(2) B は真、A と C は偽である。
(3) C は真、A と B は偽である。
(1) B と C は真、A は偽である。
(1) A と C は真、B は偽である。
(1) A と B は真、C は偽である。

問 2 次の (1) – (5) の中から誤っているものを一つ選べ。

(1) 「x とんで x」は、x の真偽によらず常に偽である。
(2) 「(x とんで y) とんで x」は、x と y の真偽によらず常に偽である。
(3) 「x とんで (y とんで x)」は、x の真偽と同じである。
(4) 「(x とんで y) とんで y」は、「x とんで y」の真偽と同じである。
(5) 「x とんで (x とんで y)」の真偽は、「y とんで (x とんで x)」 の真偽と同じである。

解答：1. (2) 正解率 35.6% 2. (2) 3-1. (4), 3-2 (5).

どうですか、ICU の一般学習能力試験を思い出した方、こういう問題は得意だという方、ちんぷんかんぷんな方、いろいろでしょう。これは、数学の論理の問題からとられていることは確かですね。少し時間をかけて適性試験手にはいるものは解いてみましたが、数学的に考えると難しいと思える問題はありませんでした。しかし、少し問題も感じましたので、ひとこと。それは、日常語、自然言語を用いる危なさですね。法科大学院のためだから、法律家を目指す人に動機を失わさないようにするには、純粋に数学の言葉で書くことはできないのでしょうが、曖昧さを含むことになります。

たとえば最初の問題を考えてみることにしましょう。

火のないところには絶対に煙は立たないものとする。いま、煙は立っていないとすると、火はないと判断することができる。

これは、逆命題は一般的には成り立たないから、これは正しくないというのが、ここでの「正解」です。しかし、正解でないというためには、こう判断することができない状況が存在して（反例があって）はじめてこの命題は正しくないはずです。では、どのような状況が考えられるのでしょうか。一応、数学的に考えるため、単純化しましょう。

命題 P: 火がない

命題 Q: 煙がない

このもとで最初の仮定は「$P \Rightarrow Q$」と考えることができると思います。正しいかどうか判断する結論は「$Q \Rightarrow P$」。ですから反例があるとすると「$P \Rightarrow Q$」が True で、「$Q \Rightarrow P$」が False という場合です。あとの方が False となるのは、P が False で Q が True の場合だけで、確かに、その場合は最初の命題は、True ですから、もしそのような状況があるとすると、「$P \Rightarrow Q$」が True で、「$Q \Rightarrow P$」が False。すなわち、次の命題は False となります。

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$$

では、P が False で Q が True とはどのような状況でしょうか。「火はないが、煙はある」という状態です。「火がある」とはどういう状態で、「煙がある」とはどういう状態かを定義しなければ議論にならないといいきるのはへ理屈でしょうか。確かに「火は消えたけれどまだ煙はくすぶっているよ」なんてことは日常的には良くいいますね。「でも、それはまだ火が完全には消えていないということでしょう」といわれると、言い返すのは難しい。何を言っているかわかりますか。煙があるときはまだ火があるのだとすると、$Q \Rightarrow P$ は True であることになります。最初の問題を正しいとした人もおそらく、そういうことを考えたからなのでしょう。ですから、

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$$

という数学の命題をいつでも真 (True) とするのは間違いですが、最初の問題を論理的に正しくないというかどうかは単純ではありません。まあ他の問題を見ると、比較において、正しくなさそうなのがあるから、まあこれは誤りだと出題者は言いたいのでしょう。と出題者に愛をもって接さないと痛い目にあうかもしれませんね。

日常語でこの論理の話しをすると、いまのような難しいこと（数学ではない問題）を多く含んでしまいます。でも、同時に、数学を純粋にすることによって、上のような反例はどのような場合かをはっきりさせることができるのも確かですね。

最後に、ICU に 10 年程前までおられた野崎先生がよく使われていたという命題。

怒られないと勉強しない。

これを $P \Rightarrow Q$ の形であらわしてその対偶 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg Q)$ を考えてみましょう。最初の命題が真であることと、対偶が真であることは同値なはずです。

勉強すると怒られる。

こうなりましたか。なんか変な気はしませんか。この話しをしたら、わがやでは「起こさないと起きない」を今のように言い換えると「起きたら起こされる」になって絶対におかしい。でも何がおかしいのだろうと言うことになってしまいました。行動に関係した、時間的前後関係があるときは、気をつけないといけないと言うことですね。注意して表現すると「勉強しているのは、怒られたからだ。」「起きたのは、起こされたからだ。」となるわけですね。そう考えると上で考えた「あす晴れならピクニックへ行く」というのも時間的前後関係が含まれていますから、注意しないといけないことになりますね。これを「ピクニックにいかなければ明日は晴れない。」と同じだと思う人はいないでしょうけれど。

法科大学院の適性試験に興味のあるかたは：

- http://www.jlf.or.jp/
- 朝日新聞 2003 年 9 月 2 日 朝刊

2.2.4 モンティ・ホール・ジレンマ:

> マリリンへ「あなたがゲーム番組に出ていて、3つのドアのうち一つを選ぶとします。一つのドアの後ろには車があって、あとの二つのドアの後ろには山羊がいます。あなたは、ドアを一つ、たとえば一番のドアを選んだとします。番組の司会者は残った二つのドアのうち、一つ、たとえば三番のドアを開けます。司会者は、それぞれのドアの後ろに何があるのかを知っています。三番目のドアには山羊がいました。ここで司会者はあなたに、「二番目のドアに変えますか。」と聞きます。さて、二番のドアに変えた方がいいでしょうか。」(クレイグ・F・ウィタカー)
>
> クレイグへ「はい、変えるべきです。最初に選んだドアで車にあたる確率は1/3ですが、二番目のドアであたる確率は2/3です。次のように考えるとわかりやすいでしょう。たとえば、100万のドアがあったとします。あなたは、その中から一番のドアを選びました。司会者はドアの後ろに何があるか知っていて、賞品の入っているドアは開けません。司会者は77万7777番のドアをのぞいて、のこりすべてのドアを開けました。あなただったら、すぐに77万7777番に変えるでしょう。

これには、たくさんの数学者が反論。結局、マリリンが正しいことが証明された有名な問題。日常の問題を数学語に厳密に翻訳することが、数学者にも難しいことをあらわす一例。

「気がつかなかった数字の罠　論理思考力トレーニング法」マリリン・ヴォス・サヴァント (Marilyn vos Savant) 著、東方雅美訳 中央経済社 ISBN4-502-36500-9

2.3　集合演算

論理演算を定義しましたが、これを用いて、集合の演算を定義しましょう。

部分集合 (Subset)： 集合 A、B において A のすべての元が、B の元であるとき、A は B の部分集合であると言い、

$$A \subset B \text{ または } B \supset A$$

と書く。すなわち、

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B) \text{ がつねに真} \Leftrightarrow (\forall x \in A)[x \in B]$$

$A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{x \mid Q(x)\}$ と書かれている時は、

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)].$$

集合の相等 (Equality of Sets)： 二つの集合 A, B において、$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つ時 A と B は相等であると言い $A = B$ と書く。ですから二つの集合 A と B が等しいことをいうときは、$x \in A$ はいつでも、$x \in B$ であり、$x \in B$ はいつでも $x \in A$ であることをいえば良いことになります。実際には、集合の演算についていろいろと準備をしておいて、いちいち元をとり、A の元はすべて B にはいっており、B の元はすべて A に入っているということをいわなくても、式の変形だけで、二つの集合が等しいといえることもあります。しかし、ともかく集合が等しいことの定義は上に述べたことで、これが基本です。

共通部分 (Intersection)： 二つの集合 A, B において、A と B の両方に共通な元全体の集合を A と B との共通部分といい $A \cap B$ と書く。すなわち、

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} = \{x \mid x \in A, x \in B\}.$$

定義から $A \cap B \subset A$ かつ $A \cap B \subset B$ です。ネット上の検索でも、言葉が二つ書いてあると、「かつ」を表すことになっています。カンマを入れるかどうかは、検索システムによってことなります。

和集合 (Union)： 二つの集合 A, B において、A の元と B の元とを全部寄せ集めて得られる集合を A と B との和集合といい $A \cup B$ と書く。すなわち、

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

ここで、またはといったときは、両方に入っている場合も含みます。定義から $A \subset A \cup B$ かつ、$B \subset A \cup B$ です。

ベン図 (Venn Diagram by John Venn (1834–1923)) で、集合の共通部分、和集合について表してみましょう。

空集合 (Empty Set)： 元を全く含まない集合を空集合といい $\emptyset$ で表す。

差集合 (Difference)： 二つの集合 A, B において、A の元で B の元ではない元全体の集合を A と B との差集合といい、$A \setminus B$ または $A - B$ と書く。すなわち、

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

定義から $A \setminus B \subset A$ です。

補集合 (Complement)： 全体集合 (U または Ω が良く使われる：(Universal Set)) を一つ定めた時その部分集合 A に対し、A に含まれない要素全体を A^c または $\overline{A}$ で表し、A の補集合と言う。 定義から $A \cap \overline{A} = \emptyset$ かつ、$A \cup \overline{A} = U$ となっています。差集合も $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ と表すことができます。

対称差（Symmetric Difference)*： $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ を A と B の対称差という。$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ となっています。

例 2.2

1. $\boldsymbol{N} = \{x \mid x \text{ は自然数 }\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: The set of natural numbers.
2. $\boldsymbol{Z} = \{x \mid x \text{ は整数 }\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$: The set of integers.
3. $\boldsymbol{R} = \{x \mid x \text{ は実数 }\}$: The set of real numbers.
4. $S = \{x \mid x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0\} = \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

   このように簡単には具体的に元が分かりにくいものもありますが、この集まりに入るか入らないかは決まっているので、これは集合です。

5. A を 2 の倍数である整数全体。B を 3 の倍数である整数全体。C を 4 の倍数である整数全体。D を 5 の倍数である整数全体、E を 6 の倍数である整数全体とする。整数に関する命題を次のように定義する。$P(x)$：x は 2 の倍数である。$Q(x)$：x は 3 の倍数である。$R(x)$：x は 4 の倍数である。 $S(x)$：x は 5 の倍数である。このとき、次を証明せよ。

   (a) $A \cap B = E$。
   (b) $A \cup B \neq \boldsymbol{Z}$。
   (c) $C \subset A$。
   (d) $A \cap C \subset E$。
   (e) $E \not\subset A \cap C$。

   このように 4 つ以上の集合になると、Venn diagram で表すことは難しくなります。たとえば、3 つの集合では、それぞれに入っている部分と入っていない部分で、一般的には、$2^3 = 8$ 個の部分が図に必要ですが、4 つの集合では、$2^4 = 16$ 個、5 つの集合では、$2^5 = 32$ 個の部分が必要であることがわかります。

練習問題 2.3 以下を証明せよ。

1. $A \cap B = A$ ならば $A \subset B$

   Let $x \in A$. Since $A = A \cap B \subset B$, $x \in B$. Thus $x \in A$ implies $x \in B$. We have $A \subset B$.

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

集合は数学の厳密化の中で生まれてきたものですが、それ自体のなかに矛盾を含むと指摘されたのが、以下の Russel の逆理です。

Russel の逆理（１９０３）： 集合を次のように２つの種類に分類する。すなわち自分自身を元として持たない集合を第一種の集合とし、自分自身を元としてもつ集合を第二種の集合とする。すべての集合は第一種または第二種である。そこですべての第一種の集合を M とする。かりに M が第一種の集合とすると、M 自身は M の元ではないはずであるが、M の定義からは、第一種の集合 M は M の元でなければならない。これは、矛盾である。またかりに M が第二種の集合であるとすれば、M 自身が M の元であることになるが、M の定義からは、第二種の集合 M は M の元ではありえない。すなわち M を第一種としても、第二種としても、矛盾をおこす。これは不合理である。

Let S be the set of all sets. Let

$$C_1 = \{M \in S \mid M \notin M\},\ C_2 = \{M \in S \mid M \in M\}.$$

Both $C_1 \in C_1$ and $C_1 \notin C_1$ imply a contradiction. ■

最初に集合を定義しましたが、厳密には不完全です。数学自体のなかの矛盾は、数学者をおおいに悩ませましたが、それがまた、数学基礎論というような新しい分野を生み出し、現在では基本的には、上のような矛盾については、解決しています。詳しくは説明できませんが、考える範囲をたとえば、ICU の学生全体とか、実数およびその部分集合全体などと限っておけば、矛盾が起こらないことがわかっています。もうすこし、知りたい人は、「新装版：集合とはなにか (はじめて学ぶ人のために)」竹内外史著、講談社 (BLUE BACKS B1332 ISBN4-06-257332-6, 2001.5.20) を参考にしてください。わたしのホームページの「本」の欄の 2001 年のところに読書記録があります。

問題 2.1 1. 7 の集合のすべての部分をあらわす図をそれぞれの集合がつながっている図形として平面に書くことができるでしょうか。$2^7 = 128$ の部分にわかれることになりますが、一つ一つの部分集合が穴がない平面図形としてあらわすことができるでしょうか。（クラスで 6 つまでは例を示しました。）

2. 同様の条件のもとで、n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ のすべての部分を表す図を作れるでしょうか。

注. この続きは、論理学概論 (HPh104, Introduction to Logic)、数学通論 I (MSMa210, Basic Concept of Modern Mathematics I)、計算理論 I-II (NSCo 300, 310, Theory of Computation I-II) by 高橋正子、Grant Pogosyan