Solutions to Quiz 4

1. 一辺が 100 メートルの正三角形をした土地に、26 個の鳥の巣がある。ある 2 個の鳥の巣の距離は 20 メートル以内であることを鳩ノ巣原理を用いて説明してください。There are 26 nests of birds in a region which is in the shape of an equilateral triangle with sides 100 meters in length. Explain that there are two nests that are only 20 meters apart or less using the pigeonhole principle.

   Soln. この三角形の土地は、一辺が 20 メートルの正三角形 25 個に分けることができる。巣は 26 あるので、鳩の巣原理により、どの一つかの正三角形には、境界も含めて 2 個以上の巣がある。この正三角形は一辺が 20 メートルなので、一番遠くても、20 メートルである。すなわち「ある 2 個の鳥の巣の距離は 20 メートル以内である。」 ■

   It is possible to subdivide this region into 25 regions which is in the shape of an equilateral triangle with sides 20 meters in length. Since there are 26 nests, by the pigeonhole principle, one of the regions has more than one nest. Since each of these regions is in the shape of an equilateral triangle with sides 20 meters in length, there are two nests that are only 20 meters apart or less. ■

2. 「数学の世界」の授業は 27 時間あり、毎時間最低 1 問は問題を考える。ただし、全部で、40 問は越さない（at most 40 problems）ものとする。このときちょうど 13 問考える期間（たとえば 3 時間目から 10 時間目の問題合計が 13 問など）があることを説明せよ。There are 27 "World of Mathematics" class sessions, at least one problem is discussed per session, and the total number of problems does not exceed 40. Explain that there is a period (a period of classes, e.g. from the 3rd class to the 10th class) during which exactly 13 problems are discussed.

   Soln. a_1 を一回目で考えた問題の数、a_2 で二回目の授業で考えた問題の数などとする。i 回目の授業で考えた問題の数は a_i と表される。また $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$. $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$ などとする。これは、1 回目までに考えた問題の数、2 回目までに考えた問題の数、3 回目までに考えた問題の数などとなる。すると、毎回 1 問は問題を考えるので、$a_i \geq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 27)$, で、合計で 40 問を越さないので、

   $$1 \leqq b_1 < b_2 < \cdots < b_{27} \leqq 40, \quad b_1 + 13 < b_2 + 13 < \cdots < b_{27} + 13 \leqq 53$$

   となっていることを、考えると、$b_1, b_2, \ldots, b_{27}, b_1 + 13, b_2 + 13, \ldots, b_{27} + 13$ はすべて 53 以下で、かつ、合計で 54 個の数であるので、鳩の巣原理により、このうちのどれか二つは等しい。$b_1, b_2, \ldots, b_{27}$ はすべて異なり、$b_1 + 13, b_2 + 13, \ldots, b_{27} + 13$ もすべて異なるので、等しくなるとすると、最初のグループのうちのどれかと、後のグループのうちのどれかである。これを最初のグループの i 番目と、後のグループの j 番目とすると $b_i = b_j + 13$ である。これは、

   $$13 = b_i - b_j = (a_1 + a_2 + \cdots + a_i) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_j) = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j.$$

   したがって、$i + 1$ 回目の授業から j 回目の授業で丁度、13 問考えた事が分かった。 ■

   Let a_1 be the number of problems discussed in the first class, a_2 in the second, etc. So a_i is the number of problems discussed during the ith class. Let $b_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. Then b_i is the total number of problems discussed from the first to the ith class. Then

   $$1 \leqq b_1 < b_2 < \cdots < b_{27} \leqq 40, \quad b_1 + 13 < b_2 + 13 < \cdots < b_{27} + 13 \leqq 53.$$

   There are 54 numbers in the range 1 to 53. Hence by the pigeonhole principle, two numbers must coincide. Since the numbers in the first group are distinct, and so are the second group, the only possibility is that one in the first group and the one in the second coincides. Suppose $b_i = b_j + 13$. Now,

   $$13 = b_i - b_j = (a_1 + a_2 + \cdots + a_i) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_j) = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j,$$

   and there is a period (a period of classes, e.g. from the 3rd class to the 10th class) during which exactly 13 problems are discussed. ■