数学 A 数学の世界 (The World of Mathematics) *November 13, 2006*

Practice Exam 2006

1. p, q, r を命題とする。(Let p, q, r are propositions.) (10pts)

   (a) 次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。(Decide whether the following holds or not by completing the truth table below. And write your conclusion and reason.)

   $$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

p	q	r	$(p \quad \vee \quad q) \quad \Rightarrow \quad r$	$(p \quad \Rightarrow \quad r) \quad \wedge \quad (q \quad \Rightarrow \quad r)$	x
T	T	T			T
T	T	F			T
T	F	T			T
T	F	F			F
F	T	T			T
F	T	F			T
F	F	T			T
F	F	F			T

   [**判定と理由 (Conclusion and reason)**]

   (b) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\wedge$ は使わないこと。(Express $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ using $\neg$, $\vee$ and parentheses. Do not use $\Rightarrow$ or $\wedge$.)

   (c) 真理表の最後の列 x を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\wedge$ は使わないこと。(Express x using $\neg$, $\vee$ and parentheses. Do not use $\Rightarrow$ or $\wedge$.)

2. 次の数を求めよ。どのように求めるかも簡単に説明せよ。 (10pts)

   (a) 50 チームでトーナメント戦を行なう。ただし、敗者復活戦を設け、敗者復活戦 (repechage) でも敗れた場合失格とする。引き分けはないものとし、最後に 1 チーム残す（優勝チームを決める）ためには、最大、何試合が必要か。(Fifty teams are in a tournament. There is also a tournament for teams lost one game. If a team looses one game in the first tournament and another game in the second tournament, that is the end for the team. At most how many games are necessary to decide the winner under this system?)

   (b) $4096 = 2^{12}$ を 2 以上の 5 個の自然数の積としてあらわす。積の順序も考慮に入れると何通りの表し方があるか。(How many ways are there to express $4096 = 2^{12}$ as products of 4 integers greater than or equal to 2, if you take the order of the expressions into account? E.g. $4*64*8*2$ and $64*8*4*2$ are considered to be different expressions.)

3. 7×7 のチェス盤について考える。(Consider a 7×7 chess board.) (10pts)

   (a) 各ますにナイトをおいたとき、各ナイトがナイトの動きでいっせいに動くことはできないことを説明せよ。(Suppose 49 knights are placed at all squares. Explain that it is impossible for all knights to move at once by the move of chess knights.)

   (b) ナイトがナイトの動きをしながらすべてのますを丁度一回ずつ回ってもとに戻ることはできないことを説明せよ。(Explain that it is impossible for a knight to move around the board and come back to the original square after visiting all squares exactly once.)

4. 今年の NSIA の授業は、27 時間あり、毎時間最低 1 問は問題を考える。ただし、全部で、50 問は越さない（50 問以下）ものとする。このとき、「丁度 27 問 考える期間がある。」（例えば、3 時間目から 15 時間目に考えた問題をあわせると丁度 27 問と言うような期間が必ずあるということです。）ことを示せ。(There are 27 periods for NS IA this term. We consider at least one problem in each period and the total number of problems does not exceed 50. Show that there is a certain consecutive periods we conisdered exactly 27 problems. By a certain consecutive periods, we mean for example, from the 3rd period to the 15th period.) (10pts)

5. A さんはあるパーティーに参加した。そこには A さんを含め、全員で 12 人の出席者がいた。パーティーの最後に A さんが参加者に握手した人数を聞くと、全員が一人とは握手していることと、みな握手した人数が違うことが判明した。さて、A さんは、何人と握手したのだろうか。A さんの握手した人数と、それを決定する道筋の概略を説明せよ。(Ms. A attended a party. There were 12 people including Ms. A. After some period, Ms. A asked the attendants how many people they shook hands with. All of them answered different numbers. If each one shook hands at least one participant, then how many people Ms. A shook hands with? Explain your reasoning as well.) (10pts)

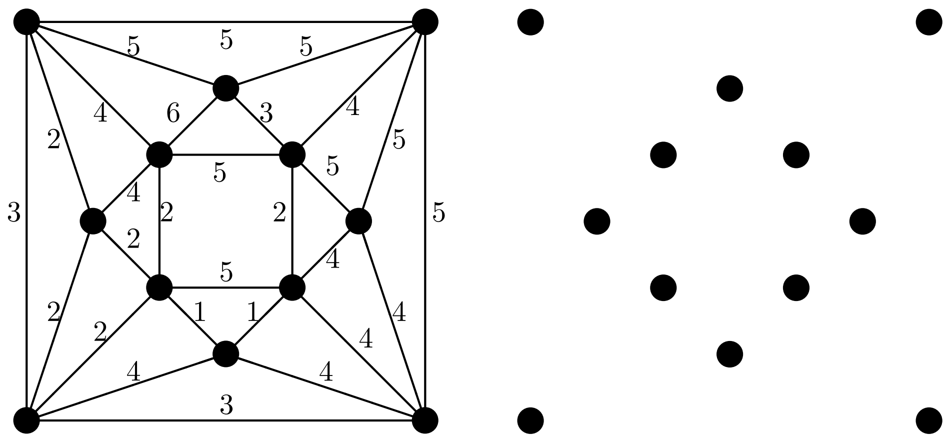
6. $\Gamma = (X, E)$ を頂点の数が v、辺の数が e であるような木であるとする。この時、$e = v - 1$ であることを数学的帰納法で証明せよ。(Let $\Gamma = (X, E)$ be a tree with v vertices and e edges. Show that $e = v - 1$ by mathematical induction.) (10pts)

7. 連結な平面グラフで、各頂点の次数が 3 で、各面が 3 辺形か、6 辺形であるものを 考える。今、3 辺形の数を m、頂点の個数を v、辺の個数を e、面の個数を f とする。(Γ is a connected plane graph such that each vertex is of degree 3, each face is surrounded by either three edges or six edges. Suppose there are m faces surrounded by three edges, and Γ has v vertices, e edges and f faces.) (10pts)

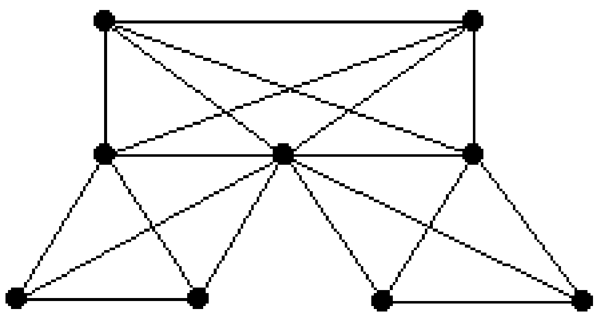
   (a) $6f = 2e + 3m$ が成立することを示せ。(Show that $6f = 2e + 3m$.)

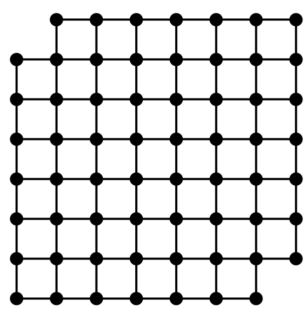
   (b) m を決定せよ。答えだけではなく、決定の道筋も説明せよ。(Determine m. Show work!)

8. 下の 12 の点を結ぶネットワークを作る。辺の数字は、その線の建設費を点数で表したものとする。このとき、全ての点が間接的には、全てつながり、かつ建設費を最も少なくしたい。建設費の合計点がいくつになるか。また対応する点を結ぶネットワークを右下に図示せよ。(Find the minimum cost of a connected network using the diagram below. Draw your network on the right as well by connecting corresponding points.) (10pts)



9. 下のグラフは、平面的グラフであることを示せ。(Show that the graph on the left is a planar graph.) (10pts)





10. 右上のグラフは、ハミルトングラフではないことを示せ。(Show that the graph on the right above is not a Hamiliton graph.) (10pts)

Grading Policy The grade is determined by $T = S + F$ which is computed by the following formula. If $\sqrt{50 \times T} \geq 60$, Grade D or above is guaranteed. The grade distribution will be curved so that the overall course GPA is in between 2.5 and 2.7.

1. $S = \min(100, Q + P + E)$
   (a) $Q =$ the total of 8 quizzes.
   (b) $P = \max(0, 3 \times N - 4)$, where
   $N = \min(8, \text{the number of quizzes submitted} + 1 \text{ (if the survey test was taken)})$.
   (c) $E = \min(10, 3 \times \text{the number of challenge problems submitted and solved correctly})$.
2. F: The points obtained in Final.