Quiz 1

Division: **ID#:** **Name:**

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。(Let p, q and r be propositions. Determine whether the following equation holds or not by completing the truth table below.)

$$(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \vee r).$$

p	q	r	$(p \quad \wedge \quad (\neg \quad q)) \quad \Rightarrow \quad r$	$p \quad \Rightarrow \quad (q \quad \vee \quad r)$	x
T	T	T			F
T	T	F			T
T	F	T			F
T	F	F			F
F	T	T			T
F	T	F			F
F	F	T			T
F	F	F			F

[**判定 (Conclusion)**]

2. $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$ を $\neg$ と $\Rightarrow$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\wedge$ と $\vee$ は使わないこと。(Express $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$ by $\neg$'s, $\Rightarrow$'s and parentheses. Do not use $\wedge$ or $\vee$.)

3. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。(Fill each underlined blank with $\neg$, $\wedge$ or $\vee$ to express x in the truth table above. There may be voids.)

$$\begin{aligned} x \quad \equiv \quad & ((((\neg\, p) \,\_\_\, q) \,\_\_\, r) \;\vee \\ & (((\_\_\, p) \,\_\_\, (\neg\, q)) \;\wedge\; (\_\_\, r))) \,\_\_ \\ & (((\_\_\, p) \;\wedge\; (\_\_\, q)) \,\_\_\, (\_\_\, r)) \end{aligned}$$

Message 欄：将来の夢、25 年後の自分について、世界について。What is your dream? Describe your vision of yourself and the world 25 years from now.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 1

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。(Let p, q and r be propositions. Determine whether the following equation holds or not by completing the truth table below.)

$$(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \vee r).$$

p	q	r	$(p$	$\wedge$	$(\neg$	$q))$	$\Rightarrow$	r	p	$\Rightarrow$	$(q$	$\vee$	$r)$	x
T	T	T	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F
T	T	F	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	T
T	F	T	T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T
F	F	F	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F

[**判定 (Conclusion)**] 成立する。The equation holds.

Note that

$$(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r \equiv \neg(p \wedge (\neg q)) \vee r \equiv ((\neg p) \vee q) \vee r \equiv (\neg p) \vee (q \vee r) \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$$

as desired.

2. $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$ を $\neg$ と $\Rightarrow$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\wedge$ と $\vee$ は使わないこと。(Express $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$ by $\neg$'s, $\Rightarrow$'s and parentheses. Do not use $\wedge$ or $\vee$.)

解：

$$(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \vee r) \equiv p \Rightarrow ((\neg q) \Rightarrow r).$$

Note that since $(\neg q) \vee r \equiv q \Rightarrow r$, we have $q \vee r \equiv (\neg q) \Rightarrow r$.

3. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。(Fill each underlined blank with $\neg$, $\wedge$ or $\vee$ to express x in the truth table above. There may be voids.)

$$\begin{aligned} x \quad \equiv \quad & (((\neg\, p) \underline{\wedge}\, q) \underline{\wedge}\; r) \;\vee \\ & (((\underline{\neg}\, p) \underline{\wedge} (\neg\, q)) \;\wedge\; (\underline{\quad}\, r))) \;\underline{\vee} \\ & (((\underline{\quad}\, p) \;\wedge\; (\underline{\quad}\, q)) \underline{\wedge} (\underline{\neg}\, r)) \end{aligned}$$

Quiz 2

Division: **ID#:** **Name:**

1. 56 個の正方形からなる下の盤を、正方形 2 個 の盤 $\square\!\square$ で、重なり合うことなく敷き詰めることが出来るか。理由も記せ。ただし、$\star$ のところは、除いてあるとする。Is it possible to cover the board shown below having 56 squares with pieces of 1×2 plates without overlapping? Note that the four squares with $\star$ are removed. Write your reason.

$\star$									
									$\star$
$\star$									$\star$

2. それぞれ二種類の数は等しいかどうか判定し理由を簡単に記せ。それぞれの数を求めても良いがその場合は数の求め方も記すこと。Determine whether the two numbers in each of the following are equal or not and write your reason. You may compute their exact numbers with explanation.

   (1) (a) 15 個のキャンディを 4 人の子どもに分ける分け方の種類。ただし、一人最低一個はもらえるものとする。The number of ways to distribute 15 candies to 4 kids such that each kid receives at least one.
   (b) 15 を 4 つの自然数（1 以上の整数）の和で表す表し方の種類。The number of ways to express 15 as a sum of 4 positive integers. $5 + 5 + 3 + 2 \neq 5 + 2 + 3 + 5$.

   (2) (a) 15 個のキャンディを 4 人の子どもに分ける分け方の種類。The number of ways to distribute 15 candies to 4 kids.
   (b) 15 を 4 つ以下の自然数（１以上の整数）の和で表す表し方の種類。15 も一つの自然数の和と考える。The number of ways to express 15 as a sum of at most 4 positive integers. 15 is regarded as a sum of one nonnegative integer, and $5 + 5 + 3 + 2 \neq 5 + 2 + 3 + 5$.

Message 欄（裏にもどうぞ）: あなたにとって一番たいせつな（または、たいせつにしたい）もの、ことはなんですか。What is most precious to you?（「HP 掲載不可」は明記の事。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 2

1. 56 個の正方形からなる下の盤を、正方形 2 個 の盤 $\square\square$ で、重なり合うことなく敷き詰めることが出来るか。理由も記せ。ただし、$\star$ のところは、除いてあるとする。Is it possible to cover the board shown below having 56 squares with pieces of 1×2 plates without overlapping? Note that the four squares with $\star$ are removed. Write your reason.

$\star$									
									$\star$
$\star$									$\star$

解：Chess Board のように市松模様に塗ると、この盤では、塗ったところと塗っていないところの数がことなる。一方、もし敷きつめられたとすると、一つの正方形 2 個の盤で覆われるのは塗ってあるところ 1 と塗ってないところ 1．従って、覆われている正方形で塗ってあるところの数と、塗ってないところの数は等しい。これは矛盾である。したがって、敷きつめることはできない。 ■

2. それぞれ二種類の数は等しいかどうか判定し理由を簡単に記せ。それぞれの数を求めても良いがその場合は数の求め方も記すこと。Determine whether the two numbers in each of the following are equal or not and write your reason. You may compute their exact numbers with explanation.

(1) (a) 15 個のキャンディを 4 人の子どもに分ける分け方の種類。ただし、一人最低一個はもらえるものとする。The number of ways to distribute 15 candies to 4 kids such that each kid receives at least one.

(b) 15 を 4 つの自然数（1 以上の整数）の和で表す表し方の種類。The number of ways to express 15 as a sum of 4 positive integers. $5+5+3+2 \neq 5+2+3+5$.

解：4 人がもらう個数をそれぞれ 順に a, b, c, d とすると、仮定より $15 = a+b+c+d$ となる。これは、15 を和の順序も考慮に入れて 4 つの自然数の和に書く書き方に一対一に対応する。したがって、それらの数は等しい。この数は、$15 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ の $+$ を 3 個選んでそこで分ける分け方と同じなので、${}_{14}C_3 = 364$ 個となる。 ■

(2) (a) 15 個のキャンディを 4 人の子どもに分ける分け方の種類。The number of ways to distribute 15 candies to 4 kids.

(b) 15 を 4 つ以下の自然数（1 以上の整数）の和で表す表し方の種類。15 も一つの自然数の和と考える。The number of ways to express 15 as a sum of at most 4 positive integers. 15 is regarded as a sum of one nonnegative integer, and $5+5+3+2 \neq 5+2+3+5$.

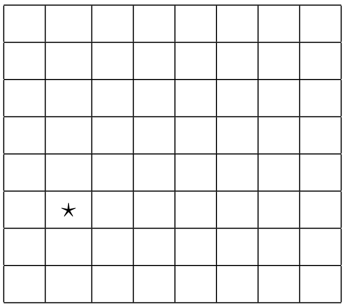
解：(a) は、0 以上の整数 4 個の組み (a, b, c, d) で、$a+b+c+d = 15$ となるものが対応している。(b) では、0 がどこに入るかの区別がない。すなわち、$(0, x, y.z)$, $(x, 0, y, z)$, $(x, y, 0, z)$, $(x, y, z, 0)$ は (a) では異なるが、(b) では、$15 = x+y+z$ で一通りである。従って、これらの数はことなり、(a) の方が (b) の数より大きい。実際には、(a) は、$(a+1, b+1, c+1, d+1)$ とすれば、$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1) = 19$ で、自然数だから、前問と同じ考え方で、${}_{18}C_3 = 816$ となる。一方、(b) は、一つの和が 1、二つの和は、${}_{14}C_1 = 14$、三つの和は ${}_{14}C_2 = 91$、四つの和は ${}_{14}C_3 = 364$ で合計 470 通り。 ■

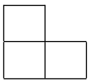
Quiz 3

Division: **ID#:** **Name:**

1. サイズが、$2^n \times 2^n$ の盤から、単位正方形を一つ抜き取ったものを B_n とする。n が自然数であればいつでも、また**どこを抜き取っても**、B_n は B_1 で、敷き詰めることが出来ることを示せ。(Let B_n be a $2^n \times 2^n$ board with one square removed. Show that B_n can always be covered by B_1's without overlapping for all positive integer n.)

   例：B_3 $\star$ のところを抜き取ったもの。(The figure below is an example with $n = 3$, i.e., a $2^3 \times 2^3$ board such that one of the squares $\star$ is removed.)





B_1

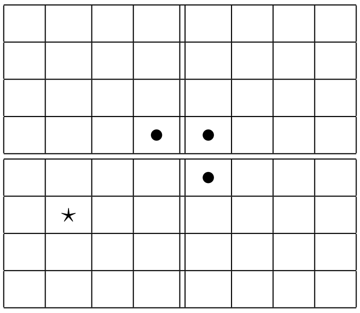
2. n を自然数とするとき、$2^n \times 2^n - 1$ は、3 で割り切れることを示せ。(Show that $2^n \times 2^n - 1$ is divisible by 3 for each positive integer n.)

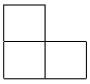
Message 欄（裏にもどうぞ）：最近のことで、とても嬉しかった（感謝している）こと、悲しかったこと、怒っていること。(Anything that made you rejoice, sad or angry, or you are thankful of recently?)（「ホームページ掲載不可」は明記のこと。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 3

1. サイズが、$2^n \times 2^n$ の盤から、単位正方形を一つ抜き取ったものを B_n とする。n が自然数であればいつでも、また**どこを抜き取っても**、B_n は B_1 で、敷き詰めることが出来ることを示せ。(Let B_n be a $2^n \times 2^n$ board with one square removed. Show that B_n can always be covered by B_1's without overlapping for all positive integer n.)

   例：B_3 $\star$ のところを抜き取ったもの。(The figure below is an example with $n = 3$, i.e., a $2^3 \times 2^3$ board such that one of the squares $\star$ is removed.)

   B_1

   解：$n = 1$ の時は、2×2 の盤から一カ所取り除いたものは、B_1 を回転すれば同じものになるので、B_1 で敷き詰められる。$2^k \times 2^k$ の盤は、そこからどの一つの正方形を取り除いても、B_1 で敷き詰められるとする。（これを「帰納法の仮定」という。）ここで、$2^{k+1} \times 2^{k+1}$ の盤からどこか一カ所正方形を取り除いた盤 B_{k+1} を考える。このとき、上の図の様に４等分すると、2^{k+1} の半分は 2^k だから、$2^k \times 2^k$ の盤が４つできる。４つのうち、一つの盤は、一カ所正方形が取り除かれているので、それは、帰納法の仮定から、これは、B_1 で敷き詰めることができる。残りの３つにまたがって、中央に、図の様に B_1 を置くと、これら三つの $2^k \times 2^k$ の盤も敷き詰めるべきところは、一カ所欠けた部分になっている。従って、これら三つも、帰納法の仮定から敷き詰めることができる。従って、全体も B_1 で敷き詰めることができる。k の場合を書いてして、$k + 1$ の場合を証明することができたから、数学的帰納法によって、すべての自然数 n について、$2^n \times 2^n$ の盤で一カ所正方形をぬきとったものは、それがどこであっても、B_1 で敷き詰めることができる。 ■

   上の証明では、$n = 1$ の時には、どこを抜き取っても敷き詰められる。$n = k$ の時敷き詰められるとすると、$n = k + 1$ の時も敷き詰められることを示しました。$n = 2$ の時は、$n = 1$ のとき確かに敷き詰められますから、$k = 1$ とすれば、示したことより $n = 2 = k + 1$ の場合も敷き詰められることが分かります。$n = 3$ の時は、$n = 2$ の時敷き詰められることが分かったので、$k = 2$ とすれば、$n = 3 = k + 1$ のときにも敷き詰められることが証明されていることになっています。これをずっと続けることができる鍵は、$n = k$ の時はできるとして、$n = k + 1$ の時にできることが一般に証明してあるからです。すなわち、このようにどんどんいくことができるために最小限示しておかなければならないのは、最初と、$n = k$ の時はできるとして、$n = k + 1$ の時にできることだと言うことになります。その本質的な部分を述べたのが、数学的帰納法の原理と言うことです。

2. n を自然数とするとき、$2^n \times 2^n - 1$ は、3 で割り切れることを示せ。(Show that $2^n \times 2^n - 1$ is divisible by 3 for each positive integer n.)

   解：B_n は、$2^n \times 2^n$ の盤から一カ所取り除いてあるので、$2^n \times 2^n - 1$ 個の正方形からなる。B_1 は３個の正方形からなる。上の問題で、B_n は、B_1 で敷き詰められることが示されたから、$2^n \times 2^n - 1$ は、3 で割り切れる。

Quiz 4

Division: **ID#:** **Name:**

1. 一辺が 40cm の正三角形の的がある。この的に、17 発の玉が当たったとすると、当たった場所の距離が 10cm 以内である 2 点が必ずあることを証明せよ。(17 bullets hit an equilateral-triangle-shaped target (40 cm the side length). Then there is a pair of holes with at most 10 cm apart.)

2. 今年の NSIA の授業は、27 回あり、毎回最低 1 問は問題を考える。ただし、考える問題は、全部で 44 問以下とする。このとき、「丁度 9 問 考える期間がある。」ことを証明せよ。(We discuss at most 44 problems altogether in NSIA this term, and at least 1 problem in each class. Show that there is a period (for example, from the third class to the twelfth class) in this term we discuss exactly 9 problems.)

Message 欄（裏にもどうぞ）：どんなおとなが魅力的ですか。こどもの魅力は何でしょう。

Solutions to Quiz 4

1. 一辺が 40cm の正三角形の的がある。この的に、17 発の玉が当たったとすると、当たった場所の距離が 10cm 以内である 2 点が必ずあることを証明せよ。(17 bullets hit an equilateral-triangle-shaped target (40 cm the side length). Then there is a pair of holes with at most 10 cm apart.)

   解：一辺が 40cm の正三角形の的は、一辺が 10cm の 16 個の正三角形に分割することができる。今、17 発がこの的に当たったのだから、鳩ノ巣原理によって、この一辺が 10cm の正三角形のうちのどれかには少なくとも 2 発以上あったったと結論する事ができる。一辺が 10cm の正三角形の中では、一番離れていても、10cm であるため、あたった場所の距離が 10cm 以内である、2 点が必ずある。 ■

   じつは、これは、17 発よりもう少し少なくても同じ結論をする事ができます。何発でも同じように、あたった場所の距離が 10cm 以内 のものがあると結論できるでしょうか。証明とともに考えてみて下さい。

2. 今年の NSIA の授業は、27 回あり、毎回最低 1 問は問題を考える。ただし、考える問題は、全部で 44 問以下とする。このとき、「丁度 9 問 考える期間がある。」ことを証明せよ。(We discuss at most 44 problems altogether in NSIA this term, and at least 1 problem in each class. Show that there is a period (for example, from the third class to the twelfth class) in this term we discuss exactly 9 problems.)

   解:1 回目のクラスで考えた問題数を a_1, 2 回目のクラスで考えた問題数を $a_2, \ldots$ としていきましょう。a_{27} は 27 回目、最後の授業で考えた問題数となります。ここで、$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \ldots$ としていきます。すなわち、b_1 は 1 回目のクラスで考えた問題数ですが、b_2 は、1 回目と、2 回目のクラスで考えた問題数の和、すなわち、2 回目までのクラスで考えた問題数とします。b_3 は、3 回目までのクラスで考えた問題数、b_{27} は、27 回目のクラスまでに考えた問題数、すなわち、一学期間で考えた問題の総数です。条件から、$b_1, b_2, \cdots, b_{27}$ は確実に増えていきます。また、$b_{27} \leqq 44$ になっています。式で書くと、$1 \leqq b_1 < b_2 < \cdots < b_{27} \leqq 44$ です。ここで、それぞれに、9 を足した数を考えます。すると、$10 \leqq b_1+9 < b_2+9 < \cdots < b_{27}+9 \leqq 53$ となります。ここに、$b_1, b_2, \ldots, b_{27}, b_1+9, b_2+9, \ldots, b_{27}+9$ とあわせて $27 \times 2 = 54$ 個の数がありますが、これらは、すべて 1 以上、53 以下です。したがって鳩ノ巣原理によって、このうちに同じ数があることになります。ところが、 $b_1, b_2, \cdots, b_{27}$ はすべて異なりますし、$b_1+9, b_2+9, \ldots, b_{27}+9$ もすべて異なりますから、同じになるとすると、それらは $b_1, b_2, \cdots, b_{27}$ のうちのどれかと、$b_1+9, b_2+9, \ldots, b_{27}+9$ のうちのどれかということになります。そこで記号で、b_i と b_j+9 が等しいと書くことにしましょう。すると、$b_i = b_j + 9$ ですが、これは、$b_i - b_j = 9$ と変形できます。$b_i - b_j$ は何を意味しているでしょうか。b_i は i 回目のクラスまでで考えた問題数、b_j は j 回目のクラスまでで考えた問題数です。ですから、$b_i - b_j$ は、j 回目の次のクラスから、i 回目までのクラスで考えた問題数となります。このことから、$j+1$ 回目のクラスから、i 回目のクラスまでに丁度 9 問考えたことになるので、問題文にあるような期間が存在したことが分かります。 ■

   この問題は、数字が 9 では無くても例えば ℓ として 9 以外の ℓ についても「丁度 ℓ 問考えた期間があることを示すことができます。どのような ℓ についてそれが可能でしょうか。不可能なのは、どのような場合でしょうか。考えてみて下さい。

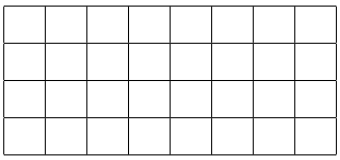
Quiz 5

Division: **ID#:** **Name:**

1. 下のような 4×8 の（通常のチェス盤の半分の大きさの）盤で、ナイトは一周回ってもとに戻れるかを考える。(We want to show that it is impossible for a knight of chess game to go around the 4×8 board below and come back to the original place after visiting all places exactly once.)

   (a) 一周まわってもとに戻れるとすると、どこからスタートしても可能であることを示せ。(Suppose it is possible to go around. Show that the knight can start from any place.)

   (b) どのようにまわっても一周まわってもとに戻ることはできないことを示せ。(Show that it is impossible for a knight to go around the board and come back to the original place after visiting all places exactly once.)



2. NSIA のクラスの受講生合計 150 人の知り合い（お互いに知っている）の数をしらべた。このとき、知り合いの数が、偶数人のひとは、必ず偶数人いることを説明せよ。Theorem 5.1 を用いても良い。(Show that there are even number of students in this class (size 150) who have even number of acquaintances. You may use Theorem 5.1.)

Message 欄（裏にもどうぞ）: (1) 結婚について、家庭について、子供について。About marriage, home and children. (2) この授業について。要望・改善点など。About this course; requests and suggestions for improvement.（「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 5

1. 下のような 4×8 の（通常のチェス盤の半分の大きさの）盤で、ナイトは一周回ってもとに戻れるかを考える。(We want to show that it is impossible for a knight of chess game to go around the 4×8 board below and come back to the original place after visiting all places exactly once.)

   (a) 一周まわってもとに戻れるとすると、どこからスタートしても可能であることを示せ。(Suppose it is possible to go around. Show that the knight can start from any place.)
   解：一周まわってもとに戻れるとする。スタート地点から、まわる場所に、$1, 2, 3, \ldots$ と順に番号をつける。全部で、32 のマスがあり、すべて回り終わったら、1 に戻ることができるので、$1, 2, 3, \ldots, 32, 1, 2, 3, \ldots, 32$ と Knight が回ることができる。すると、このどこからはじめても、その番号を i とすると、$i, i+1, i+2, \ldots, 32, 1, 2, \ldots, i-1, i$ と一周まわり、元に戻ることができる。 ■

   (b) どのようにまわっても一周まわってもとに戻ることはできないことを示せ。(Show that it is impossible for a knight to go around the board and come back to the original place after visiting all places exactly once.)
   解：下のように、マークをつけ × のところを Black、それ以外を White と呼ぶことにします。一番上と、一番下を Outer、中の二つの列を Inner と呼ぶことにします。
   Step 1. Knight の動きから次のことが分かります。(1) Outer Black から（および Outer Black へ）動けるのは、Inner White のみ。(2) Outer Black のマスの数も、Inner White のマスの数も 8。
   Step 2. 一周まわってもとに戻ることができるとします。すると、(a) より、どこからスタートしても一周できるので、Inner White からスタートすることにします。
   Step 3. 「どの Inner White の次も Outer Black」となります。なぜなら、Outer Black の一つ前は、Step 1 (1) より Inner White ですから、8 個の Outer Black の前は、すべて Inner White です。しかし、Step 1 (2) より Inner White は 8, Outer Black も 8 ですから、Outer Black の一つ前が Inner White だということは、どの Inner White の次も Outer Black であることになります。
   Step 4. 「矛盾。」なぜなら、一周まわってもとに戻れるとすると、Inner White からスタートしても、一周まわって元に戻れる道があることになりますが、Step 3 より、Inner White の次は Outer Black となります。次は、Step 1 (1) より Inner White、しかしまた Step 3 より Inner White の次は Outer Black となり、Inner Black へはまわれないことになり、一周まわることができることに反します。したがって、一周まわって元に戻ることはできません。 ■

×		×		×		×	
	×		×		×		×
×		×		×		×	
	×		×		×		×

2. NSIA のクラスの受講生合計 150 人の知り合い（お互いに知っている）の数をしらべた。このとき、知り合いの数が、偶数人のひとは、必ず偶数人いることを説明せよ。Theorem 5.1 を用いても良い。(Show that there are even number of students in this class (size 150) who have even number of acquaintances. You may use Theorem 5.1.)

   解：知り合いの数が偶数人の人のかずは、150 から知り合いの数が奇数人の人のかずを引いたものになります。今、頂点を、クラスの学生全員、知り合いの関係にある学生を、辺とするグラフを考えます。すると、Theorem 5.1 (ii) により、知り合いの数が奇数人の人は偶数人いることがわかります。150 は偶数で、知り合いの数が偶数人の人のかずは、150 から、偶数を引いたかずになりますから、偶数となります。 ■

Quiz 6

Division: **ID#:** **Name:**

1. S 夫妻を含め 10 組の夫妻があるパーティーに出席した（合計 20 人）。握手の後 S 氏は妻を含めた各人に何人と握手したかを尋ねるとどの人も異なる人数を答えた。ただしどの人も自分の同伴者とは握手をしなかった。(At a party ten couples attended and shook hands. Mr. S, one of the participants, found out that each of the participants excluding Mr. S shook hands with different number of participants, and none shook hands with one's spouse.)

    (a) 丁度 1 人と握手した人と、丁度 17 人と握手した人がいることを説明せよ。(There are participants who shook hands with exactly 1 person, and 17 persons respectively. Explain.)

    (b) 丁度 1 人と握手した人の同伴者は丁度 17 人と握手した人であることを説明せよ。(The one who shook hands with exactly one person is a spouse of the one who shook hands with exactly 17. Explain.)

2. a, b, c, d, e, f, g を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、利用する辺を丸で囲め。また、費用の合計はいくらか。(We want to construct a network connecting a, b, c, d, e, f, g with minimum construction cost. Encircle the pair below we should choose and compute the total cost as well.) ab = 6, ac = 6, ad = 5, ae = 2, af = 2, ag = 5, bc = 5, bd = 8, be = 3, bf = 9, bg = 2, cd = 7, ce = 4, cf = 9, cg = 7, de = 5, df = 8, dg = 4, ef = 1, eg = 4, fg = 3（単位は万円）

ab, ac, ad, ae, af, ag, bc, bd, be, bf, bg,
cd, ce, cf, cg, de, df, dg, ef, eg, fg

費用の合計 (Total Cost)： 万円

Message 欄（裏にもどうぞ）：国際人（World Citizen）とは。ICU のそして自分の「国際性」にとって必要なこと。(「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。)

Solutions to Quiz 6

1. S 夫妻を含め 10 組の夫妻があるパーティーに出席した（合計 20 人）。握手の後 S 氏は妻を含めた各人に何人と握手したかを尋ねるとどの人も異なる人数を答えた。ただしどの人も自分の同伴者とは握手をしなかった。(At a party ten couples attended and shook hands. Mr. S, one of the participants, found out that each of the participants excluding Mr. S shook hands with different number of participants, and none shook hands with one's spouse.)

   (a) 丁度 1 人と握手した人と、丁度 17 人と握手した人がいることを説明せよ。(There are participants who shook hands with exactly 1 person, and 17 persons respectively. Explain.)

   解：握手をした人数の最小は 0 人。最大は、自分と同伴者を全員の数からひいて 18 人で、全部で 19 通り。S 氏が聞いたのは、19 人で、すべて異なる答えをしたということは、この 19 通りすべての答えがあったということ。特に、丁度 1 人と握手した人も、丁度 17 人と握手した人もいることになる。 ■

   (b) 丁度 1 人と握手した人の同伴者は丁度 17 人と握手した人であることを説明せよ。(The one who shook hands with exactly one person is a spouse of the one who shook hands with exactly 17. Explain.)

   解：前問の解答のように、丁度 18 人（同伴者以外全員）と握手した人も、だれとも握手しなかった人もいる。丁度 18 人と握手した人と握手しなかったのは本人とその同伴者だけである。しかし誰とも握手しなかった人は、確かに丁度 18 人の人と握手した人とも握手していないので、この人が 18 人の人と握手した人の同伴者である。丁度 17 人と握手した人もいるが、その人が握手しなかったのは、誰とも握手しなかった人ともう一人だけである。誰とも握手しなかった人は、丁度 18 人と握手した人の同伴者であることが分かっているので、この人の同伴者は、この人が握手をしなかった人の中で、誰とも握手しなかった人以外である。丁度一人と握手した人もいるが、この人は、丁度 18 人と握手した人としか握手していないので、この人は、丁度 17 人と握手した人とは握手していない。従ってこの人が丁度 17 人と握手した人の同伴者である。 ■

2. a, b, c, d, e, f, g を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、利用する辺を丸で囲め。また、費用の合計はいくらか。(We want to construct a network connecting a, b, c, d, e, f, g with minimum construction cost. Encircle the pair below we should choose and compute the total cost as well.) ab = 6, ac = 6, ad = 5, ae = 2, af = 2, ag = 5, bc = 5, bd = 8, be = 3, bf = 9, bg = 2, cd = 7, ce = 4, cf = 9, cg = 7, de = 5, df = 8, dg = 4, ef = 1, eg = 4, fg = 3（単位は万円）

   解：ae または af と、be または fg と、bg と、ce と、dg と、ef 。これら 4 通りどれでも正解。

   費用の合計 (Total Cost)：　１６ 万円

Quiz 7

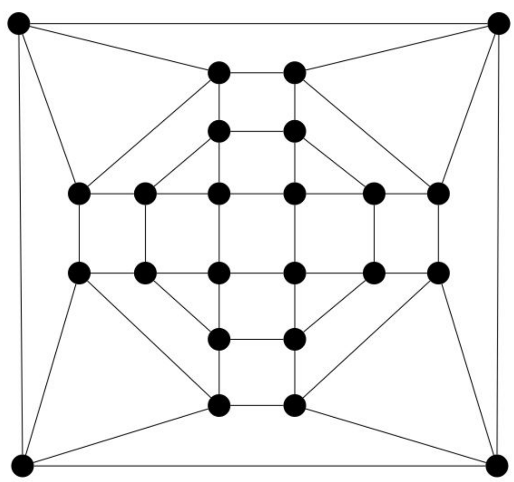
Division: **ID#:** **Name:**

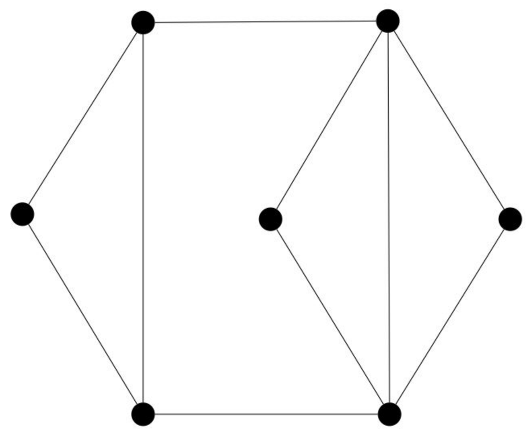
1. 一筆書きできる漢字を「一」および「日」以外に 8 個書いて下さい。(List 8 Chinese characters besides “一” and “日” which can be drawn with a single stroke.)

2. 右下のグラフは Hamilton Graph ではないことを Theorem 7.3 を用いて示せ。(Show that the graph at the bottom right is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3.)

3. 右下のグラフは一筆書きはできるが、Euler Graph ではない。理由を簡単に延べよ。(Explain briefly why the graph at the bottom right can be drawn with a single stroke but it is not an Euler graph.)

4. 左下のグラフは Hamilton グラフであることを Hamilton 閉路を描くことにより示せ。(Show that the graph below on the left is a Hamiltonian graph by drawing a Hamiltonian cycle.)





Message 欄（裏にもどうぞ）: 聖書を読んだことがありますか。キリスト教について、ICU の「C」について。(「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。)

Solutions to Quiz 7

1. 一筆書きできる漢字を「一」および「日」以外に 8 個書いて下さい。(List 8 Chinese characters besides “一” and “日” which can be drawn with a single stroke.)

   解：OK: (1) 一 (2) 日 (3) 了 (4) 口 (5) 中 (6) 串 (6) 弓 (7) 凹 (8) 凸 (9) 己 (10) 巳 (11) 乙 (12) 呂 (13) 曰 (いわく) (14) 几

   △: (i) 灰 (?) (ii) 反 (?) この二つは努力賞ということで OK

   No: (a) 尺 (?) (b) 兄 (?) (c) 人 (?) (d) 入 (?) (e) 又 (?) (f) 乃 (?)

   採点の時点で上記以外に現れたら考えるが、現時点では、(a)-(e) は不採用。(f), (g) は努力賞として採用する。

2. 右下のグラフは Hamilton Graph ではないことを Theorem 7.3 を用いて示せ。(Show that the graph at the bottom right is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3.)

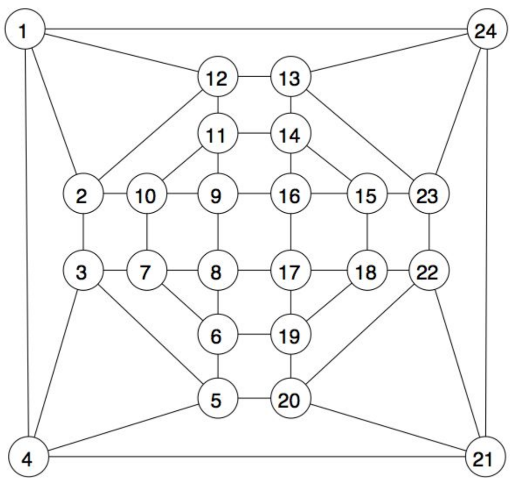
   解：下の図のように白く抜いた頂点二つを除くと、三つの連結成分に分かれる。すなわち、S としてその二頂点をとり、それ以外の 5 個の頂点でできるグラフを Δ とすると $\omega(\Delta) = 3 > 2 = |S|$ である。したがって、Theorem 7.3 より 下のグラフは Hamilton グラフではない。 ■

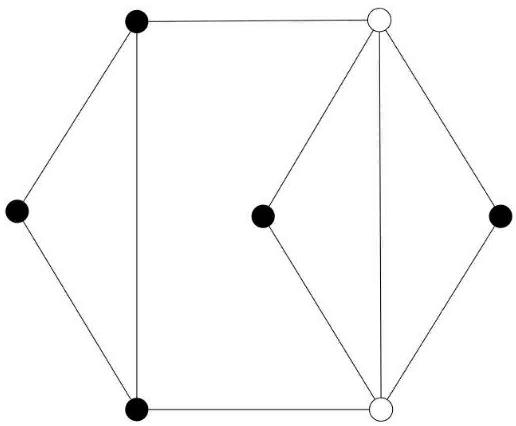
3. 右下のグラフは一筆書きはできるが、Euler Graph ではない。理由を簡単に延べよ。(Explain briefly why the graph at the bottom right can be drawn with a single stroke but it is not an Euler graph.)

   解：頂点の次数は、$4, 4, 3, 3, 2, 2, 2$ である。このグラフは連結であり、奇数次数の点の数が 2 であるので、Theorem 7.1 によって Euler Graph ではない。また、Corollary 7.2 により、一筆書き可能である。 ■

4. 左下のグラフは Hamilton グラフであることを Hamilton 閉路を描くことにより示せ。(Show that the graph below on the left is a Hamiltonian graph by drawing a Hamiltonian cycle.)

   解：番号の順番にまわる閉路（24 の次は 1）は Hamilton Cycle である。他にもたくさんあります。





Quiz 8

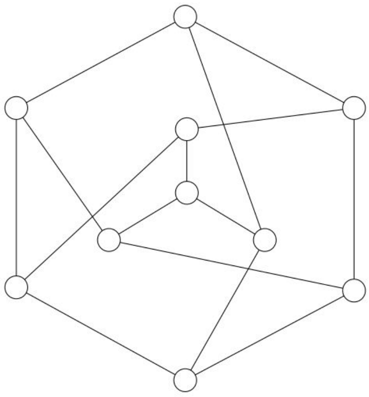
Division: **ID#:** **Name:**

1. 5 点上の完全グラフ K_5 は平面的グラフではないことを証明せよ。(Show that K_5, the complete graph with five vertices, is not a planar graph.) **Don't use Theorem 8.3 !**

2. 下のグラフ Γ は Petersen グラフと呼ばれる。

   (a) Γ が平面グラフとして描けたとする。このときの面の数を求めよ。(Find the number of faces assuming the graph Γ is drawn as a plane graph.)

   (b) Γ は平面的グラフではないことを証明せよ。(Show that the graph Γ is not a planar graph.) (Hint: Γ には長さが 3 や 4 の閉路がない。Γ does not have a circuit of length 3 or 4.)



Message 欄（裏にもどうぞ）: (1) 日本・世界の教育について。(2) ICU の教育について。特に改善点について。

Solutions to Quiz 8

1. 5 点上の完全グラフ K_5 は平面的グラフではないことを証明せよ。(Show that K_5, the complete graph with five vertices, is not a planar graph.) **Don't use Theorem 8.3 !**

   解：K_5 の頂点の数 $v = 5$。各頂点を残りのすべての点は隣接しているから、各頂点の次数は 4。従って、Proposition 8.2 (i) より 辺の数 $e = 10$ となる。$(4 \cdot 5 = 2 \cdot e.)$ 平面的グラフだと仮定する。すると、平面グラフに描けるので、オイラーの公式より、そのときの面の数 f は、

   $$f = e - v + 2 = 10 - 5 + 2 = 7.$$

   7 つの面はそれぞれ、$n_1, n_2, \ldots, n_7$ の辺で囲まれているとする。各面は 3 辺以上で囲まれているから、$n_1 \geq 3$, $n_2 \geq 3$, ..., $n_7 \geq 3$。Proposition 8.2 (ii) によって

   $$20 = 2 \cdot e = n_1 + n_2 + \cdots + n_7 \geq 3 \cdot 7 = 21.$$

   これは矛盾である。したがって、K_5 は平面的ではない。 ■

2. 下のグラフ Γ は Petersen グラフと呼ばれる。

   (a) Γ が平面グラフとして描けたとする。このときの面の数を求めよ。(Find the number of faces assuming the graph Γ is drawn as a plane graph.)

   解：Γ の頂点の数 $v = 10$、辺の数 $e = 15$ である。平面的グラフだと仮定する。すると、平面グラフに描けるので、オイラーの公式より、そのときの面の数 f は、

   $$f = e - v + 2 = 15 - 10 + 2 = 7.$$

   従って、面の数は 7 である。 ■

   (b) Γ は平面的グラフではないことを証明せよ。(Show that the graph Γ is not a planar graph.) (Hint: Γ には長さが 3 や 4 の閉路がない。Γ does not have a circuit of length 3 or 4.)

   解：7 つの面はそれぞれ、$n_1, n_2, \ldots, n_7$ の辺で囲まれているとする。各面は 5 辺以上で囲まれているから、$n_1 \geq 5$, $n_2 \geq 5$, ..., $n_7 \geq 5$。Proposition 8.2 (ii) によって

   $$30 = 2 \cdot e = n_1 + n_2 + \cdots + n_7 \geq 5 \cdot 7 = 35.$$

   これは矛盾である。したがって、Γ は平面的ではない。 ■

   Theorem 8.3 を用いると、このグラフは K_5 か $K_{3,3}$ の細分を含む。どのような点を取ると、そのようなものを含むか分かりますか。