Quiz 1

(*Due at 1:30 p.m. on Fri. Sept. 13, 2002*)

Division: **ID#:** **Name:**

$$(A)\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & = & \sqrt{3} \\ 5x_1 & - & 4x_2 & = & \sqrt{3} \end{array}\right. ,\quad (B)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 7 \end{array}\right.$$

1. (A), (B) それぞれの連立一次方程式の拡大係数行列を求めよ。(Find the augumented matrix of each of (A) and (B).) [Solutions only!]

2. 上でもとめた拡大係数行列に行に関する基本変形をほどこして、既約ガウス行列に変形せよ。(Use elementary row operations to find a reduced row-echelon form of each!) [Show work!]

3. 既約ガウス行列を用いて、(A), (B) それぞれの解を求めよ。(Use 2 to find solutions for (A) and (B).) [Solutions only!]

Message 欄（裏にもどうぞ）：この授業に期待すること。要望。自分にとって数学とは。

Solutions to Quiz 1

(*Sept. 13, 2002*)

1. (A), (B) それぞれの連立一次方程式の拡大係数行列を求めよ。(Find the augumented matrix of each of (A) and (B).) [Solutions only!]

$$(A)\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & \sqrt{3} \\ 5 & -4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \qquad (B)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

2. 上でもとめた拡大係数行列に行に関する基本変形をほどこして、既約ガウス行列に変形せよ。(Use elementary row operations to find a reduced row-echelon form of each!) [Show work!]

$$(A)\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & \sqrt{3} \\ 5 & -4 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & \sqrt{3}/3 \\ 5 & -4 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & -2/3 & -2\sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -2/3 & -2\sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

$$(B)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix}.$$

Reduced row-echelon form (既約ガウス行列)

(a) If a row (行：横) does not consist entirely of zeros, then the first nonzero number in the row is a 1. (We call this a *leading* 1.) [それぞれの行の一番左にある 1 のこと]

(b) If there are any rows that consist entirely of zeros, then they are grouped together at the bottom of the matrix. [(A), (B) の例では存在しない]

(c) In any two successive rows that do not consist entirely of zeros, the leading 1 in the lower row occurs farther to the right than the leading 1 in the higher row. [先頭の 1 の位置が右にずれていきます]

(d) Each column (列：縦) that contains a leading 1 has zeros everywhere else. [(A) では 1、2、3 列目、(B) では 1、3、4 列目では、先頭の 1 以外すべて 0 になっています]

3. 既約ガウス行列を用いて、(A), (B) それぞれの解を求めよ。(Use 2 to find solutions for (A) and (B).) [Solutions only!]

$$(A)\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad (B)\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ 7/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(t is a free parameter.)

Quiz 2

(*Due at 1:30 p.m. on Fri. Sept. 20, 2002*)

Division: **ID#:** **Name:**

A、B をそれぞれ連立一次方程式の拡大係数行列とする。(Let A and B be augumented matrices of systems of linear equations.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. A の階数はいくつか。(Find the rank of A.) Show work!

2. 定理 2.1 を用い A を拡大係数行列とする連立一次方程式が解を持つかどうかを判定せよ。理由ものべよ。(Apply Theorem 2.1 to determine whether the system of linear equations whose augmented matrix is A has a solution or not, and explain.)

3. B を拡大係数行列とする連立一次方程式の解を求めよ。(Find the solution of a system of linear equations whose augmented matrix is B.)

Message 欄（裏にもどうぞ）：将来の夢、25 年後の自分について、世界について等々、何でもどうぞ。

Solutions to Quiz 2

(*Sept. 20, 2002*)

1. A の階数はいくつか。(Find the rank of A.) Show work!

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/7 & 0 \\ 0 & 1 & -4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

すべては (すべての成分 (entry) と言います) 零ではない行の数は 3 ですから $\mathrm{rank}(A) = 3$ となります。[注：階数の定義は既約ガウス行列の零でない行の数としていますから、定義通りに求めるには最後まで求めてから求めないと不完全です。しかし、行に関する基本変形を考えれば、実際には 3 番目の行列まで求めれば、階数は 3 であることが分かります。これ以上どんな行の変形でもすべてが零の行を作ることが無理なことは明らかでしょう。(説明を考えてみて下さい。) この 3 番目の様な行列を階段行列、各行の最初を 1 にした 4 番目の行列をガウス行列 (row echelon form) と呼びます。ただ、あまり言葉が増えると混乱も生じるので、授業では最少限に絞っています。この問題の様に、既約ガウス行列にすることを求められていなければ、これからは、最後まで変形せずに求めて構いません。ただ、Show work! と書いてある時に、2 番目の行列あたりで答を書かれるとちょっと困りますが。そのへんは自分で判断して下さい。]

2. 定理 2.1 を用い A を拡大係数行列とする連立一次方程式が解を持つかどうかを判定せよ。理由ものべよ。(Apply Theorem 2.1 to determine whether the system of linear equations whose augmented matrix is A has a solution or not, and explain.)

係数行列を C とすると、1 での計算から、

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/7 \\ 0 & 1 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となりますから、$\mathrm{rank}(C) = 2$。前問より拡大係数行列の階数は $\mathrm{rank}(A) = 3$ で、連立一次方程式の拡大係数行列と係数行列の階数が一致しないから、定理 2.1 より A を拡大係数行列とする連立一次方程式は解を持たない。[注：1 で変形した最後の形をみると、$0 = 1$ となっていますから、解が存在しないことは明らかです。しかし、これから実際の連立方程式からはなれて、行列または行列方程式の一般論として扱う利点がたくさんあるので、階数の形での解の存在定理はしっかりと理解して下さい。授業でも言いましたが、拡大係数行列と、係数行列の階数が一致するときに解をもつと言う方はきちんと証明しませんでした。これは、もうすこし後になって、行列のことを使えるようになってからもう一度、戻った方がはっきりするからです。しかし、同次 (homogeneous) の場合は、すでに解を書き上げる方法を示しましたから、それを真似して、一般の場合も解を書き上げることに挑戦してみて下さい。Quiz 1 の問題や、教科書の問題などを参考にして下さい。]

3. B を拡大係数行列とする連立一次方程式の解を求めよ。(Find the solution of a system of linear equations whose augmented matrix is B.)

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ とする。先頭の 1 はそれぞれ、第 2, 5, 7, 8 列にあるから、それ以外の列に対応する変数をパラメターとする。すなわち、$x_1 = t_1$, $x_3 = t_2$, $x_4 = t_3$, $x_6 = t_4$ とすると、下を得る。

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x_2 & & & & +3t_2 & -2t_3 & +3t_4 & = & 0 \\ & x_5 & & & +5t_2 & & & = & 0 \\ & & x_7 & & & & & = & 0 \\ & & & x_8 & & & & = & 0 \end{array}\right., \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ -3t_2 + 2t_3 - 3t_4 \\ t_2 \\ t_3 \\ -5t_4 \\ t_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

t_1, t_2, t_3, t_4 は自由変数 (free parameters)。[注：一組の $s_1, s_2, \ldots, s_n$ で $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に代入すると $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とする（いくつかの）方程式を満たすものを解 (solution) といいますが、解は一組とは限らないので、正確には、解集合 (the solution set) を求めるという言い方の方が正確です。解がない時は「解集合は空である (The solution set is empty.)」とか「解集合は空集合 (empty set) である」という言い方をします。この様な言葉使いもだんだん慣れていきましょう。ただ、集合については、全く勉強していない人もいると思いますので、基本的には使いません。一応、上の場合の解集合を書いておきます。]

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ -3t_2 + 2t_3 - 3t_4 \\ t_2 \\ t_3 \\ -5t_4 \\ t_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} t_1, t_2, t_3, t_4 \text{ は任意の実数} \\ (t_1, t_2, t_3, t_4 \text{ are reals.}) \end{array} \right\}$$

Quiz 3

(*Due at 1:30 p.m. on Fri. Sept. 27, 2002*)

Division: **ID#:** **Name:**

1. a, b, c を実数 (real numbers)、X, A, B, C を下のような行列 (matrices) とするとき、以下の行列を計算せよ。(Evaluate the following.)

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) $AX =$

   (b) $BX =$

   (c) $CX =$

2. V を (i,j) 成分が $v_{i,j}$ である 5×5 行列。W を (i,j) 成分が $w_{i,j}$ である 5×10 行列とする。このとき、次のそれぞれを $\sum$ を用いない式と、用いる式、二通りで表せ。(Let $V = (v_{i,j})$ be a 5×5 matrix and let $W = (w_{i,j})$ be a 5×10 matrix. Express the following in two ways, one without $\sum$ symbol and one with $\sum$ symbol.)

   (a) $V \cdot W$ の $(5,2)$ 成分。($(5,2)$ entry of $V \cdot W$.)

   (b) $V^t \cdot W - 3W$ の $(2,7)$ 成分。($(2,7)$ entry of $V^t \cdot W - 3W$, where t denotes transpose.)

Message 欄（裏にもどうぞ）： あなたにとって一番たいせつな（または、たいせつにしたい）もの、ことはなんですか。そのほか、何でもどうぞ。

Solutions to Quiz 3

(*Sept. 27, 2002*)

1. a, b, c を実数 (real numbers)、X, A, B, C を下のような行列 (matrices) とするとき、以下の行列を計算せよ。(Evaluate the following.)

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) $$AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \end{bmatrix}.$$

(b) $$BX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ ax_{2,1} & ax_{2,2} & ax_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}$$

(c) $$CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ bx_{1,1}+x_{2,1} & bx_{1,2}+x_{2,2} & bx_{1,3}+x_{2,3} \\ cx_{1,1}+x_{3,1} & cx_{1,2}+x_{3,2} & cx_{1,3}+x_{3,3} \end{bmatrix}$$

行列 A, B, C を左から X にかけることは X の行に関する変形をひきおこしています。A では、第 1 行と第 3 行の入れ換え、B では第 2 行を a 倍、C では 第 1 行の b 倍を第 2 行に加え、第 1 行の c 倍を第 3 行に加えています。A を左からかける変形は行に関する基本変形の一つ。$a \neq 0$ のときは、B を左からかける変形も行に関する基本変形の一つです。($a = 0$ のときは基本変形とは言わないことに注意して下さい。) $b = 0$ または $c = 0$ のときは、C を左からかける変形も行に関する基本変形の一つになっています。C を二つの行列 C_1、C_2 の積で、それぞれが、行に関する基本変形をひきおこすようなものに表すことができますか。左からかけると行に関する基本変形をひきおこす行列を基本行列といいます。すべての行に関する基本変形はその行列に左から基本行列をかけることにより得られます。これは第 5 回目の授業のトピックのカギとなるものです。さて、A, B, C を X の「右」からかけるとどうなるでしょうか。

2. V を (i, j) 成分が $v_{i,j}$ である 5×5 行列。W を (i, j) 成分が $w_{i,j}$ である 5×10 行列とする。このとき、次のそれぞれを $\sum$ を用いない式と、用いる式、二通りで表せ。(Let $V = (v_{i,j})$ be a 5×5 matrix and let $W = (w_{i,j})$ be a 5×10 matrix. Express the following in two ways, one without $\sum$ symbol and one with $\sum$ symbol.)

(a) $V \cdot W$ の $(5, 2)$ 成分。($(5, 2)$ entry of $V \cdot W$.)

$$v_{5,1}w_{1,2} + v_{5,2}w_{2,2} + v_{5,3}w_{3,2} + v_{5,4}w_{4,2} + v_{5,5}w_{5,2} = \sum_{i=1}^{5} v_{5,i}w_{i,2}.$$

(b) $V^t \cdot W - 3W$ の $(2, 7)$ 成分。($(2, 7)$ entry of $V^t \cdot W - 3W$, where t denotes transpose.)

$$v_{1,2}w_{1,7} + v_{2,2}w_{2,7} + v_{3,2}w_{3,7} + v_{4,2}w_{4,7} + v_{5,2}w_{5,7} - 3w_{2,7} = \left(\sum_{i=1}^{5} v_{i,2}w_{i,7}\right) - 3w_{2,7}.$$

最後はかっこをつけなくても正解としますが、$\sum_{i=1}^{5}(v_{i,2}w_{i,7} - 3w_{2,7})$ はまったく別のものになります。分かりますか。それを区別するためかっこを用います。

Quiz 4

(Due at 1:30 p.m. on Fri. Oct. 4, 2002)

Division: **ID#:** **Name:**

$$(A)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ x & + & 3y & + & 4z & = & b \\ x & + & 4y & + & 4z & = & c \end{array}\right. \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. x, y, z に関する連立一次方程式 (A) の係数行列の逆行列を求めよ。途中経過も記せ。(Find the inverse matrix of the coefficient matrix of (A). Show work!)

2. 前の問題の答を利用して、(A) の解 x, y, z を a, b, c を用いて表せ。(Express the solution x, y, z of (A) by a, b, c using the problem 1.)

3. 行列 B は可逆（正則行列）であるかどうか判定し、理由ものべよ。(Determine if the matrix B is invertible (a nonsingular matrix) and explain.)

Message 欄（裏にもどうぞ）：パソコンや携帯電話など便利なものがどんどん普及していますが、これらは生活を豊にしているのでしょうか。便利なものとどうつき合っていくのが良いのでしょうか。その他なんでもどうぞ。

Solutions to Quiz 4

(*Oct. 4, 2002*)

1. x, y, z に関する連立一次方程式 (A) の係数行列の逆行列を求めよ。途中経過も記せ。(Find the inverse matrix of the coefficient matrix of (A). Show work!)

   (A) の係数行列を C とする。3×6 行列 $[C, I]$ に行に関する基本変形を施して、既約ガウス行列にする。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. 前の問題の答を利用して、(A) の解 x, y, z を a, b, c を用いて表せ。(Express the solution x, y, z of (A) by a, b, c using the problem 1.)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a - 4b + c \\ -b + c \\ -a + 2b - c \end{bmatrix}.$$

3. 行列 B は可逆（正則行列）であるかどうか判定し、理由ものべよ。(Determine if the matrix B is invertible (a nonsingular matrix) and explain.)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   したがって $\mathrm{rank}(B) = 4$ これは、B の行列のサイズと等しいので、定理 4.2 より B は可逆である。実際に逆行列をみつけて、可逆であることを示す方法もありますが、可逆かどうかだけを判断するなら、階数 (rank) の計算のほうがずっと簡単なのは明らかでしょう。また最後のステップはたくさんのことをしてしまったように見えますが、第 4 列、第 3 列、第 2 列の順番で消していけば、簡単に最後が得られることがわかります。最後の行列は、既約ガウス行列 (reduced echelon form) ですが、最後から 2 番目のものは、単にガウス行列 (echelon form) と呼びます。ガウス行列まで求まっていれば、階数は簡単に分かりますから、最後の形までしなくても問題ありません。

TAKE-HOME **Midterm** (*Due at 1:30 p.m. on Tues. Oct. 15, 2002*)

Division: **ID#:** **Name:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & -1 & b \\ 1 & 1 & -1 & -1 & c \\ 3 & 1 & 1 & -1 & d \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{a-c}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{3a-d}{2} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}.$$

1. 行列 B は、行列 A に行に関する基本変形を何回か施して得られたものである。$B = CA$ となる 4 次可逆（正則）行列 C を求めよ。(The matrix B is obtained by a sequence of elementary row operations to the matrix A. Find an invertible (nonsingular) matrix C of size 4 such that $B = CA$.)

2. $\boldsymbol{x}$ が A を拡大係数行列とする連立一次方程式の解であることと、$\boldsymbol{x}$ が B を拡大係数行列とする連立一次方程式の解であることとは同値であることを証明せよ。(Prove the following: $\boldsymbol{x}$ is a solution to the system of linear equations defined by the augmented matrix A if and only if $\boldsymbol{x}$ is a solution to that defined by the augmented matrix B.)

3. 行列 A を拡大係数行列とする連立一次方程式が解を持つとき、d を a, b, c で表せ。(Express d by a, b and c when the system of linear equations defined by the augmented matrix A has at least one solution.)

Division: **ID#:** **Name:**

4. 3 で求めた条件を d が満たす時、A を拡大係数行列とする連立一次方程式の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ。(Suppose d satisfies the condition in Problem 3. Find the solution $\boldsymbol{x}$ of the system of linear equations defined by the augmented matrix A.)

5. 3 で求めた条件を d が満たす時、A を 係数行列 とする 斉次 連立一次方程式の解 $\boldsymbol{y}$ を求めよ。(Suppose d satisfies the condition in Problem 3. Find the sotution $\boldsymbol{y}$ of the *homogeneous* system of linear equations whose *coefficient matrix* is A.)

6. 下の行列 D の逆行列があれば求めよ。なければない理由を述べよ。(Find the inverse of the matrix D if any. If there is no inverse, justify your answer.)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Message 欄（裏にもどうぞ）: (a) 結婚について、家庭について、子供について。
(b) ここまでのこの授業について。

Solutions to Midterm

(*Tues. Oct. 15, 2002*)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & -1 & b \\ 1 & 1 & -1 & -1 & c \\ 3 & 1 & 1 & -1 & d \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{a-c}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{3a-d}{2} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}.$$

1. 行列 B は、行列 A に行に関する基本変形を何回か施して得られたものである。$B = CA$ となる 4 次可逆（正則）行列 C を求めよ。(The matrix B is obtained by a sequence of elementary row operations to the matrix A. Find an invertible (nonsingular) matrix C of size 4 such that $B = CA$.)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & -2 & -2 & c-a \\ 0 & -2 & -2 & -4 & d-3a \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

第一段階として、A の第 2 行から第 1 行を引き、第 3 行から第 1 行を引き、第 4 行から第 1 行の 3 倍を引くと行列 E が得られる。第二段階として、E の第 2、3、4 行に $-1/2$ をかけると行列 B を得る。第一段階は行列 S を A に左からかけることにより E が得られることを意味し、第二段階は行列 T を E に左からかけることにより得られるから、$B = TE = T(SA) = (TS)A$、したがって、$C = TS$ とすればよい。授業での記号を用いるとさらに下のようになる。

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} && (1) \\ &= P(4; -\tfrac{1}{2})P(3; -\tfrac{1}{2})P(2; -\tfrac{1}{2})P(4, 1; -3)P(3, 1; -1)P(2, 1; -1). && (2) \end{aligned}$$

C は可逆行列の積ですから可逆行列になります。実際

$$C^{-1} = P(2, 1; 1)P(3, 1; 1)P(4, 1; 3)P(2; -2)P(3; -2)P(4; -2)$$

となります。理由は分かりますか。また

$$S = P(4, 1; -3)P(3, 1; -1)P(2, 1; -1),\ T = P(4; -\tfrac{1}{2})P(3; -\tfrac{1}{2})P(2; -\tfrac{1}{2})$$

となっています。S の表示に現れる 3 つの基本行列は可換（順番を入れ換えても積の結果は同じ）で、T の表示に現れる 3 つの基本行列も可換です。さて、$C = ST$ でしょうか？ ここで見つけた C 以外にも $B = CA$ を満たす可逆行列はあるでしょうか。(As a first step, subtract the first row from the second and the third row, and subtract three times the first row from the fourth row, one can obtain the matrix E. As a second step, multiply $-1/2$ to the second, the third, and the fourth row, one obtains B. The first step can be made by multiplying the matrix A by S from the left, and E by T as the second step. Thus $B = TE = T(SA) = (TS)A$. So we may take $C = TS$ as in (1). C also can be expressed as a product of elementary matrices. See (2). What can we obtain if we start from $[A, I]$ and end up with $[B, X]$ for some matrix X?)

2. $\boldsymbol{x}$ が A を拡大係数行列とする連立一次方程式の解であることと、$\boldsymbol{x}$ が B を拡大係数行列とする連立一次方程式の解であることとは同値であることを証明せよ。(Prove the following: $\boldsymbol{x}$ is a solution to the system of linear equations defined by the augmented matrix A if and only if $\boldsymbol{x}$ is a solution to that defined by the augmented matrix B.)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix},\ \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} a \\ \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-c}{2} \\ \frac{3a-d}{2} \end{bmatrix}.$$

とする。$B_1 = CA_1$、$\boldsymbol{f} = C\boldsymbol{e}$ に注意すると、C が可逆行列であることから、両辺に C^{-1} を左からかけると、$C^{-1}B_1 = A_1$、$C^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}$ となります。$\boldsymbol{x}$ が A を拡大係数行列とする連立一次方程式の解であることは、$A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}$ と表すことができます。同様にして、$\boldsymbol{x}$ が B を拡大係数行列とする連立一次方程式の解であることは、$B_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$。さて、$A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}$ とすると、両辺に C を左からかけて、$B_1\boldsymbol{x} = CA_1\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f}$。逆に、$B_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ と仮定すると両辺に C^{-1} を左からかけて、$A_1\boldsymbol{x} = C^{-1}B_1\boldsymbol{x} = C^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}$ となる。このことは、$A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e} \Leftrightarrow B_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ を意味する。(Let A_1, B_1, $\boldsymbol{e}$, and $\boldsymbol{f}$ be as above. Then we have $B_1 = CA_1$, and $\boldsymbol{f} = C\boldsymbol{e}$. Since C is nonsingular, $C^{-1}B_1 = A_1$ and $C^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}$. Now $\boldsymbol{x}$ is a solution to the system of linear equations whose augmented matrix is A is equivalent to have $A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}$. Similarly, for B, $B_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$. Now we have the following.

$$A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e} \Rightarrow CA_1\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{e} \Rightarrow B_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \Rightarrow C^{-1}B_1\boldsymbol{x} = C^{-1}\boldsymbol{f} \Rightarrow A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}.$$

Thus we have shown the equivalence.)

3. 行列 A を拡大係数行列とする連立一次方程式が解を持つとき、d を a, b, c で表せ。(Express d by a, b and c when the system of linear equations defined by the augmented matrix A has at least one solution.)

$A \to B$ に続けて行に関する基本変形を施す。

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{a-c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2a+b-d}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{a-c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a+b+c-d}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{b+c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{a-c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a+b+c-d}{2} \end{bmatrix}$$

上の変形から係数行列の階数は 3。拡大係数行列の階数も 3 となるためには、$a + b + c - d = 0$ でなければならないから、$d = a + b + c$ となる。(Observe the last matrix in reduced echelon form. The condition for a system of linear equations to have a solution is that the rank of the augmented matrix coinsides the rank of the coefficient matrix. The rank of the matrix consisting of the first four columns is three. So in order for the rank of the whole matrix to be three, $a + b + c - d = 0$ or $d = a + b + c$.)

4. 3 で求めた条件を d が満たす時、A を拡大係数行列とする連立一次方程式の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ。(Suppose d satisfies the condition in Problem 3. Find the solution $\boldsymbol{x}$ of the system of linear equations defined by the augmented matrix A.)

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{b+c}{2} \\ -s + \frac{a-b}{2} \\ -s + \frac{a-c}{2} \\ s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b+c}{2} \\ \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-c}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

s は自由変数。(s is a free parameter.)

5. 3 で求めた条件を d が満たす時、A を 係数行列 とする 斉次 連立一次方程式の解 $\boldsymbol{y}$ を求めよ。(Suppose d satisfies the condition in Problem 3. Find the sotution $\boldsymbol{y}$ of the *homogeneous* system of linear equations whose *coefficient matrix* is A.)

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - \frac{b+c}{2}t \\ -s - \frac{a-b}{2}t \\ -s - \frac{a-c}{2}t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{b+c}{2} \\ -\frac{a-b}{2} \\ -\frac{a-c}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

s, t は自由変数。4 と 5 の関係はどうなっているでしょうか。4 は 5 の特別な場合として求められませんか。(s and t are free parameters. In this case the unknowns corresponding to the last two columns can be chosen for free paremeters. x_1, x_2, x_3, x_4 in the previous problem can be obtained from y_1, y_2, y_3, y_4 if we take a special value for t. What is it?)

6. 下の行列 D の逆行列があれば求めよ。なければない理由を述べよ。(Find the inverse of the matrix D if any. If there is no inverse, justify your answer.)

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{array}\right], \text{ 従って } D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \\ \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Quiz 5

(*Due at 1:30 p.m. on Fri. Oct. 18, 2002*)

Division: **ID#:** **Name:**

1. 順列 $\rho = (7, 2, 5, 6, 1, 3, 4)$ の追い越し数 $\ell(\rho)$ とその符号 $\mathrm{sgn}(\rho)$ を求めよ。(Let $\rho = (7, 2, 5, 6, 1, 3, 4)$ be a permutation. Find the number of inversions $\ell(\rho)$ and its sign $\mathrm{sgn}(\rho)$.)

2. 次の行列式の値を求めよ。(Evaluate the following determinant.)

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

3. 足りない項をたして等式を完成せよ。(Add missing terms to equate the following.)

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = a_1b_2c_3d_4 - a_1b_2d_3c_4 - a_1c_2b_3d_4 + a_1c_2d_3b_4 + a_1d_2b_3c_4$$

$$-a_1d_2c_3b_4 - b_1a_2c_3d_4 + b_1a_2d_3c_4 + b_1c_2a_3d_4 - b_1c_2d_3a_4 - b_1d_2a_3c_4 + b_1d_2c_3a_4$$

Message 欄 (裏にもどうぞ)：ノーベル賞など最近のできごとから。その他、何でもどうぞ。

Solutions to Quiz 5

(*Oct. 18, 2002*)

1. 順列 $\rho = (7,2,5,6,1,3,4)$ の追い越し数 $\ell(\rho)$ とその符号 $\mathrm{sgn}(\rho)$ を求めよ。(Let $\rho = (7,2,5,6,1,3,4)$ be a permutation. Find the number of inversions $\ell(\rho)$ and its sign $\mathrm{sgn}(\rho)$.)

   $\rho = (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6, j_7) = (7,2,5,6,1,3,4)$ ですから、

$$\begin{aligned}
\ell(\rho) &= \ell((7,2,5,6,1,3,4)) \\
&= |\{(r,s) \mid 1 \leq r < s \leq 7,\ j_r > j_s\}| \\
&= |\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,5), \\
&\qquad (3,5),(3,6),(3,7),(4,5),(4,6),(4,7)\}| \\
&= 13. \\
\mathrm{sgn}(\rho) &= (-1)^{\ell(\rho)} \ = \ (-1)^{13} = -1.
\end{aligned}$$

   あみだくじで ρ の置換を実現するもの、すなわち 1 の下に 7、2 の下に 2、3 の下に 5、$\cdots$、7 の下に 4 が来るようなものを作れますか。いろいろなものが作れますが、横棒の数の最低は 13 本となります。そのようなものを作れますか。なぜ最低が 13 本だか分かりますか。

2. 次の行列式の値を求めよ。(Evaluate the following determinant.)

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & 10 \end{bmatrix} = -60 + 30 - 56 + 105 - 16 + 60 = 63.$$

3. 足りない項をたして等式を完成せよ。(Add missing terms to equate the following.)

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = a_1b_2c_3d_4 - a_1b_2d_3c_4 - a_1c_2b_3d_4 + a_1c_2d_3b_4 + a_1d_2b_3c_4$$

$$-a_1d_2c_3b_4 - b_1a_2c_3d_4 + b_1a_2d_3c_4 + b_1c_2a_3d_4 - b_1c_2d_3a_4 - b_1d_2a_3c_4 + b_1d_2c_3a_4$$

$$+c_1a_2b_3d_4 - c_1a_2d_3b_4 - c_1b_2a_3d_4 + c_1b_2d_3a_4 + c_1d_2a_3b_4 - c_1d_2b_3a_4$$

$$-d_1a_2b_3c_4 + d_1a_2c_3b_4 + d_1b_2a_3c_4 - d_1b_2c_3a_4 - d_1c_2a_3b_4 + d_1c_2b_3a_4.$$

ρ	sgn	term	ρ	sgn	term	ρ	sgn	term
(1234)	$+1$	$+a_1b_2c_3d_4$	(1243)	-1	$-a_1b_2d_3c_4$	(1324)	-1	$-a_1c_2b_3d_4$
(1342)	$+1$	$+a_1c_2d_3b_4$	(1423)	$+1$	$+a_1d_2b_3c_4$	(1432)	-1	$-a_1d_2c_3b_4$
(2134)	-1	$-b_1a_2c_3d_4$	(2143)	$+1$	$+b_1a_2d_3c_4$	(2314)	$+1$	$+b_1c_2a_3d_4$
(2341)	-1	$-b_1c_2d_3a_4$	(2413)	-1	$-b_1d_2a_3c_4$	(2431)	$+1$	$+b_1d_2c_3a_4$
(3124)	$+1$	$+c_1a_2b_3d_4$	(3142)	-1	$-c_1a_2d_3b_4$	(3214)	-1	$-c_1b_2a_3d_4$
(3241)	$+1$	$+c_1b_2d_3a_4$	(3412)	$+1$	$+c_1d_2a_3b_4$	(3421)	-1	$-c_1d_2b_3a_4$
(4123)	-1	$-d_1a_2b_3c_4$	(4132)	$+1$	$+d_1a_2c_3b_4$	(4213)	$+1$	$+d_1b_2a_3c_4$
(4231)	-1	$-d_1b_2c_3a_4$	(4312)	-1	$-d_1c_2a_3b_4$	(4321)	$+1$	$+d_1c_2b_3a_4$

Quiz 6

($Due\ at\ 1{:}30\ p.m.\ on\ Fri.\ Oct.\ 25,\ 2002$)

Division: **ID#:** **Name:**

Use only the following properties of the determinant.
(a) If A' is the matrix that results when a single row of A is multiplied by a constant c, then $\det(A') = c \cdot \det(A)$.
(b) If A' is the matrix that results when two rows of A are interchanged, then $\det(A') = -\det(A)$.
(c) If A' is the matrix that results when a multiple of one row of A is added to another row, then $\det(A') = \det(A)$.
(d) The determinant of an upper triangular matrix is the product of the entries on the main diagonal.

1. Evaluate the following determinant and label the property (a)-(d) used in each step. (次の行列式の値を求め、それぞれのステップでどの性質 (a)-(d) を使ったかも記せ。) Show work!!

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

2. $P(i;c)$, $P(i,j)$, $P(i,j;c)$ でサイズが 4 の基本行列を表すとする。5 回目の講義ノート参照。このとき、行列式に関する次の等式を証明せよ。(Let $P(i;c)$, $P(i,j)$, $P(i,j;c)$ be elementary matrices of size 4 introduced at Lecture 5. Prove the following formula.) [Hint: Consider the relation between elementary matrix multiplications and elementary row operations.]

$$|P(2;a)P(1,3)P(2,4;b)P(3,4)P(3;c)P(2,3;d)P(3,1;e)P(1,2)P(1,4;f)| = -ac.$$

Message 欄：最近感激した本・映画・芸術・人・言葉など。解説も加えて下さい。

Solutions to Quiz 6

(*Oct. 25, 2002*)

Use only the following properties of the determinant.
(a) If A' is the matrix that results when a single row of A is multiplied by a constant c, then $\det(A') = c \cdot \det(A)$.
(b) If A' is the matrix that results when two rows of A are interchanged, then $\det(A') = -\det(A)$.
(c) If A' is the matrix that results when a multiple of one row of A is added to another row, then $\det(A') = \det(A)$.
(d) The determinant of an upper triangular matrix is the product of the entries on the main diagonal.

1. Evaluate the following determinant and label the property (a)-(d) used in each step. (次の行列式の値を求め、それぞれのステップでどの性質 (a)-(d) を使ったかも記せ。) Show work!!

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(b)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -5 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(c)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 8 & 16 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(a)}{=} 32 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(c)}{=} 32 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{(d)}{=} -128.$$

2. $P(i;c)$, $P(i,j)$, $P(i,j;c)$ でサイズが 4 の基本行列を表すとする。5回目の講義ノート参照。このとき、行列式に関する次の等式を証明せよ。(Let $P(i;c)$, $P(i,j)$, $P(i,j;c)$ be elementary matrices of size 4 introduced at Lecture 5. Prove the following formula.) [Hint: Consider the relation between elementary matrix multiplications and elementary row operations.]

$$|P(2;a)P(1,3)P(2,4;b)P(3,4)P(3;c)P(2,3;d)P(3,1;e)P(1,2)P(1,4;f)| = -ac.$$

(d) より $|P(1,4;f)| = 1$。$P(1,2)P(1,4;f)$ は $P(1,4;f)$ の行を入れ換えたものだから (b) より $|P(1,2)P(1,4;f)| = -|P(1,4;f)| = -1$。同様にして考えると、$P(3,1;e)$、$P(2,3;d)$ を左からかけることは (c) に対応するからこれらをかけても行列式の値は変わらない。$P(3;c)$ では c 倍になり、$P(3,4)$ では -1 倍に、$P(2,4;b)$ では変わらず、$P(1,3)$ ではさらに -1 倍。$P(2;a)$ では a 倍だから、結局全体として、$P(1,4;f)$ の行列式の $-ac$ 倍となるから、等式が成り立つ。最初から全部かけてみて求めることもできます。最初のステップで (b) を 3 回、(c) を 1 回使っています。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & ade+abce & ad+abc & af \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ce & c & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & ade+abce & ad+abc & af \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -ac.$$

Quiz 7

(*Due at 1:30 p.m. on Fri. Nov. 1, 2002*)

Division: **ID#:** **Name:**

1. A, B, C を n 次正方行列とする。$AB = C$ で C が可逆なら A も B も可逆であることを証明せよ。(Suppose $AB = C$, where A, B, and C are square matrices of size n. Show that if C is invertible, then both A and B are invertible.)

2. I_n を n 次単位行列、J_n を n 次正方行列で成分がすべて 1 のものとする。x を実数とする。(Let I_n be the identity matrix of size n, and let J_n be the square matrix of size n such that all entries are 1. Let x be a real number.)

   (a) $\det(xI_4 - J_4)$ の値を求めよ。(Evaluate $\det(xI_4 - J_4)$.)

   (b) $n \geq 1$ とするとき、$\det(xI_n - J_n) = 0$ となる x をすべて求めよ。(Find all x satisfying $\det(xI_n - J_n) = 0$ for a fixed $n \geq 1$.)

Message 欄：ICU を選んだ理由。その他何でもどうぞ。

Solutions to Quiz 7

(Nov. 1, 2002)

Division: **ID#:** **Name:**

1. A, B, C を n 次正方行列とする。$AB = C$ で C が可逆なら A も B も可逆であることを証明せよ。(Suppose $AB = C$, where A, B, and C are square matrices of size n. Show that if C is invertible, then both A and B are invertible.)

   $AB = C$ とする。C は仮定により可逆だから $\det(C) \neq 0$。両辺の行列式を考えると

   $$\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(C) \neq 0.$$

   したがって、$\det(A) \neq 0$ かつ $\det(B) \neq 0$。系 8.3 より A も B も可逆である。系 5.3 より $AB = I$ ならば A も B も可逆で $BA = I$ であった。これを用いれば、$AB = C$ の両辺に右から C^{-1} をかけ、$I = (AB)C^{-1} = A(BC^{-1})$ したがって、A と BC^{-1} が可逆で、$I = (BC^{-1})A = B(C^{-1}A)$ であることがわかる。これより同じ系によって、B も可逆であることがわかる。

2. I_n を n 次単位行列、J_n を n 次正方行列で成分がすべて 1 のものとする。x を実数とする。(Let I_n be the identity matrix of size n, and let J_n be the square matrix of size n such that all entries are 1. Let x be a real number.)

   (a) $\det(xI_4 - J_4)$ の値を求めよ。(Evaluate $\det(xI_4 - J_4)$.)

   (b) $n \geq 1$ とするとき、$\det(xI_n - J_n) = 0$ となる x をすべて求めよ。(Find all x satisfying $\det(xI_n - J_n) = 0$ for a fixed $n \geq 1$.)

   (a), (b) を同時に解くため一般の n について考える。

$$\det(xI_n - J_n) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & x-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & x-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & -x \\ 0 & x & 0 & \cdots & -x \\ 0 & 0 & x & \cdots & -x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & x-n \end{vmatrix} = x^{n-1}(x-n).$$

   Step 1: 各行（行 1 から行 $n-1$）から第 n 行をひく。
   Step 2: 各列（列 1 から列 $n-1$）を第 n 列に足す。
   Step 3: 下半三角行列の行列式は対角成分の積である。

   (a) $n = 4$ とすると、$\det(xI_4 - J_4) = x^3(x-4)$。

   (b) $x^{n-1}(x-n) = 0$ より $x = 0$ または $x = n$ を得る。

   では、$x \neq 0, n$ のとき 逆行列は簡単にわかりますか。

Quiz 8

(*Due at 1:30 p.m. on Fri. Nov. 8, 2002*)

Division: **ID#:** **Name:**

下の A, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ に対し方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える。Quiz 6 で求めたように $|A| = -128$ である。(Consider the equation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. You may use $|A| = -128$ found in Quiz 6.)

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

1. A の行列式を第 3 列に関して展開せよ。展開式に現れる行列式の値は求めなくてよい。(Expand the determinant of A along the third column. Don't evaluate the determinants in your expression.)

2. A^{-1} の $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)$ 成分を余因子を用いて求めよ。行列式があらわれる場合はその値も求め数値として答えよ。(Find $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)$ entries of A^{-1} using cofactors. Evaluate determinants involved as well.)

3. $x_3 \cdot |A|$ の値を Cramer の定理を用いて行列式で表せ。行列式の値を求めなくてよい。(Apply Cramer's rule to express $x_3 \cdot |A|$ using a determinant. Don't evaluate the determinant.)

4. x_3 の値を求めよ。(Evaluate x_3.)

Message 欄：21 世紀における科学の使命は何でしょうか。その他何でもどうぞ。

Solutions to Quiz 8

(Nov. 9, 2002)

1. A の行列式を第３列に関して展開せよ。

$$\begin{aligned}|A| &= \tilde{a}_{3,1}a_{1,3}+\tilde{a}_{3,2}a_{2,3}+\tilde{a}_{3,3}a_{3,3}+\tilde{a}_{3,4}a_{4,3}\\ &= -2\cdot\begin{vmatrix}2&2&2\\1&2&0\\1&-1&3\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}-5&-3&1\\2&2&2\\1&-1&3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-5&-3&1\\2&2&2\\1&2&0\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

2. A^{-1} の $(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)$ 成分を余因子を用いて求めよ。
$A^{-1}=B=[b_{i,j}]$ とする。

$$\begin{aligned}
b_{3,1} &= (-1)^4\frac{\begin{vmatrix}2&2&2\\1&2&0\\1&-1&3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}0&-2&2\\1&2&0\\0&-3&3\end{vmatrix}}{|A|}=0\\
b_{3,2} &= (-1)^5\frac{\begin{vmatrix}-5&-3&1\\1&2&0\\1&-1&3\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{\begin{vmatrix}0&7&1\\1&2&0\\0&-3&3\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{-\begin{vmatrix}7&1\\-3&3\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{-24}{-128}=-\frac{3}{16}\\
b_{3,3} &= (-1)^6\frac{\begin{vmatrix}-5&-3&1\\2&2&2\\1&-1&3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}0&-8&16\\0&4&-4\\1&-1&3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}-8&16\\4&-4\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-32}{-128}=\frac{1}{4}\\
b_{3,4} &= (-1)^7\frac{\begin{vmatrix}-5&-3&1\\2&2&2\\1&2&0\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{\begin{vmatrix}0&7&1\\0&-2&2\\1&2&0\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{\begin{vmatrix}7&1\\-2&2\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{16}{-128}=\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

3. $x_3\cdot|A|$ の値を Cramer の定理を用いて行列式で表せ。

$$x_3\cdot|A|=\left|\begin{matrix}-5&-3&1&1\\2&2&-6&2\\1&2&4&0\\1&-1&-3&3\end{matrix}\right]$$

4. x_3 の値を求めよ。

$$x_3=(A^{-1}\boldsymbol{b})_3=b_{3,1}-6\cdot b_{3,2}+4\cdot b_{3,3}-3\cdot b_{3,4}=-6\cdot\frac{-3}{16}+4\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{8}=\frac{7}{4}.$$

$$x_3=-\frac{1}{128}\begin{vmatrix}-5&-3&1&1\\2&2&-6&2\\1&2&4&0\\1&-1&-3&3\end{vmatrix}=\frac{7}{4}.$$

最後の行列式を求めるのに、第３列で展開するとそれは、上の式と同じになります。