

Solutions to Quiz 1

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。(Let p, q and r be propositions. Determine whether the following equation holds or not by completing the truth table below.)

$$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg p \Rightarrow (\neg q \vee r).$$

p	q	r	\neg	$(p \vee q)$	\Rightarrow	$\neg r$	$\neg p$	\Rightarrow	$(\neg q \vee r)$	x
T	T	T	F	T	T	F	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F	T	T	F	T	T

[判定 (Conclusion)]

F の位置が食い違っているので、論理同値ではない。 $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r \not\equiv \neg p \Rightarrow (\neg q \vee r)$. 等式は成り立たない。

2. $\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r) \equiv \neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ である。同じように、 $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r$ を \neg と \Rightarrow と括弧だけを用いて下のように表したい。三つの下線空白の内、必要なところに \neg を入れよ。(Fill some of the underlined blanks below by \neg to express $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r$.)

解: $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ は (p, q, r) の真理値が (F, T, F) の時のみ F であとは、 T である。 $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r$ は、 (p, q, r) の真理値が (F, F, T) の時のみ F であとは、 T であるから

$$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r).$$

3. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の下線の必要な部分に、 \neg, \wedge , または、 \vee を入れよ。(Fill each underlined blank with \neg, \wedge or \vee to express x in the truth table above. There may be voids.)

解: 真理表から、 $x = (\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r))$. 従って、上のことから、

$$\begin{aligned} x &\equiv (\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r)) \\ &\equiv (\neg p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r)) \wedge (\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)). \end{aligned}$$

実は、 $p \vee q \vee r$ は (p, q, r) の真理値が (F, F, F) の時だけ、 F でそれ以外は、 T でした。 $y \Rightarrow z \equiv \neg y \vee z$ を使うと、

$$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r \equiv p \vee q \vee \neg r, \quad \neg p \Rightarrow (\neg q \vee r) \equiv p \vee \neg q \vee r.$$

こう考えると、前者は、 (p, q, r) の真理値が (F, F, T) の時だけ、 F 、後者は、 (p, q, r) の真理値が (F, T, F) の時だけ、 F であとは、すべて T だということも簡単にわかります。