

Solutions to Quiz 6

1. 頂点数が 8 で、そのうちの 3 頂点の次数が 4, 2, 2 である木について次の間に答えよ。Consider trees with eight vertices such that the degrees of three of them are 4, 2, 2.

(a) 残りの 5 頂点の次数は 2, 1, 1, 1, 1 であることを説明してください。Explain that the degrees of the remaining 5 vertices are 2, 1, 1, 1, 1.

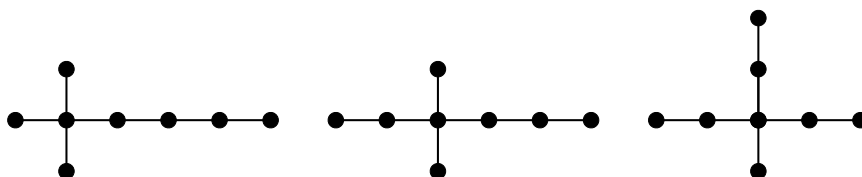
Soln. 8 点上の木には、Theorem 6.2 によって辺が 7 本ある。Theorem 5.1 によって各頂点の次数の合計は、辺の数の二倍だから、この場合、次数の合計は $14 = 2 \times 7$ になる。いま、3 頂点の次数は 4, 2, 2, なので、和は 8 だから、残りの 5 頂点の次数の和は、 $14 - 8 = 6$ でなければならない。連結だから各頂点の次数は 1 以上なので、残りの 5 頂点の次数は 2, 1, 1, 1, 1 以外にはあり得ない。

By Theorem 6.2, the number of edges of a tree with 8 vertices is 7. So the total number of degrees of vertices is 14 by Theorem 5.1. Since 4, 2, 2 are the degrees of three vertices, the total number of degrees of the five remaining vertices is $14 - (4 + 2 + 2) = 6$. Thus 2, 1, 1, 1, 1 is the only possibility.

(b) 条件を満たす (同型でない) 木が 3 種類ある。これらを図示せよ。Depict three non-isomorphic trees satisfying the condition.

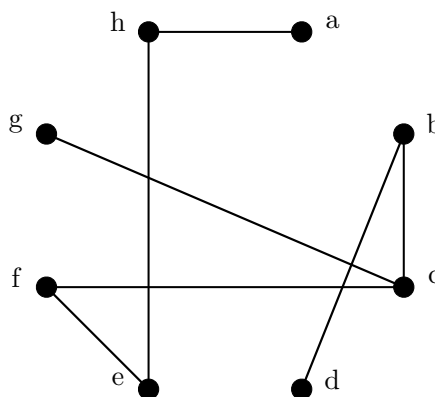
Soln. 次数が 2 以上に繋がり方を考えると、以下の様になる。By considering the connection of vertices of degree at least 2, we have the following.

$$4 - 2 - 2 - 2, \quad 2 - 4 - 2 - 2, \quad \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 2 - 4 - 2 \end{array}.$$



2. a, b, c, d, e, f, g, h を結ぶ (間接でも良い) ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、その最小の費用はいくらか。そのネットワークも図示せよ。(単位は万円) Find the cheapest network connecting a, b, c, d, e, f, g, h using the cost table below. Draw the network and give its total cost. (1 unit = 10,000 JPY)

	h	g	f	e	d	c	b
a	1	4	3	2	7	5	4
b	4	5	4	4	5	3	
c	4	2	3	5	6		
d	6	7	6	6			
e	1	4	1				
f	1	4					
g	4						



合計 (Total) : 16 万円 $16 = 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 5$