Final Exam of NSIB 2005

各解答用紙に ID と名前を書いて下さい。問題番号の明記を忘れずに。 (5pts$\times$ 20)

I. 次の問題の解答を解答欄の決められた場所に書いて下さい。

1. 解答欄の、$(p \vee (\neg q)) \Rightarrow r$ と $(q \vee r) \wedge (p \Rightarrow r)$ の真理表を完成し、これらの命題が等値（真理値がいつも等しい）かどうか判定せよ。

2. 関数 $f(x)$ とその高階導関数（何回か微分した関数）について、以下の記述のうち、正しいものには、◯ を、誤っているものには、$\times$ を解答欄に記入せよ。ただし、$f(x)$、$f'(x)$、$f''(x)$、$f'''(x)$ は微分可能とする。

   (a) $f(x)$ が $x = c$ で増加していれば、$f'(c) \geqq 0$ である。
   (b) $f'(c) = 0$ ならば、$f(x)$ は、$x = c$ で極大または、極小となる。
   (c) $f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0$ かつ $f''''(c) < 0$ ならば、$f(x)$ は $x = c$ で極大となる。
   (d) $x = c$ で $f(x)$ が極大となれば、$f'(c) = 0$ である。
   (e) $f'(x) = 0$ がすべての x に成り立てば、$f(x)$ は定数関数である。

II. 次の計算をし、途中式もふくめ、解答欄の決められた場所に書いて下さい。(Show work!)

3. $p(x)$ は多項式で、$p(-3) = p(-1) = p(1) = 0$ かつ、$p(3) = p(5) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 6 のものを一つずつ書け。

4. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 1 = q(x)(x+1) + r = c_4(x+1)^4 + c_3(x+1)^3 + c_2(x+1)^2 + c_1(x+1) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

5. $f(x) = x^2 e^x$ とする。このとき、 $f(x)$ は、$x = 0$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

6. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$ を求めよ。

7. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 2x + 1 - e^{2x}}{x^3}$ を求めよ。ただし、$e^0 = 1$ である。

8. $\sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ の導関数を求めよ。

9. $(x^2+1)e^{2x}$ の導関数を求めよ。

10. $\displaystyle\int \left(-\frac{4}{x^5} + \frac{1}{x} - 3 + 4x^3 \right) dx$ を求めよ。

11. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ を求めよ。

12. $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^5 dx$ を求めよ。

13. $\displaystyle F(x) = \int_{-2}^{x} (t^2+1)e^{2t} dt$ の導関数を求めよ。

III. 次の問題の解答を解答番号とともに、解答用紙に書いて下さい。

14. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。B を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

15. 右上の行列 C は逆行列を持たないことを示せ。定理を用いるときは、定理の主張ものべること。また、$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持たないような $\boldsymbol{b}$ を一つあげよ。

16. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ a \\ b+c \end{bmatrix}$$

17. 前問（問題 16）で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

18. 前々問（問題 16）の行列 T の逆行列を求めよ。

19. $y = f(x)$ は、次の微分方程式および、初期条件を満たすとき、$y = f(x)$ を求めよ。

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad f(1) = 10e$$

20. Hamming 符号 は、2 進 4 桁の情報 (0, 1 が四つ並んだもの $\boldsymbol{a}$ に、次の行列 G を右からかけ、

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

の計算規則で求めた $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}G$ を符号としたものである。ノイズで一箇所 0 が 1 または、1 が 0 になっても、行列 H を利用することにより、ノイズが入る前の $\boldsymbol{c}$ を復元することができる。この符号に関して次の問いに答えよ。ただし、G, H を以下の行列とする。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

この符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1011011) となった。もともとの符号は何だったか。理由も記せ。

鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*)

NSIB FINAL 2005 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I-1.

p	q	r	$(p \vee (\neg q)) \Rightarrow r$	$(q \vee r) \wedge (p \Rightarrow r)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

等値かどうかの判定：

2.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

メッセージ： 数学少しは楽しめましたか。苦しんだ人もいるかな。以下のことについて書いて下さい。

(A) この授業について。改善点など何でもどうぞ。

(B) ICU の教育一般について。改善点など、ICU に関すること何でもどうぞ。

No.	PTS.
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	
16.	
17.	
18.	
19.	
20.	
Total	

II.

3. $p(x)$ は多項式で、$p(-3) = p(-1) = p(1) = 0$ かつ、$p(3) = p(5) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 6 のものを一つずつ書け。

4. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 1 = q(x)(x+1) + r = c_4(x+1)^4 + c_3(x+1)^3 + c_2(x+1)^2 + c_1(x+1) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

5. $f(x) = x^2 e^x$ とする。このとき、 $f(x)$ は、$x = 0$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

6. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^4+3x^3-2x^2-9x-5}{x^3+4x^2+5x+2}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+2x+1-e^{2x}}{x^3}$ $(e^0=1)$

8. $\sqrt{x^2+1}=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ の導関数。

9. $(x^2+1)e^{2x}$ の導関数。

10. $\displaystyle\int\left(-\frac{4}{x^5}+\frac{1}{x}-3+4x^3\right)dx$

11. $\displaystyle\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

12. $\displaystyle\int_0^1(x+1)^5dx$

13. $F(x)=\displaystyle\int_{-2}^{x}(t^2+1)e^{2t}dt$ の導関数。

NSIB FINAL 2005 Solutions

I.

1. $(p \vee (\neg q)) \Rightarrow r$ と $(q \vee r) \wedge (p \Rightarrow r)$ の真理表による等値かどうかの判定。

p	q	r	$(p$	$\vee$	$(\neg$	$q))$	$\Rightarrow$	r	$(q$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$(p$	$\Rightarrow$	$r)$
T	T	T	T	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F
T	F	T	T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F
F	T	T	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	F
F	F	T	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
F	F	F	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F

等値かどうかの判定：**等値**

2.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
◯	×	◯	◯	◯

II.

3. $p(x)$ は多項式で、$p(-3) = p(-1) = p(1) = 0$ かつ、$p(3) = p(5) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと、次数が 6 のものを一つずつ書け。

解：次数が 4 のものを $f(x)$、次数が 6 のものを、$g(x)$ とする。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+3)(x+1)(x-1)(x-5)}{(3+3)(3+1)(3-1)(3-5)} + \frac{(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)}{(5+3)(5+1)(5-1)(5-3)} \\ g(x) &= f(x) + (x+3)(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)(cx+d) \end{aligned}$$

で、$c \neq 0$ であれば良い。

4. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 9x - 1 = q(x)(x+1) + r = c_4(x+1)^4 + c_3(x+1)^3 + c_2(x+1)^2 + c_1(x+1) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

解：$f(x) = (x^3 + 2x^2 - 4x - 5)(x+1) + 4$, $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = (x^2 + x - 5)(x+1)$, $x^2 + x - 5 = x(x+1) - 5$, $x = (x+1) - 1$ だから、$r = 4$, $c_0 = 4$, $c_1 = 0$, $c_2 = -5$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$ となる。組み立て除法を用いるとよい。

5. $f(x) = x^2 e^x$ とする。このとき、 $f(x)$ は、$x = 0$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も説明せよ。

解：$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x)e^x$, $f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$ よって、$f'(0) = 0$ かつ $f''(0) = 2 > 0$ である。従って、$f'(x)$ は $x = 0$ で増加、すなわち、$x < 0$ では、$f'(x) < 0$、$x > 0$ では $f'(x) > 0$ となる。これより、$f(x)$ は $x < 0$ で減少、$x > 0$ で増加。すなわち、$f(x)$ は、$x = 0$ で減少から、増加に転ずるので、極小。

6. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^4+3x^3-2x^2-9x-5}{x^3+4x^2+5x+2}$

解：分子は、問題 4 の $f(x)$ を用いると、$f(x)-4$ だから、$(x+1)^2((x+1)^2-(x+1)-5)$ に等しい。また、分母も同じように分解すると、$x^3+4x^2+5x+2=(x+1)^2((x+1)+1)$ である。よって、

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to -1}\frac{x^4+3x^3-2x^2-9x-5}{x^3+4x^2+5x+2}\\ =&\quad\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2((x+1)^2-(x+1)-5)}{(x+1)^2((x+1)+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2-(x+1)-5}{(x+1)+1}=-5\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+2x+1-e^{2x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{4x+2-2e^{2x}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4e^{2x}}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-8e^{2x}}{6}=-\frac{4}{3}.$

0/0 の形であるので、L'Hospital の定理が使える。微分したかたちもまた、0/0 であるので、結局 3 回適応すると結果が得られる。

8. $(\sqrt{x^2+1})'=((x^2+1)^{\frac{1}{2}})'=\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

$h(x)=x^2+1,\ g(X)=X^{\frac{1}{2}}$ とすると、$f(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=g(h(x))$ と書けているから、合成関数の微分を用いて、$f'(x)=g'(h(x))h'(x)$ となる。ここで、$g'(X)=\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}$、$h'(x)=2x$ である。

9. $((x^2+1)e^{2x})'=2xe^{2x}+(x^2+1)2e^{2x}=2(x^2+x+1)e^{2x}.$

$g(x)=x^2+1$ と $h(x)=e^{2x}$ の二つの関数の積の微分だと考えて、$(g(x)h(x))'=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$ となる。$h(x)$ はそれ自身合成関数の微分を用いて、$h'(x)=2e^{2x}$ である。

10. $\displaystyle\int\left(-\frac{4}{x^5}+\frac{1}{x}-3+4x^3\right)dx=\int\left(-4x^{-5}+x^{-1}-3+4x^3\right)dx=\frac{1}{x^4}+\log x-3x+x^4+C.$

11. $\displaystyle\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=2\sqrt{x^2+1}+C.$

問題 8 を用いる。

12. $\displaystyle\int_0^1(x+1)^5dx=\left[\frac{1}{6}(x+1)^6\right]_0^1=\frac{1}{6}(2^6-1)=\frac{21}{2}.$

13. $F(x)=\displaystyle\int_{-2}^{x}(t^2+1)e^{2t}dt$ の導関数は、微分積分学の基本定理により、$F(x)$ は、$(x^2+1)e^{2x}$ の原始関数のひとつだったから、$F'(x)=(x^2+1)e^{2x}.$

III.

14. 左下の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。B を既約ガウス行列に変形し、解 x_1,x_2,x_3,x_4 を求めよ。

$$[B\mid\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{rrrrr|l}1&-3&2&4&0&b_1\\2&-6&1&2&6&b_2\\-1&3&0&0&-4&b_3\\0&0&1&2&-2&b_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{rrrrr|r}1&-3&2&4&0&b_1\\0&0&-3&-6&6&-2b_1+b_2\\0&0&2&4&-4&b_1+b_3\\0&0&1&2&-2&b_4\end{array}\right]$$

上では、$[2,1;-2]$ および $[3,1;1]$ を行ってる。これらはどちらを先にしても同じ。さらに、$[2,4]$ を行い、次に、$[1,2;-2]$, $[3,2;-2]$, $[4,2;3]$ を施すと最後の行列が得られる。あとの 3 つの基本変形はどれを先にしても同じである。

$$\to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & b_4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & b_1+b_3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 6 & -2b_1+b_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 & 4 & b_1-2b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+b_3-2b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2b_1+b_2+3b_4 \end{array}\right]$$

より、最後の列は無視して、

$$x_1 = 3s+4,\ x_2 = s,\ x_3 = -2t-2,\ x_4 = t. \qquad (s \text{ と } t \text{ はパラメタ})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

15. 右上の行列 C は逆行列を持たないことを示せ。定理を用いるときは、定理の主張ものべること。また、$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持たないような $\boldsymbol{b}$ を一つあげよ。

    解：C は、B の最後の列をのぞいたものと等しい。上の変形から、$b_3 = 1, b_1 = b_2 = b_4 = 0$ とすると、最後の列は、上から順に、$0,0,1,0$ となるので、三番目の方程式は、$0 = 1$ となり、解を持たない。（拡大係数行列の階数は 3、係数行列の階数は 2 だから、Theorem 2.2 からも解をもたないことがわかる。）もし、C が逆行列をもてば、$C(C^{-1}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$ となり、$\boldsymbol{x} = C^{-1}\boldsymbol{b}$ は解となり矛盾。

16. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ a \\ b+c \end{bmatrix}$$

    解：

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ b+c & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b+c & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 2b & 0 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b+c & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

17. 前問（問題 16）で、行列 T を左からかけることはどのような行に関する基本変形を施すことと同じか。$[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。これらの基本変形を何回か施す場合は、どの順で施すかも明確に記せ。

    解：順に、$[3,2;1]$, $[1,2]$, $[1;2]$.

18. 前々問（問題 16）の行列 T の逆行列を求めよ。

$$[T,I]=\begin{bmatrix}0&2&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&2&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1/2&0&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1/2&0&0\\0&0&1&-1/2&0&1\end{bmatrix},\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1/2&0&0\\-1/2&0&1\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}\cdot\begin{bmatrix}2b\\a\\b+c\end{bmatrix}=T^{-1}\cdot T\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

だから、問題 16 と同じように、求める方法もある。

19. $y=f(x)$ は、次の微分方程式および、初期条件を満たすとき、$y=f(x)$ を求めよ。

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2\sqrt{x}},\quad f(1)=10e$$

解：

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx,\ \text{より}\ \log y=\sqrt{x}+C$$
$$y=f(x)=e^{\sqrt{x}+C},\ f(x)=10e^{\sqrt{x}}.$$

20. Hamming 符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1011011) となった。もともとの符号は何だったか。

解：(1011011)H = (111) であるが、$G\cdot H=O$ だから、ノイズが入った箇所を i 番目とすると、i 番目が 1 でそれ以外が 0 のベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を用いて、$\boldsymbol{a}G=\boldsymbol{c}$, (1011011) = $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{e}_i$ だから、(111) = (1011011)$H=\boldsymbol{a}G\cdot H+\boldsymbol{e}H=\boldsymbol{e}H$ より、(111) は、H の i 行目であることがわかる。よって $i=7$。そこを修正すると、(1011010) となる。