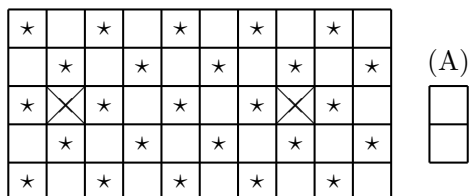


# Solutions to Quiz 2

1. ×の所に柱が二本あり、実質 24 畳敷の広間がある。(A) のような一畳サイズの布団を重なり合うことなく敷き詰めることはできないことを丁寧に説明せよ。(Explain the impossibility of covering up the room below with 24 mat size usable space (a 25 mat size room with two large pillars at ×) by one mat size futon of shape (A) without overlapping.)



**解：**上の図のように \* を書いてみると、この部屋には、\* が 25、\* がついてない正方形が 23 あることが分かる。背理法を用いて示す。布団が重なり合わないよう敷き詰めることができないことを示したいので、重なり合わないよう敷き詰めることができるとする。すると、24 畳なので、布団は、24 枚必要で、かつ、ひとつひとつの布団は、縦か横におくことになり、二つの正方形にまたがるが、それは、\* の付け方から、\* のついているところ一つと、\* のついていないところ一つを蔽うことになる。24 枚で蔽うのは、\* のついているところ 24 と、\* のついていないところ 24 である。ところがこの部屋には、\* のついているところが 25 あるので、すべてを蔽ってはいないことになり、矛盾である。したがって、重なり合わないよう、布団を敷き詰めることができないことが分かった。

2. (a) 20 枚のチケットを  $A, B, C, D, E, F$  の 6 人で売る。それぞれが少なくとも一枚は売るとき何通りの可能性があるか。(How many ways are there to sell 20 tickets by 6 assuming that each one sells at least one?) [答えだけで良い。Solution only!  ${}_nC_r$ ,  ${}_nP_r$ , および  $n!$  の値は計算しなくてよい。(No need to evaluate  ${}_nC_r$ ,  ${}_nP_r$  or  $n!$ .) ]

$${}_{19}C_5 = 11628.$$

- (b) 14 枚のチケットを  $A, B, C, D, E, F$  の 6 人で売る。一枚も売らない人がいてもよいとすると、何通りの可能性があるかを考えるとそれは、上の場合の数と同じであることを丁寧に説明せよ。(The number of ways to sell 14 tickets by 6, allowing that some may sell no tickets, is equal to the number in the previous problem. Explain why.)

**解：**20 枚のチケットを用意して、自分の分は必ず一枚買うとしておく。すると実際に売るのは、14 枚であるが、20 枚のチケットを 6 人で売り、それぞれが少なくとも一枚は売るとき何通りかと同じ種類あることが分かる。

[別の説明:]  $A, B, C, D, E, F$  のそれぞれが売る枚数を  $a, b, c, d, e, f$  とする。(b) においては、 $a + b + c + d + e + f = 14$  である。これに一枚ずつ足して、 $a' = a + 1, b' = b + 1, c' = c + 1, d' = d + 1, e' = e + 1, f' = f + 1$  とすると、 $a' + b' + c' + d' + e' + f' = 20$  となっている。ここで  $(a, b, c, d, e, f)$  に  $(a', b', c', d', e', f')$  を対応させると、14 枚のチケットを 6 人が売った枚数の組と、20 枚のチケットを 6 人が最低一枚は売った枚数の組とが対応するので、これらの場合の数は等しい。

$$(a, b, c, d, e, f) \leftrightarrow (a + 1, b + 1, c + 1, d + 1, e + 1, f + 1) \\ = (a' - 1, b' - 1, c' - 1, d' - 1, e' - 1, f' - 1) \leftrightarrow (a', b', c', d', e', f')$$