数学の世界 (World of Mathematics) *February 28, 2011*

Final Exam AY2010

Division: ID#: Name:

以下の問題において授業で扱った Theorem, Proposition を用いる時は、Handout にある番号または、その内容を明記すること。Whenever you apply theorems and propositions in handouts, quote the statements or their numbers.

1. p, q, r を命題とする。(Let p, q, r be propositions.) (10pts)

   (a) 次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。(Check whether the following formula is valid by completing the truth table below.)

$$q \vee r \Rightarrow \neg p \equiv p \Rightarrow (\neg q \wedge \neg r).$$

p	q	r	$(q \quad \vee \quad r) \quad \Rightarrow \quad \neg p$	$p \quad \Rightarrow \quad (\neg q \quad \wedge \quad \neg r)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

[**判定と理由 (Decision and Reason)**]

   (b) $q \vee r \Rightarrow \neg p$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\vee$ は使わないこと。(Express $q \vee r \Rightarrow \neg p$ by $\neg$, $\wedge$ and parentheses. Do not use neither $\Rightarrow$ nor $\vee$.)

Points

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Total
/10	/25	/10	/10	/8	/7	/10	/10	/90 pts

2. 頂点の数が 9 のグラフを考える。(Consider graphs on 9 vertices.) (25pts)

   (a) 各頂点の次数が $2,3,3,3,4,5,5,6,6$ であるようなグラフは存在しないことを、ていねいに説明せよ。(Explain why there is no graphs such that the degrees of vertices are $2,3,3,3,4,5,5,6,6$.)

   (b) 各頂点の次数が $1,1,1,1,1,1,1,x,y$ であるような木は、何種類あるか。それらをすべて描き、それらがすべてであることを簡単に説明せよ。(How many trees are of degrees $1,1,1,1,1,1,1,x,y$? Draw them all and explain why.)

   (c) (9 点上の) 6-正則グラフは何種類あるか。その理由も述べよ。(How many graphs are of 6-regular graphs with 9 vertices? Explain why.)

(d) (9 点上のグラフ) でオイラーグラフではあるがハミルトングラフではないものと、ハミルトングラフではあるがオイラーグラフではないものを一つずつ描き、それぞれが条件を満たすものであることを簡単に説明せよ。(Give two examples of graphs with 9 vertices. One is a Euler graph that is not a Hamilton graph, and the other is a Hamilton graph that is not a Euler graph.)

(e) (9 点上の) 連結な二部グラフを一つ描け。また (9 点上の) 二部グラフはどんなものであっても決してハミルトングラフにはならないことを説明せよ。(Draw an example of a connected bipartite graph with 9 vertices. Explain why every bipartite graph is non-Hamiltonian.)

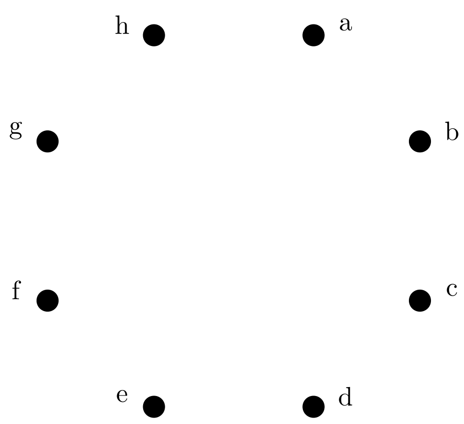
3. 今年度 ELP は Program A が 11, Program B が 12, Program C が 5 のあわせて 28 のセクションに分かれている。このとき次の数を求めよ。どのように求めるかも簡単に説明せよ。${}_nC_m$ の値は計算しなくて良い。(This year there are 11 sections in ELP Program A, 12 in Program B and 5 in Program C, 28 sections in all. Answer the following number and explain why. No need to evaluate ${}_nC_m$.) (10pts)

   (a) 今年度 ELP を履修している学生から 50 人代表を集めて ELP の改革について話し合うことにした。各セクション一人は代表に入るとすると、50 人のセクション別の人数は何通り考えられるか。(How many varieties of numbers from sections are there to select 50 representatives to discuss ELP reform if at least one is from each section?)

   (b) 今年度 ELP を履修している学生のうち 50 人が日本語の summer program に conversation partner として参加したとする。セクション別の人数は何通り考えられるか。一人も参加しなかったセクションがある可能性もある。(How many varieties of numbers from sections are there if 50 ELP students served as conversational partner in Japanese Summer Program. There may be some sections with no volunteers.)

4. a, b, c, d, e, f, g, h を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、その最小の費用はいくらか。そのネットワークも図示せよ。（単位は万円）(Find the least expensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h indirectly using the table below. Draw the network and give its total cost. (1 unit = 10,000 JPY)) (10pts)

	h	g	f	e	d	c	b
a	4	1	3	2	3	3	1
b	2	1	3	1	3	4	
c	3	1	2	4	4		
d	2	2	3	1			
e	2	1	3				
f	3	3					
g	4						



合計 (Total)：

5. Γ は 12 頂点からなる連結な 4-正則グラフであるとする。また Γ は平面グラフに描くことができ、各面は三辺形または四辺形とする。 (Γ is a connected 4-regular graph with 12 vertices. It is a planar graph such that every face is either 3-gon or 4-gon.) (8pts)

   (a) Γ の辺および面の総数はそれぞれいくつか。(Compute the number of edges and faces.)

   (b) Γ の面で 3 辺形となっているものはいくつあるか。(How many 3-gonal faces are there in the graph?)

6. Γ を連結な平面的な二部グラフとする。このとき、Γ には、必ず次数が 3 以下の頂点があることを説明してください。 (Let Γ be a connected bipartite planar graph. Show that Γ has at least one vertex with degree at most 3.) (7pts)

7. 「数学の世界」の授業は 27 時間あり、毎時間最低 1 問は問題を考える。ただし、全部で、51 問は越さないものとする。 (There are total of 27 periods this year for World of Mathematics. In each period one problem is discussed and the total does not exceed 51.) (10pts)

   (a) ちょうど 1 問考えた時間があることをていねいに説明して下さい。(Explain in detail why there is a period only one problem is discussed.)

   (b) ちょうど 25 問考えた時があることを説明して下さい。(Hint: 25 時間目までに最大何問考えたかをまず考える。) (Explain that there is a certain consecutive periods the class discussed exactly 25 problems. (Hint: First consider how many problems were discussed in the first 25 periods.)

8. $1+3+\cdots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ 個のおもりに一つだけ重さが違っている不良品がまざっているが、それが重いか軽いかはわからない。また 3^n 個の正しいおもりが別にある。天秤を $n+1$ 回使うと、その不良品を発見できることを数学的帰納法を用いて説明してください。ただし、次の事実は用いて良い。(Prove by Mathematical Induction that one can find the incorrect weight among $1+3+\cdots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ weights by using a balance $n+1$ times if only one is an incorrect weight and there are 3^n other correct weights besides those above. You can use the following fact.) (10pts)

   「3^n 個 $(n=1,2,\ldots)$ のおもりに一つだけ重さが違っている不良品がまざっているが、その不良品が重いか軽いかはわかっている。このとき、天秤を n 回使うと、その不良品を発見できる。」(If there are 3^n weights including exactly one incorrect weight which is known to be either lighter or heavier, then one can find the incorrect weight by using a balance n times.)

メッセージ　(「ホームページ掲載不可」は明記のこと。If you wish, write “Do Not Post.”)

この授業は受講生の皆さんが (a) 論理的思考・数学的思考を体験すること (b) 一つの数学の世界を垣間見ること (c) 数学を楽しむこと、を目的としました。これらについて、および数学一般について、この授業一般について、特に改善点について、私へのメッセージなど何でも書いて下さい。(There are three purposes of this course; (a) to experience logical and mathematical thinking, (b) to have a glimpse of a world of mathematics, (c) to enjoy mathematics. Give comments on these, mathematics in general, or on this course especially for improvements, etc.)

数学の世界 (World of Mathematics) *February 28, 2011*

Solutions to Final Exam AY 2010

以下の問題において授業で扱った Theorem, Proposition を用いる時は、Handout にある番号または、その内容を明記すること。Whenever you apply theorems and propositions in handouts, quote the statements or their numbers.

1. p, q, r を命題とする。(Let p, q, r be propositions.) (10pts)

   (a) 次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。(Check whether the following formula is valid by completing the truth table below.)

$$q \vee r \Rightarrow \neg p \equiv p \Rightarrow (\neg q \wedge \neg r).$$

p	q	r	$(q$	$\vee$	$r)$	$\Rightarrow$	$\neg p$	p	$\Rightarrow$	$(\neg q$	$\wedge$	$\neg r)$
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	F
T	T	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	T
T	F	T	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	T	F	F
T	F	F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
F	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F
F	T	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T
F	F	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	F
F	F	F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T

   [**判定と理由 (Decision and Reason)**]
   成り立つ。左右の式の真理値が p, q, r の真理値にかかわらず常に等しいから。

   (b) $q \vee r \Rightarrow \neg p$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\vee$ は使わないこと。(Express $q \vee r \Rightarrow \neg p$ by $\neg$, $\wedge$ and parentheses. Do not use neither $\Rightarrow$ nor $\vee$.)

解：$x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$ と $x \vee y \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y)$ および (a) で示したことを用いると

$$q \vee r \Rightarrow \neg p \equiv p \Rightarrow (\neg q \wedge \neg r) \equiv \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \equiv \neg(p \wedge \neg(\neg q \wedge \neg r)).$$

2. 頂点の数が 9 のグラフを考える。(Consider graphs on 9 vertices.) (25pts)

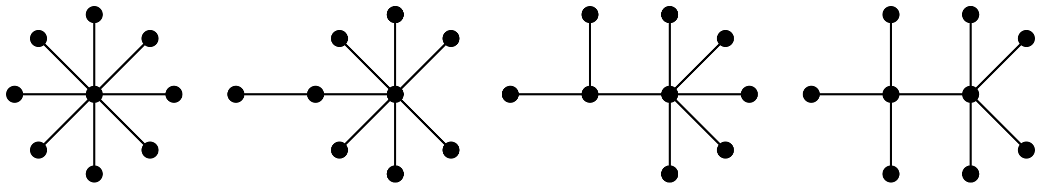
   (a) 各頂点の次数が $2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6$ であるようなグラフは存在しないことを、ていねいに説明せよ。(Explain why there is no graphs such that the degrees of vertices are $2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6$.)

   解：各頂点の次数の総和は $2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 = 37$ である。一方 Theorem 5.1 (i) によりそれは、辺の数の二倍であり、偶数である。37 は偶数ではないので矛盾である。したがって、そのようなグラフは存在しない。 ■

   別解: このグラフには、奇数次数の頂点が 5 個ある。これは Theorem 5.1 (ii) に反するので矛盾である。したがって、そのようなグラフは存在しない。 ■

(b) 各頂点の次数が $1,1,1,1,1,1,1,x,y$ であるような木は、何種類あるか。それらをすべて描き、それらがすべてであることを簡単に説明せよ。(How many trees are of degrees $1,1,1,1,1,1,1,x,y$? Draw them all and explain why.)

解：Theorem 6.1 より 9 点上の木には辺が 8 本ある。Theorem 5.1 (i) によって次数の総和は $2\cdot 8 = 16$ である。従って、$16 = 1+1+1+1+1+1+1+x+y$ より $x+y=9$ となる。$x \leq y$ とすれば $(x,y) = (1,8),(2,7),(3,6),(4,5)$ である。木は連結なので、次数が 1 以外の二頂点は隣接していることがわかる。したがって、以下の 4 通りである。



(c) (9 点上の) 6-正則グラフは何種類あるか。その理由も述べよ。(How many graphs are of 6-regular graphs with 9 vertices? Explain why.)

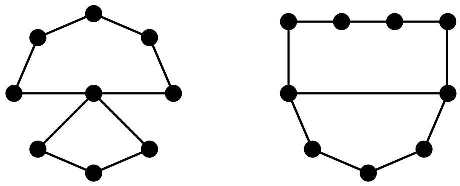
解：このグラフの補グラフは 9 点上の 2-正則グラフになる。n 点上の 連結な 2-正則グラフは $v \geq 3$ のときいつでも作れてそれは、n-角形だから、9 を 順序を考えずに、3 以上の自然数に書く書き方の数だけ存在する。これは

$$9 = 3+3+3 = 3+6 = 4+5.$$

の 4 通りである。これらは、9 角形、3 角形三つ、3 角形と 6 角形、4 角形と 5 角形に対応する。したがって、9 点上の 6-正則グラフは、これら 4 種類の 2-正則グラフの補グラフである。 ■

(d) (9 点上のグラフ) でオイラーグラフではあるがハミルトングラフではないものと、ハミルトングラフではあるがオイラーグラフではないものを一つずつ描き、それぞれが条件を満たすものであることを簡単に説明せよ。(Give two examples of graphs with 9 vertices. One is a Euler graph that is not a Hamilton graph, and the other is a Hamilton graph that is not a Euler graph.)

解：



左上のグラフは、連結ですべての頂点の次数が偶数なので、オイラーグラフである。しかし、真ん中の頂点を一点取り除くと、連結成分が 2 個になる。Theorem 7.3 より ハミルトングラフではない。

右上のグラフは次数が 3 の頂点を含むのでオイラーグラフではない。しかし、一周回ってもとにの取ることができるので、ハミルトングラフである。 ■

(e) (9 点上の) 連結な二部グラフを一つ描け。また (9 点上の) 二部グラフはどんなものであっても決してハミルトングラフにはならないことを説明せよ。(Draw an example of a connected bipartite graph with 9 vertices. Explain why every bipartite graph is non-Hamiltonian.)

解：木は閉路がないので、すべて二部グラフである。したがって、(b) のグラフはすべて二部グラフである。また (d) の左のグラフも二部グラフである。(右は違う）二部グラフの閉路はすべて長さが偶数である。(白・黒・白・黒として、最後白に戻るには、長さが偶数。Definition 8.3 参照) 9 頂点すべてを回ってもとに戻ると、閉路の長さは 9 でなければならない。従って、9 点上の二部グラフは、ハミルトングラフではない。 ■

3. 今年度 ELP は Program A が 11, Program B が 12, Program C が 5 のあわせて 28 のセクションに分かれている。このとき次の数を求めよ。どのように求めるかも簡単に説明せよ。${}_nC_m$ の値は計算しなくて良い。(This year there are 11 sections in ELP Program A, 12 in Program B and 5 in Program C, 28 sections in all. Answer the following number and explain why. No need to evaluate ${}_nC_m$.) (10pts)

   (a) 今年度 ELP を履修している学生から 50 人代表を集めて ELP の改革について話し合うことにした。各セクション一人は代表に入るとすると、50 人のセクション別の人数は何通り考えられるか。(How many varieties of numbers from sections are there to select 50 representatives to discuss ELP reform if at least one is from each section?)

   解：50 人の間 $50-1$ のうちに $28-1$ 個の 仕切りを入れる入れ方と同じなので、

$${}_{50-1}C_{28-1} = {}_{49}C_{27} = 49699896548176.$$

   または、i 番目のセクションまでのボランティアの数を b_i $(i = 1, 2, \ldots, 28)$ とすると、

$$1 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_{27} \le 49 < b_{28} = 50$$

   だから、1 から 49 の自然数の中から 27 個選べばそれが、$b_1, b_2, \ldots, b_{27}$ となり、代表のセクションごとのわかれ方が一つ対応している。 ■

   (b) 今年度ELP を履修している学生のうち 50 人が日本語の summer program に conversation partner として参加したとする。セクション別の人数は何通り考えられるか。一人も参加しなかったセクションがある可能性もある。(How many varieties of numbers from sections are there if 50 ELP students served as conversational partner in Japanese Summer Program. There may be some sections with no volunteers.)

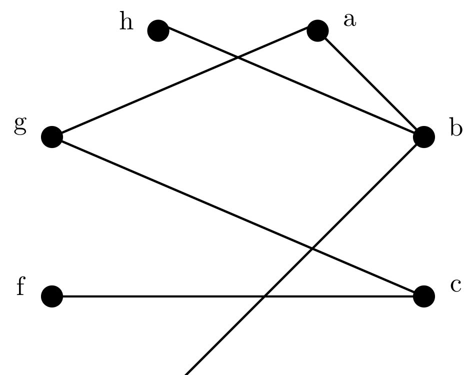
   解：$28-1$ 石をまぜておく考え方から、石がどこに来るかを考えて

$${}_{50+28-1}C_{28-1} = {}_{77}C_{27} = 4383877177635375007\,28.$$

   または、i 番目のセクションまでのボランティアの数を c_i $(i = 1, 2, \ldots, 28)$ とすると、$0 \le c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_{27} \le c_{28} = 50$ となる。これらに、$1, 2, \ldots, 27$ を足せば、$1 \le c_1 + 1 < c_2 + 2 < \cdots < c_{27} + 27 \le 77 < c_{28} + 28 = 78$ となるので、$1, 2, \ldots, 77$ から 26 個えらぶ数と対応している。■

4. a, b, c, d, e, f, g, h を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、その最小の費用はいくらか。そのネットワークも図示せよ。（単位は万円）(Find the least expensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h indirectly using the table below. Draw the network and give its total cost. (1 unit = 10,000 JPY)) (10pts)

	h	g	f	e	d	c	b
a	4	1	3	2	3	3	1
b	2	1	3	1	3	4	
c	3	1	2	4	4		
d	2	2	3	1			
e	2	1	3				
f	3	3					
g	4						



合計 (Total)： 9 万円

5. Γ は 12 頂点からなる連結な 4-正則グラフであるとする。また Γ は平面グラフに描くことができ、各面は三辺形または四辺形とする。 (Γ is a connected 4-regular graph with 12 vertices. It is a planar graph such that every face is either 3-gon or 4-gon.) (8pts)

   (a) Γ の辺および面の総数はそれぞれいくつか。(Compute the number of edges and faces.)

   解：辺の数を e, 面の数を f とする。12 頂点の 4 正則グラフだから、Theorem 5.1 (iii) より $2e = 4 \cdot 12 = 48$ だから $e = 24$。

   連結な平面グラフだから Theorem 8.1 より $f = 2 - v + e = 2 - 12 + 24 = 14$。従って、辺の数は 24 で面の数は 14 である。 ■

   (b) Γ の面で 3 辺形となっているものはいくつあるか。(How many 3-gonal faces are there in the graph?)

   解：面の数は 14 だから 3 辺形の数を x とすると、4 辺形の数は $14-x$ となる。ここで Proposition 8.2 (ii) を用いると、

$$3x + 4(14 - x) = 2e = 48.$$

   これより、$x = 4 \cdot 14 - 48 = 8$。従って 3 辺で囲まれた面の数は 8 である。 ■

6. Γ を連結な平面的な二部グラフとする。このとき、Γ には、必ず次数が 3 以下の頂点があることを説明してください。 (Let Γ be a connected bipartite planar graph. Show that Γ has at least one vertex with degree at most 3.) (7pts)

   解：次数が 3 以下の頂点があることを示すのだから、頂点の数が 5 以上だとして良い。頂点の数を v とする。すべての次数が 4 以上だとして矛盾を導く。まず、頂点を $x_1, x_2, \ldots, x_v$ とすると、$\deg(x_1) \geq 4, \deg(x_2) \geq 4, \ldots, \deg(x_v) \geq 4$ となる。Theorem 5.1 (i) (Proposition 8.2 (i) も同じ) によって、辺の数を e とすると、

$$2e = \deg(x_1) + \deg(x_2) + \cdots + \deg(x_v) \geq 4v.$$

   したがって、$v \leq e/2$ となる。また、頂点数が 5 以上だから、各面は 3 本以上の辺で囲まれている。しかし、このグラフは二部グラフだから閉路の長さは偶数である。したがって、各面は 4 本以上の辺で囲まれている。ここで面 $F_1, F_2, \ldots, F_f$ は $n_1, n_2, \ldots, n_f$ 本で囲まれているとすると、$n_1 \geq 4, n_2 \geq 4, \ldots, n_f \geq 4$ である。したがって、Proposition 8.2 (ii) より

$$2e = n_1 + n_2 + \cdots + n_f \geq 4f$$

   を得る。したがって、$f \leq e/2$。ここでオイラーの公式 (Theorem 8.1) を用いると、

$$2 = v - e + f \leq \frac{e}{2} - e + \frac{e}{2} = 0.$$

   これは矛盾である。したがって、次数が 3 以下の頂点が必ず存在する。 ■

7. 「数学の世界」の授業は 27 時間あり、毎時間最低 1 問は問題を考える。ただし、全部で、51 問は越さないものとする。 (There are total of 27 periods this year for World of Mathematics. In each period one problem is discussed and the total does not exceed 51.) (10pts)

   (a) ちょうど 1 問考えた時間があることをていねいに説明して下さい。(Explain in detail why there is a period only one problem is discussed.)

   解：鳩ノ巣原理の Variation 2 を用いる。それぞれの時限が $m = 27$ の鳩ノ巣で、そこに $n = 51$ 羽の鳩が入るとする。

$$n = 51 < 2 \cdot 27 = k \cdot m$$

   だから、ある時間には、1 問以下しか考えないことがわかる。しかし仮定より最低 1 問は考えるのだから、ちょうど一問考える時限があることになる。 ■

(b) ちょうど 25 問考えた時があることを説明して下さい。(Hint: 25 時間目までに最大何問考えたかをまず考える。) (Explain that there is a certain consecutive periods the class discussed exactly 25 problems. (Hint: First consider how many problems were discussed in the first 25 periods.)

解：まず、一時限で必ず 1 問は考えるのだから、26 時限目、27 時限目あわせれば 2 問は最低考えることになる。最大で 51 問なのだから、25 時限目までに考える問題数は最大で 49 問となる。さて、j 時限目までに考える問題の総数を $j = 0, 1, 2, \ldots, 25$ に対して、$b_0, b_1, \ldots, b_{25}$ とする。上で述べたことから

$$0 = b_0 < b_1 < \cdots, < b_{25} \leq 49$$

である。これら 26 個の数 $b_0, b_1, \ldots, b_{25}$ を 25 で割ったあまりを考える。あまりは、0 から 24 の 25 通りだから、必ずあまりが同じペアが存在する。一つを b_i もうひとつを b_j とする。あまりが同じだから、$b_i = 25p + r$, $b_j = 25q + r$ となる数 p, q をとることができる。$j > i$ とすると、j 時限までに考えた問題の方が i 時限までに考えた問題数より多いから、$b_j > b_i$ である。したがって

$$0 < b_j - b_i = (25q + r) - (25p + r) = 25(q - p)$$

となりこれは、25 の倍数で、$b_{25} \leq 49$ よりも小さいから、$b_j - b_i = 25$ であることがわかる。これは、$i + 1$ 時限目から j 時限目までちょうど 25 問考えたことを意味している。 ■

8. $1 + 3 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ 個のおもりに一つだけ重さが違っている不良品がまざっているが、それが重いか軽いかはわからない。また 3^n 個の正しいおもりが別にある。天秤を $n+1$ 回使うと、その不良品を発見できることを <u>数学的帰納法を用いて</u> 説明してください。ただし、次の事実は用いて良い。(Prove by Mathematical Induction that one can find the incorrect weight among $1 + 3 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ weights by using a balance $n + 1$ times if only one is an incorrect weight and there are 3^n other correct weights besides those above. You can use the following fact.) (10pts)

> 「3^n 個 ($n = 1, 2, \ldots$) のおもりに一つだけ重さが違っている不良品がまざっているが、その不良品が重いか軽いかはわかっている。このとき、天秤を n 回使うと、その不良品を発見できる。」(If there are 3^n weights including exactly one incorrect weight which is known to be either lighter or heavier, then one can find the incorrect weight by using a balance n times.)

解：$n = 1$ のときは、一つ不良品が混じった 4 個のおもりと 3 個の正しいおもりがあることになる。4 個のうちの 3 個をとり、正しいものと天秤にかける。釣り合えば、残りの一個が不良品。どちらかが下がれば、その 3 個の中に不良品があり、それは、軽いか重いかも同時にわかるので、上のことからあと 1 回天秤を使うことで不良品を見つけることができる。したがって、合計で $n + 1 = 2$ 回でいずれにしても、不良品を見つけることができる。

$n = k$ のときは、$k + 1$ 回で見つけることができると仮定する。すなわち「$1 + 3 + \cdots + 3^k$ 個のおもりに一つだけ重さが違っている不良品がまざっている。また 3^k 個の正しいおもりが別にある。このとき、天秤を $k + 1$ 回使うとその不良品を発見できる」と仮定する。$n = k + 1$ のときは、3^{k+1} 個のおもりと、正しい 3^{k+1} 個のおもりを天秤に載せる。どちらかが下がれば、これら 3^{k+1} 個のおもりのなかに不良品がありかつそれが重いか軽いかもわかる。従って、上のことからあと $k + 1$ 回天秤を使って、不良品を見つけることができる。合計で、$k + 2 = (k + 1) + 1 = n + 1$ 回である。

さて釣り合ったときは、のこりの $1 + 3 + \cdots + 3^k$ 個のおもりの中に不良品があることがわかる。同時に、3^{k+1} 個正しいおもりがあるのだからそのなかから 3^k をとれば、帰納法の仮定により、$k + 1$ 回で不良品を見つけられることがわかった。合計でこの場合も $n + 1$ 回である。

いずれの場合も、不良品を $n + 1$ 回で見つけることができることがわかったので、数学的帰納法の原理により、すべての自然数 n について上のことが成立することがわかった。 ■