Sample Exam for Review

I. 正しいものには ○、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。 (2pts×5)[1]

1. 命題 p, q, r において常に次の式が成り立つ。
$$\neg(p \wedge q) \vee r = ((\neg p) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r).$$
2. A を $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が無限に存在すれば他の $\boldsymbol{b}$ についても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{x}$ は無限に存在する。
3. A を $m \times n$ 行列で $m < n$ とする。このとき、行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は常に無限個の解を持つ。
4. 関数 $f(x)$ において、$f'(c) = 0$ かつ $f''(c) = 0$ とする。このとき、$f(x)$ は $x = c$ で増加しているか減少しているか、$f(x)$ が定数関数であるかのいずれかで $x = c$ で極大や、極小になることはない。
5. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば、$F(e^x)$ は $f(e^x)e^x$ の原始関数である。

II. 次の問いに答えよ。 (5pts×14)

1. $(p \Rightarrow q) \vee ((\neg r) \wedge q)$ の真理表を作れ。[2]
2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。
$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -3a + b \\ a + c \end{bmatrix}$$
3. A, B を下のような行列とすとき、積 AB および BA を求めよ。[3]
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
4. 前問の A は可逆かどうか（逆行列をもつかどうか）判定せよ。[4]
5. 次の行列を連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。[5]
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

[1] I: ×, ×, ○, ×, ○

[2] II-1: same as $p \Rightarrow q$, i.e., TTFFTTTT from top in standard order

[3] II-2: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, II-3: $AB = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

[4] II-4: $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ これより可逆。

[5] II-5: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_1 = -2s + 5t - u - 2, x_2 = s, x_3 = -2t + u, x_4 = -2t + u - 5, x_5 = t, x_6 = u$

6. 多項式 $f(x)$ は $f(1)=1,\ f(2)=-2,\ f(3)=4,\ f(4)=12$ を満たす。$f(x)$ の次数を 3 とするとき $f(x)$ を求めよ。[6]

7. 多項式 $g(x)$ で $g(1)=1,\ g(2)=-2,\ g(3)=4,\ g(4)=12$ かつ次数が 4 のものは無限個あることを示せ。

8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-4n+4}{n^3-8}$ を求めよ。

9. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}$ を求めよ。[7]

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)e^x-1}{x}$ を求めよ。ただし、$e^0=1$ である。(Hint: $f(x)=(x+1)e^x$.)

11. $(3x^2-2)^{10}$ 導関数を求めよ。

12. $(x^3-2x+1)e^{-3x^2}$ の導関数を求めよ。

13. $\displaystyle\int\left(x^2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

14. $y=f(x)=ce^{ax}+de^{bx}$ (a,b,c,d は定数で $a\neq b$) とする。$y''-2y'-3y=0$、かつ $f(0)=2,\ f'(0)=2$ を満たす、$y=f(x)$ を一つ求めよ。

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。 (10pts×2)

1. 下の行列 C の逆行列を求めよ。またその逆行列をもちいて、右下の連立一次方程式の解を求めよ。[8]

$$C=\begin{bmatrix}1&0&-1&-3\\1&0&-1&-2\\0&1&0&1\\0&-2&1&-4\end{bmatrix},\quad \left\{\begin{array}{ccccccc}x_1&&-x_3&-3x_4&=&1\\x_1&&-x_3&-2x_4&=&2\\&x_2&&+x_4&=&-3\\&-2x_2&+x_3&-4x_4&=&-1\end{array}\right.$$

2. $f'(x)=x^2(x-1)(x-5)=x^4-6x^3+5x^2$ かつ $f(0)=1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。また、$x=0,1,5$ におて $f(x)$ が極大か、極小か、増加しているか、減少しているかを決定せよ。[9]

---

[6]II-6: $f(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}-2\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}+4\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}+12\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$. II-7. 前問の $f(x)$ を用いると、$f(x)+a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4),\ a\neq 0$ はすべて条件をみたす。a は無限個の可能性がある。II-8. 3.

[7]II-9:0, II-10:2, II-11: $60x(3x^2-2)^9$, II-12:$(3x^2-2)e^{-3x^2}+(x^3-2x+1)e^{-3x^2}(-6x)=(-6x^4+15x^2-6x-2)e^{-3x^2}$ II-13: $\frac{1}{3}x^3-2\log_e|x|-\frac{1}{x}+C$, II-14: $y=e^{3x}+e^{-x}$.

[8]III-1: $C^{-1}=\begin{bmatrix}-4&5&2&1\\1&-1&1&0\\-2&2&2&1\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$, $x_1=-1,x_2=-4,x_3=-5,x_4=1$,

[9]III-2: $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3+1$, 0 で増加、1 で極大、5 で極小。