数学の世界 (World of Mathematics) *March 1, 2013*

Final Exam AY2012

ID#: Name:

以下の問題において授業で扱った Theorem, Proposition を用いる時は、Handout にある番号または、その内容を明記すること。Whenever you apply theorems and propositions in handouts, quote the statements or their numbers.

1. p, q, r を命題とする。また、x, y, z を次のように置く。(Let p, q, r be statements, and set) (10pts)

$$x = (p \wedge q) \Rightarrow r, \quad y = (p \vee q) \Rightarrow r, \quad z = (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

(a) x, y, z の真理表を完成せよ。(Complete the truth table of x, y, z.)

p	q	r	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
T	T	T			
T	T	F			
T	F	T			
T	F	F			
F	T	T			
F	T	F			
F	F	T			
F	F	F			

(b) 次の式のうち真理値が常に真になるものすべてを丸で囲め。
(Find all formula such that the truth value is always T. Encircle them.)

i. $x \Rightarrow y$,
ii. $x \Rightarrow z$,
iii. $y \Rightarrow z$,
iv. $y \Rightarrow x$,
v. $z \Rightarrow x$,
vi. $z \Rightarrow y$.

Points

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Total
/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/90 pts

2. 受講生 119 人の中でお互いに知り合いである人を調べる。(In a class with 119 students, find all pairs of mutual acquaintance.) (10pts)

   (a) 受講生 119 人のそれぞれの知り合いの数の合計は偶数であることを、このコースを受講していない ICU 生にも理解できるように、かつ定理を使わずに説明してください。(The sum of the number of acquaintances of these 119 students is even. Explain this fact without using a theorem in such a way ICU students who are not taking this course can understand.)

   (b) 知り合いのひとの人数が偶数である人は、この 119 人の中に必ず奇数人いることを、このコースを受講していない ICU 生にも理解できるように、かつ定理を使わずに説明してください。(There are odd number of students among these 119 whose number of acquaintances is even. Explain this fact without using a theorem in such a way ICU students who are not taking this course can understand.)

3. 8 点上のグラフについて考える。(Consider graphs with eight vertices.) (10pts)

   (a) 各頂点の次数がすべて奇数の (8 点上の) 同型でない木をすべて描け。(Depict all non-isomorphic trees such that every vertex is of odd degree.)

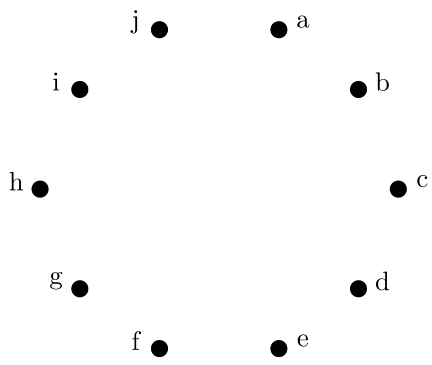
   (b) (8 点上の) 5 正則グラフで同型でないもの、および、それぞれの補グラフを描け。(Draw all non-isimorphic 5-regular graphs on eight vertices, and the complement of them.)

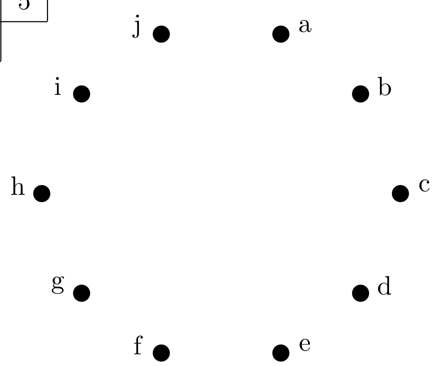
4. (a) 20 個入りのアーモンドチョコレートを一箱買って、5 人の兄弟に分けたい。それぞれが最低 1 個はもらえるようにすると、何通りの分け方があるか。${}_nC_m$ の形で答え、理由も簡単に説明してください。In how many ways can 20 chocolate pieces be distributed among 5 children when each child gets at least one? Give the number in the form ${}_nC_m$, and briefly explain your reasoning.

(b) 20 個入りのキャラメルを一箱買って、5 人の兄弟に分けたい。何通りの分け方があるか。${}_nC_m$ の形で答え、理由も簡単に説明してください。In how many ways can 20 chocolate pieces be distributed among 5 children if there is no restriction? Give the number in the form ${}_nC_m$, and briefly explain your reasoning.

5. a, b, c, d, e, f, g, h, i, j を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、その最小の費用はいくらか。そのネットワークを 二種類 図示せよ。（単位は万円）(Find the least expensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h, i, j indirectly using the cost table below. Draw two such networks and give the total cost. (1 unit = 10,000 JPY)) (10pts)

	j	i	h	g	f	e	d	c	b
a	3	4	2	3	1	4	3	4	2
b	2	1	4	4	3	4	2	4	
c	4	5	2	4	3	2	5		
d	5	3	3	2	1	4			
e	3	4	4	3	3				
f	4	2	4	4					
g	3	4	3						
h	4	3							
i	5								





合計 (Total)： **万円 (× 10,000 yen)**

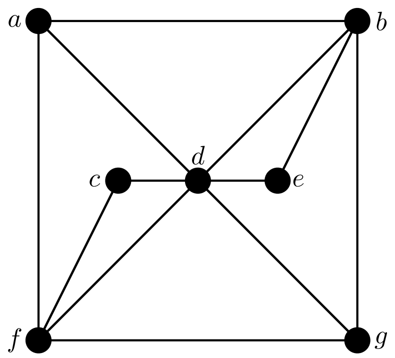
6. Γ は 頂点数が v、辺の数が e、面の数が f である連結な平面グラフであるとする。このとき、命題 p を以下のようにする。 (Γ is a connected plane graph with v vertices, e edges and f faces. Let p be the following statement on Γ.)
p: Γ には、次数が 2 以下の頂点または 5 辺以下で囲まれている面が存在する。
(There is a vertex of degree at most two or a face that is surrounded by at most 5 edges.) (10pts)

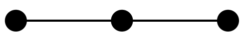
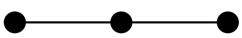
   (a) 命題 p を背理法で示す。p を否定すると、$v \leqq \frac{2}{3}e$ かつ $f \leqq \frac{1}{3}e$ が成立することを説明せよ。(In order to prove p, by way of contradiction, assume p does not hold. Explain that $v \leqq \frac{2}{3}e$ and $f \leqq \frac{1}{3}e$ hold.)

   (b) 命題 p が成立することを示せ。(Show that the statement p holds.)

7. 下のグラフについて考える。(Consider the graph below.)

   (a) ハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。 (Show that the graph is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$.) (10 pts)



   (b) 二頂点を長さ 2 の路  で結ぶと、Euler グラフになる。(i) それは、どの頂点か、また、(ii) 新しいグラフは、ハミルトングラフか。If we connect two vertices of the graph by a path of length two  , the then it becomes a Euler graph. (i) Which are the two vertices? (ii) Is the resulting graph Hamiltonian?

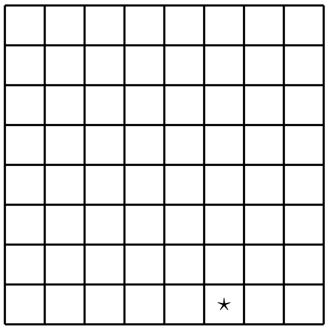
   (i) (ii)

8. 今回の数学の世界の授業は 27 回あり、毎回 1 問は問題を考えることにし、全体で 50 問は越さないことにした。 (There are 27 classes of World of Mathematics and at least one problem is discussed and total number of problems does not exceed 50.) (10pts)

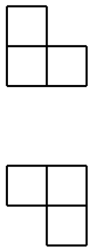
   (a) 丁度一問考える時間もあることを説明せよ。(There is a class exactly one problem is discussed.)

   (b) ちょうど 27 問考えた期間（何日目から何日目の間）があることを説明せよ。(Explain that there is a certain period of consecutive classes (eg. from day 3 to day 20) that the total number of problems discussed is exactly 27.)

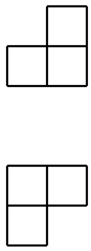
9. (a) 下のようなチェス盤から、$\star$ のところを取り除いたものは、(A) タイプの二種類の板では敷き詰められないことを説明せよ。Consider the 8×8 board with the square with $\star$ removed. Explain the fact that it is impossible to cover up the board without overlapping using two types of plates of type (A).



(A)



(B)



(b) $\star$ のところに限らず、どこを 1 箇所取り除いても、(A), (B) の 4 種類の板を使えば、重ならないように敷き詰められることを説明せよ。Consider the 8×8 board with one square removed. Explain that no matter which square is removed, the board can be completely covered up by 4 types of plates in (A) or (B) without overlapping.

メッセージ　(「ホームページ掲載不可」は明記のこと。If you wish, write "Do Not Post.")

この授業は受講生の皆さんが (a) 論理的思考・数学的思考を体験すること (b) 一つの数学の世界を垣間見ること (c) 数学を楽しむこと、を目的としました。これらについて、および数学一般について、この授業一般について、特に改善点について、私へのメッセージなど何でも書いて下さい。(There are three purposes of this course; (a) to experience logical and mathematical thinking, (b) to have a glimpse of a world of mathematics, (c) to enjoy mathematics. Give comments on these, mathematics in general, or on this course especially for improvements, etc.)

数学の世界 (World of Mathematics) *March 1, 2013*

Solutions to Final Exam AY 2012

以下の問題において授業で扱った Theorem, Proposition を用いる時は、Handout にある番号または、その内容を明記すること。Whenever you apply theorems and propositions in handouts, quote the statements or their numbers.

1. p, q, r を命題とする。また、x, y, z を次のように置く。(Let p, q, r be statements, and set) (10pts)

$$x = (p \wedge q) \Rightarrow r, \quad y = (p \vee q) \Rightarrow r, \quad z = (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

(a) x, y, z の真理表を完成せよ。(Complete the truth table of x, y, z.)

p	q	r	$(p \wedge q)$	$\Rightarrow$	r	$(p \vee q)$	$\Rightarrow$	r	$(p \Rightarrow r)$	$\wedge$	$(q \Rightarrow r)$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T		$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	T	F	T	$\boldsymbol{F}$			$\boldsymbol{F}$			$\boldsymbol{F}$	
T	F	T		$\boldsymbol{T}$	T		$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	F	F		$\boldsymbol{T}$			$\boldsymbol{F}$			$\boldsymbol{F}$	T
F	T	T		$\boldsymbol{T}$	T		$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	F		$\boldsymbol{T}$			$\boldsymbol{F}$		T	$\boldsymbol{F}$	
F	F	T		$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	F		$\boldsymbol{T}$		F	$\boldsymbol{T}$		T	$\boldsymbol{T}$	T

(b) 次の式のうち真理値が常に真になるものすべてを丸で囲め。
(Find all formula such that the truth value is always T. Encircle them.)

Soln. Note that $y \equiv z$ and $y \Rightarrow x$ is always true. Hence

i. $x \Rightarrow y$,

ii. $x \Rightarrow z$,

iii. $y \Rightarrow z$,

iv. $y \Rightarrow x$,

v. $z \Rightarrow x$,

vi. $z \Rightarrow y$.

2. 受講生 119 人の中でお互いに知り合いである人を調べる。(In a class with 119 students, find all pairs of mutual acquaintance.) (10pts)

(a) 受講生 119 人のそれぞれの知り合いの数の合計は偶数であることを、このコースを受講していない ICU 生にも理解できるように、かつ定理を使わずに説明してください。(The sum of the number of acquaintances of these 119 students is even. Explain this fact without using a theorem in such a way ICU students who are not taking this course can understand.)

Soln. 2 人が知り合いであるとすると、その双方の人の知り合いの数に寄与する。知り合いのペアの数を e とすると、受講生 119 人のそれぞれの知り合いの数の合計は $2e$ となり、偶数であ

る。例えば a, b, c, d の 4 人の場合、a,b と、a,c と a,d と、b,c が知り合いだとする。知り合いのペアの数は 4、a の知り合いは、b, c, d の 3 人、b の知り合いは a, c の 2 人、c の知り合いは a と b, d の知り合いは、a だけだから、知り合いの数の合計は、$3+2+2+1=8$ で確かに、$2 \times e = 8$ となっている。最初のペアの中に a, b, c, d がそれぞれ何回出てきたかの総数を数えているのだから、それは、ペアの数の倍である。従って、その数は偶数となる。

If two, say a and b, know each other, b is counted as an acquaintance of a and a is counted as an acquaintance of b. So one pair of acquaintance contributes to 2 in the sum of the number of acquaintances. Hence if e is the total number of pairs of acquaintances, the sum of the number of acquaintances of these 119 students is $2e$, which is even. If there are 4, i.e., a, b, c, d and a,b, a,c, a,d and b,c are pair of acquaintances, the number of acquaintances of a is 3 as b, c, d are those a knows. Similarly, b knows 2, c knows 2 and d knows 1. Thus the sum is $3+2+2+1=8$, which is 2×4, an even integer. This is the total number of a, b, c, d appearing in the list a,b, a,c, a,d and b,c of acquaintances, it has to be 2 times the number of pairs of acquaintances. ■

(b) 知り合いのひとの人数が偶数である人は、この 119 人の中に必ず奇数人いることを、このコースを受講していない ICU 生にも理解できるように、かつ定理を使わずに説明してください。(There are odd number of students among these 119 whose number of acquaintances is even. Explain this fact without using a theorem in such a way ICU students who are not taking this course can understand.)

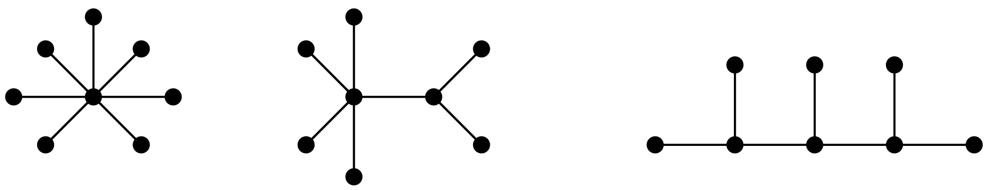
Soln. 119 人のそれぞれの知り合いの数を足している。その中には奇数も、偶数もあると思われる。しかし合計は、(a) から、偶数にならなければならない。偶数はいくら足しても、偶数だが、奇数は、偶数個足すと偶数になるが、奇数個足すと奇数である。そこで合計が偶数になるためには、奇数は、偶数個なければならない。つまり、知り合いの人が奇数人であるひとは、偶数人である。知り合いの人が偶数人であるひとは、それ以外だから、119 から偶数を引くと、奇数となる。すなわち、知り合いの数が偶数であるひとは、奇数人いることになる。

In the sum of the number of acquaintances, there may be even and odd numbers. However, the sum of even numbers is even, while the sum of even number of odd integers is even. Since the sum is even by (a), there must be even number of odd integers. Since it is a sum of 119 integers and there are even number of odd integers, the remaining part, the number of even integers is odd. ■

3. 8 点上のグラフについて考える。(Consider graphs with eight vertices.) (10pts)

(a) 各頂点の次数がすべて奇数の (8 点上の) 同型でない木をすべて描け。(Depict all non-isomorphic trees such that every vertex is of odd degree.)

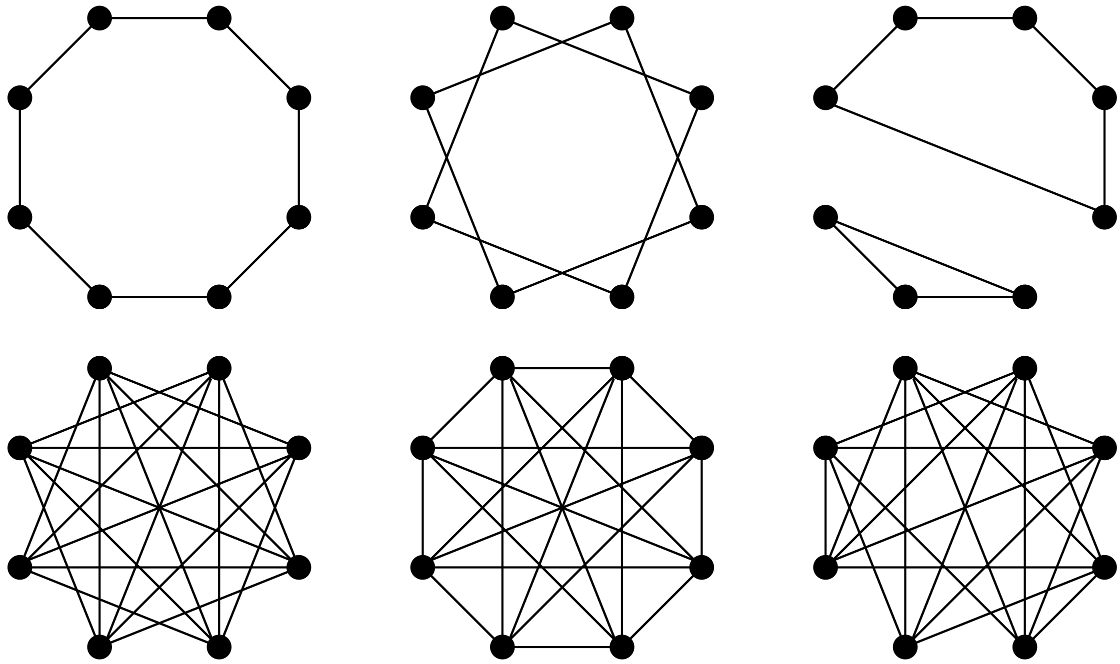
Soln.



The degree sequences of these graphs are $(7,1,1,1,1,1,1,1)$, $(5,3,1,1,1,1,1,1)$ and $(3,3,3,1,1,1,1,1)$.

(b) (8 点上の) 5 正則グラフで同型でないもの、および、それぞれの補グラフを描け。(Draw all non-isimorphic 5-regular graphs on eight vertices, and the complement of them.)

Soln. Since the complement of a 5-regular graph on 8 vertices is a 2-regular graph, we first find all 2-regular graphs on 8 vertices. They are the 8-gon, two 4-gons, and a union of a 3-gon and a 5-gon. The corresponding complements are drawn below.



4. (a) 20 個入りのアーモンドチョコレートを一箱買って、5 人の兄弟に分けたい。それぞれが最低 1 個はもらえるようにすると、何通りの分け方があるか。${}_nC_m$ の形で答え、理由も簡単に説明してください。In how many ways can 20 chocolate pieces be distributed among 5 children when each child gets at least one? Give the number in the form ${}_nC_m$, and briefly explain your reasoning.

Soln. ${}_{19}C_4$. 20 個ならべてその 19 個のすきまを、4 箇所えらべば、5 つに分けることができるので、この数になる。C をチョコレートとし、| を仕切りとして、この仕切りから 4 個選べばよい。Arrange 20 chocolate in a row. In order to divide them into five groups, we put 4 separators among 19 places between chocolates. C is for a piece of chocolate, and | is a separator. We want to choose four separators out of 19.

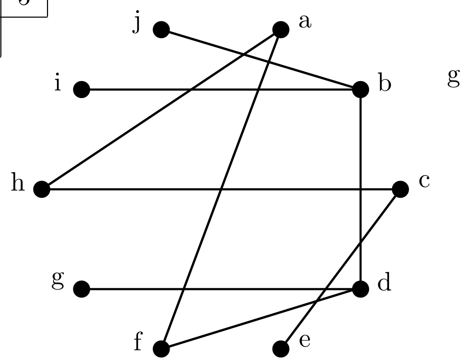
$$C|C|C|C|C|C|C|C|C|C|C|C|C|C|C|C|C|C|C|C$$

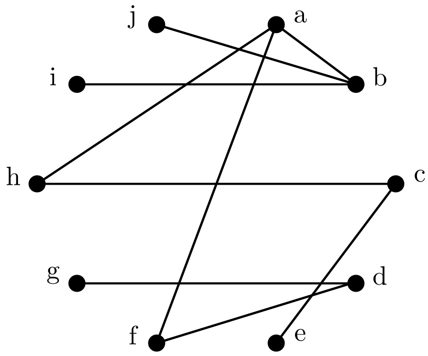
(b) 20 個入りのキャラメルを一箱買って、5 人の兄弟に分けたい。何通りの分け方があるか。${}_nC_m$ の形で答え、理由も簡単に説明してください。In how many ways can 20 pieces of chocolate pieces be distributed among 5 children if there is no restriction? Give the number in the form ${}_nC_m$, and briefly explain your reasoning.

Soln. ${}_{24}C_4$. 25 個にしておいて、最低一つはもらえるようにして配り、ひとつずつあとから返して貰えばよい。25 個のものを 5 人で最低一つは貰えるようにわける分け方は、(a) の考え方から、この数になる。First borrow 5 more chocolates from someone and distribute 25 of them so that each gets at least one. After distribution, collect one from each. By the logic I explained in (a) there are ${}_{24}C_4$ ways when each child gets at least one, this is the answer. ■

5. a, b, c, d, e, f, g, h, i, j を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、その最小の費用はいくらか。そのネットワークを 二種類 図示せよ。（単位は万円）(Find the least expensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h, i, j indirectly using the cost table below. Draw two such networks and give the total cost. (1 unit = 10,000 JPY)) (10pts)

	j	i	h	g	f	e	d	c	b
a	3	4	2	3	1	4	3	4	2
b	2	1	4	4	3	4	2	4	
c	4	5	2	4	3	2	5		
d	5	3	3	2	1	4			
e	3	4	4	3	3				
f	4	2	4	4					
g	3	4	3						
h	4	3							
i	5								





合計 (Total)： 15 万円 (× 10,000 yen)

6. Γ は 頂点数が v、辺の数が e、面の数が f である連結な平面グラフであるとする。このとき、命題 p を以下のようにする。 (Γ is a connected plane graph with v vertices, e edges and f faces. Let p be the following statement on Γ.)

p: Γ には、次数が 2 以下の頂点または 5 辺以下で囲まれている面が存在する。

(There is a vertex of degree at most two or a face that is surrounded by at most 5 edges.) (10pts)

(a) 命題 p を背理法で示す。p を否定すると、$v \leqq \frac{2}{3}e$ かつ $f \leqq \frac{1}{3}e$ が成立することを説明せよ。(In order to prove p, by way of contradiction, assume p does not hold. Explain that $v \leqq \frac{2}{3}e$ and $f \leqq \frac{1}{3}e$ hold.)

Soln. 否定すると、各頂点の次数は 3 以上で、各面は 6 本以上の辺で囲まれていることになる。Proposition 8.2 (i), (ii) から、以下の式が成り立つ。Suppose not. Then the degree of every vertex is at least three and every face is surrounded by at least 6 edges. By Proposition 8.2 (i) and (ii), we have

$$3v \leqq 2e, \text{ and } 6f \leqq 2e.$$

したがって、Therefore

$$v \leqq \frac{2}{3}e \text{ and } f \leqq \frac{1}{3}e.$$

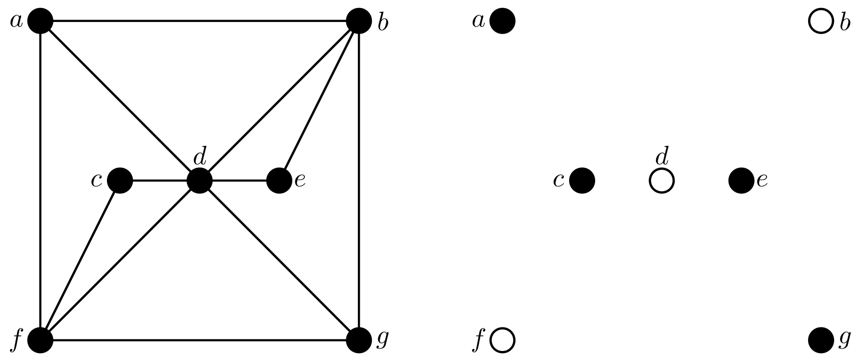
(b) 命題 p が成立することを示せ。(Show that the statement p holds.)

Soln. Theorem 8.1 のオイラーの公式を用いると、下の式より矛盾を得る。By applying the Euler's formula in Theorem 8.1 we obtain a contradiction.

$$2 = v - e + f \leqq \frac{2}{3}e - e + \frac{1}{3}e = 0.$$

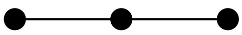
7. 下のグラフについて考える。(Consider the graph below.)

   (a) ハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。(Show that the graph is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$.) (10 pts)



   $S = \{b, d, f\}$ とすると、S を除いてできるグラフ Δ は上の図のようになる。この連結成分の数は、4 なので、$4 = \omega(\Delta) > |S| = 3$. Theorem 7.3 より、ハミルトングラフでは、どんな S をとっても $\omega(\Delta) \leqq |S|$ が成立しなければならないから、このグラフはハミルトングラフではない。

   Let $S = \{b, d, f\}$, and let Δ be a graph obtained by deleting vertices in S and edges containing a vertex in S. Then Δ becomes as depicted above. Since the number of connected components of Δ is four, we have $4 = \omega(\Delta) > |S| = 3$. By Theorem 7.3, if Γ is Hamiltonian, $\omega(\Delta) \leqq |S|$ must hold for any choice of S. This graph is not a Hamilton graph. ■

   (b) 二頂点を長さ 2 の路  で結ぶと、Euler グラフになる。(i) それは、どの頂点か、また、(ii) 新しいグラフは、ハミルトングラフか。If we connect two vertices of the graph by a path of length two  , the then it becomes a Euler graph. (i) Which are the two vertices? (ii) Is the resulting graph Hamiltonian?

   (i) a and g. (ii) The graph is a Hamilton graph.

   The vertices a and g are the only vertices of odd degree, if a path of length 2 is added, every vertex is of even degree and the graph is Eulerian. If the middle vertex of the path added is labeled h, the sequence of vertices $a, h, g, b, e, d, c, f, a$ is a Hamilton cycle.

8. 今回の数学の世界の授業は 27 回あり、毎回 1 問は問題を考えることにし、全体で 50 問は越さないことにした。(There are 27 classes of World of Mathematics and at least one problem is discussed and total number of problems does not exceed 50.) (10pts)

   (a) 丁度一問考える時間もあることを説明せよ。(There is a class exactly one problem is discussed.)

   Soln. 鳩ノ巣原理の Variation 2 を用いる。それぞれの時限が $m = 27$ の鳩ノ巣で、そこに $n = 50$ 羽の鳩が入るとする。Apply Variation 2 of the Pigeonhole Principle by setting $m = 27$ and $n = 50$. Then

$$n = 50 < 2 \cdot 27 = k \cdot m$$

   だから、ある時間には、1 問以下しか考えないことがわかる。しかし仮定より最低 1 問は考えるのだから、ちょうど一問考える時限があることになる。Since at least one problem is discussed at each class, we can conclude that there is a class exactly one problem is discussed. ■

(b) ちょうど 27 問考えた期間（何日目から何日目の間）があることを説明せよ。(Explain that there is a certain period of consecutive classes (eg. from day 3 to day 20) that the total number of problems discussed is exactly 27.)

Soln. j 時限目までに考える問題の総数を $j = 0, 1, 2, \ldots, 27$ に対して、$b_0, b_1, \ldots, b_{27}$ とする。仮定より

$$0 = b_0 < b_1 < \cdots, < b_{27} \leq 50$$

である。これら 28 個の数 $b_0, b_1, \ldots, b_{27}$ を 27 で割ったあまりを考える。あまりは、0 から 26 の 27 通りだから、鳩の巣原理によって、必ずあまりが同じペアが存在する。一つを b_i もうひとつを b_j とする。あまりが同じだから、$b_i = 27p + r$, $b_j = 27q + r$ となる数 p, q をとることができる。$j > i$ とすると、j 時限までに考えた問題の方が i 時限までに考えた問題数より多いから、$b_j > b_i$ である。したがって

$$0 < b_j - b_i = (27q + r) - (27p + r) = 27(q - p)$$

となりこれは、27 の倍数で、$b_{27} \leq 50$ 以下だから、$b_j - b_i = 27$ であることがわかる。これは、$i + 1$ 時限目から j 時限目までちょうど 27 問考えたことを意味している。

For $j = 0, 1, 2, \ldots, 27$, let b_j be the total number of problems discussed by the end of jth class. By hypothesis,

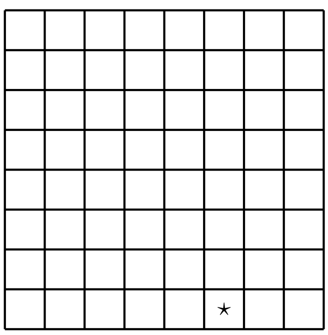
$$0 = b_0 < b_1 < \cdots, < b_{27} \leq 50$$

Divide these 28 numbers by 27 and find their remainders. Then the remainders are in between 0 and 26. Therefore by the Pigeonhole principle, we can find b_i and b_j such that the remainders are equal. Since the remainders are equal we can find integers p, q and the remainder r such that $b_i = 27p + r$, $b_j = 27q + r$. Suppose $j > i$. Then $b_j > b_i$ and

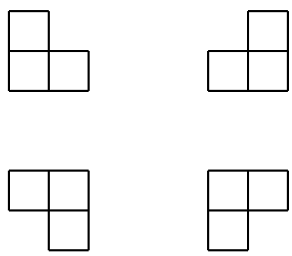
$$0 < b_j - b_i = (27q + r) - (27p + r) = 27(q - p),$$

which is a multiple of 27. Since this number is at most $b_{27} \leqq 50$, $b_j - b_i = 27$. This means, exactly 27 problems were discussed from the $i + 1$th class to the jth class.

9. (a) 下のようなチェス盤から、$\star$ のところを取り除いたものは、(A) タイプの二種類の板では敷き詰められないことを説明せよ。Consider the 8×8 board with the square with $\star$ removed. Explain the fact that it is impossible to cover up the board without overlapping using two types of plates of type (A).



(A) (B)



1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	$\star$	2	3

Soln. 敷き詰められたとする。右上の図のように番号をつけると、(A) の板では、必ず、1 が一つずつおおわれる（2 も一つ、3 も一つおおわれる）。1 は 20 個あり。すべてをおおうためには、$63/3 = 21$ 個の板が必要になる、それにより 1 は 21 個おおわれる筈であるが、20 個しかなく、矛盾である。したがって、(A) の板だけではおおう事ができない。

Put numbers as above. Suppose it is possible to cover up the board without overlapping. Then each piece covers up exactly one square with 1. 21 pieces are required to cover up. However, there are only 20 squares with 1. This is a contradiction. ■

(b) $\star$ のところに限らず、どこを 1 箇所取り除いても、(A), (B) の 4 種類の板を使えば、重ならないように敷き詰められることを説明せよ。Consider the 8×8 board with one square removed. Explain that no matter which square is removed, the board can be completely covered up by 4 types of plates in (A) or (B) without overlapping.

Soln. 帰納法で $2^n \times 2^n$ の盤で、一箇所欠けているものは、かならず、(A), (B) の 4 種類で敷き詰めることができることを示す。$n = 1$ のときは、2×2 で一つ欠けている物だから、(A), (B) の 4 タイプの何れかであるから、敷き詰められる。$2^k \times 2^k$ の場合は、どこが欠けていても敷き詰めることができるとする。$2^{k+1} \times 2^{k+1}$ で何処かがかけているとする。盤を四半分に区切る。ひとつひとつは、$2^k \times 2^k$ の大きさの盤である。そのうち、ひとつだけ、何処かが欠けている。その部分は、帰納法の仮定から、(A), (B) の 4 タイプの板で敷き詰めることができる。のこりの三つのまたがるように、何れかの板をおくことができるが、すると、残りの三つの四半分は、一箇所だけがすでに、敷き詰められている板になっている。帰納法の仮定より、これらも (A) または (B) の板で敷き詰められるので、$2^{k+1} \times 2^{k+1}$ で何処かがかけている場合についても、示すことができた。従って、帰納法により、いずれの場合も敷き詰めることができ、特にこの問題の $n = 3$ の場合も、どこが一箇所欠けていても、(A) または (B) の 4 タイプの板で敷き詰めることが分かった。

We prove by induction that the board of size $2^n \times 2^n$ can be covered by four types of pieces above, no matter which square is removed. If $n = 1$, the board is nothing but one of the squares in (A) or (B). Assume the statement holds if $n = k$. Suppose $n = k + 1$. Then divide the board into four $2^k \times 2^k$ boards. The removed square is located in one of the four smaller boards. Then put one of the four pieces at the center of the board so that it does not cover the one a square is removed. Then we need to cover up the remaining squares. However, each board of size $2^k \times 2^k$ can be regarded as a board of the size such that one square is removed. Now by induction hypothesis, all of the four board can be covered by these pieces without overlapping. Therefore by induction, the assertion is proved for all cases including the case with $n = 4$ in question. ■