ICUHS 数学ツアー 2019

鈴木寛（Hiroshi Suzuki）

国際基督教大学（International Christian University）

August 29-30, 2019

Day 2

いつくかの点を通る多項式関数

クラスで考えてみたいこと

1.3.2 の確認

1. たくさんの点を考える時、どのような記号がよいだろうか。
2. 基本的なものをまず作って、それを組み合わせることはできないだろうか。
3. すべての点で、0 という値をとるものは、どのようになっているだろうか。
4. 一つの点では、1 で他では、0 という値をとるものは、どのようなものが考えられるだろうか。
5. ただ一つしかないということは、どのようにしたら示すことがでるでしょうか。

いくつかの点を通る（多項式）関数について

まず、$c_0, c_1, \ldots, c_n$ を数とし、x を変数としたとき、次の式を考える。

$$y = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

右辺の x にある数を代入すると、y の値が決まるので、x の値によって、y の値が一つ定まることを　y は x の関数であるといい、$y = f(x)$ などと書く。f は function からとっている。右辺は、x の整式ともよばれるが、ここでは、多項式と呼ぶことにする。高校では、一項しかないとき、単項式、複数項のとき、多項式と区別することもあるが、ここでは、すべて多項式と呼ぶことにする。ここで、$c_n \neq 0$ であるとき、$f(x)$ の次数は n であるといい、$\deg f(x) = n$ と書く。右辺が 0 のとき、すなわち、ゼロ多項式の次数の次数もいくつか決め方があるが、ここでは、0 でない多項式のときだけ、次数を間がることにする。定数たとえば、$f(x) = c_0 = 2$ の次数は、0 である。右辺が次数 n の多項式の時、$y = f(x)$ を次数 n（または n 次）の多項式関数という。

1. $y = 2x - 1$ は 1 次の多項式関数。
2. $y = x^2 - 2x + 1$ は 2 次の多項式関数である。
3. 一般の 2 次の多項式関数は、$y = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ で、$c \neq 0$ と書けている。
4. $y = f(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ で $b = f(a)$ となっているとき、関数 $y = f(x)$ は (x, y) 平面の点 (a, b) を通るという。

いくつかの点を通る（多項式）関数について（つづき）

5. 点 $(0,0),(1,1),(2,4)$ を通る二次関数はあるでしょうか。直観的に、$y = x^2$ と答えられる人が多いと思います。確かに、$f(x) = x^2$ は、この 3 点を通ります。他に、この 3 つの点を通る二次関数はありませんか。
6. $y = f(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ と置くと、

$$
\begin{aligned}
0 = f(0) &= 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 + c_0 = c_0 \\
1 = f(1) &= 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_1 + c_0 = c_2 + c_1 + c_0 = c_2 + c_1 \\
4 = f(2) &= 4 \cdot c_2 + 2 \cdot c_1 + c_0 = 4 \cdot c_2 + 2 \cdot c_1 = 2 \cdot c_2 + 2(c_2 + c_1) = 2 \cdot c_2
\end{aligned}
$$

   これより、$c_2 = 1, c_1 = 0, c_0 = 0$ が得られます。つまり他にはありません。
7. 3 点を通る二次関数は、いつでも唯一存在するでしょうか。ここからスタートして、一般の場合を考えたいと思います。

「1.4 数学を復習しておきたい人のために」の「直線と二次関数」の問題を眺めながら、考えてみてください。

復習：直線と二次関数

まず、「1.4 数学を復習しておきたい人のために」の「直線と二次関数」の問題の答えを書いておきます。

1. $(0, -2)$ を通り、傾きが 3 の直線の方程式。
   $y = 3x - 2$
2. $(0, b)$ を通り、傾きが a の直線の方程式。
   $y = ax + b$
3. 平面上の直線で、$y = ax + b$ とは表せないもの。
   $x = a$ のように、y 軸と平行な直線。
4. $ax + by + c = 0$ をみたす平面上の点 (x, y) 全体が直線となる条件。
   $a \neq 0$ または $b \neq 0$。($(a, b) \neq (0, 0)$ とも書きます。)
5. $(a, 0)$ と $(0, b)$ を通る直線の方程式。
   $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ $(a \neq 0,\ b \neq 0$ のとき$)$　それ以外は、x 軸 $y = 0$ または、y 軸 $x = 0$ となります。
   なお、一点になるときは、原点を通る直線がすべて条件を満たします。

復習：直線と二次関数（つづき）

6. (a, b) と (c, d) を通る直線の方程式。
   $a \neq c$ のとき、$y = b \cdot \dfrac{x-c}{a-c} + d \cdot \dfrac{x-a}{c-a} = \dfrac{d-b}{c-a}(x-a) + b$
   $a = c$ のとき、$x = a$ ただし、$(a, b) = (c, d)$ のときは、$y = m(x-a) + b$ で m は任意となります。
7. $(0, 0), (1, -1), (3, 3)$ を通る二次関数。
   $y = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$
8. $(1, a), (2, b), (3, c)$ を通る二次関数（か、１次関数か$\cdots$)。
   $y = a \cdot \dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + b \cdot \dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + c \cdot \dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$
   a, b, c の値によっては、一次関数の場合も、定数関数の場合もありますね。例を挙げられますか。

授業 III: いくつかの点を通る多項式関数（１）

ラグランジュの補間公式

- $y = f(x)$ の形の多項式関数だけを考えることにすると、$a = b$ のとき、$f(a) = f(b)$ となるので、いくつか、点をとったとき、x 座標は異なることが必要です。
- 一般的に書きたいので、m 個の点などとしたいので、$(a, b), (c, d)$ ではなく、$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_m, b_m)$ とします。添字は、index といいます。
- m 個の点、$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_m, b_m)$ が与えられた時、

  $$y = f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

  で

  $$f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_m) = b_m$$

  となるものを見つけたいのですが、n は何にすればよいでしょうか。
- 二点、すなわち $m = 2$ では、1 次、すなわち、$n = 1$、三点、$m = 3$ では、$n = 2$ ですから、m 点では、$n = m - 1$ のようです。
  先に進む前に、$m = 3$ すなわち、三点与えられた場合、$n = 2$ 二次関数で三点を通るものがあるかを考えておきましょう。

いくつかの点を通る（多項式）関数について（つづき）

- $(1, a), (2, b), (3, c)$ を考えましたが、今の記号を使い、

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$$

この三点を通る関数を作ってみましょう。

$$y = b_1 \cdot \frac{(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + b_2 \cdot \frac{(x - a_1)(x - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + b_3 \cdot \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$$

2 次以下ではありますが、2 次とは限りません。

- $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_m)$
- $q_1(x) = p(x)/(x - a_1)$, $q_2(X) = p(x)/(x - a_2), \ldots, q_m(x) = p(x)/(x - a_m)$
- $r_1(x) = q_1(x)/q_1(a_1)$, $r_2(x) = q_2(x)/q_2(a_2), \ldots, r_m(x) = q_m(x)/q_m(a_m)$.
- このとき、

$$h(x) = b_1 \cdot r_1(x) + b_2 \cdot r_2(x) + \cdots + b_m \cdot r_m(x)$$

とすると、

$$h(a_1) = b_1,\ h(a_2) = b_2, \ldots, h(a_m) = b_m$$

となっていることが確かめられます。

いくつかの点を通る（多項式）関数について（つづき）

- 定理の形に書いてみましょう。
- $r_1(x), r_2(x), \ldots, r_m(x)$ は、論理回路のときの、$E_1, E_2, \ldots, E_8$ と似ていませんか。

  次の授業では、他の表し方はないのかなど、考えてみようと思います。

講義 IV: いくつかの点を通る多項式関数（２）

因数定理

$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ としたとき、実数 c について、$f(c) = 0$ ならば、

$$f(x) = (\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma')(x - c)$$

と書くことができると書きました。これを一般化したものを考えましょう。

- $f(x)$ を下のような n 次の多項式関数とします。

  $$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,\ c_n \neq 0$$

  このとき、

  $$f(x) = (b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0)(x - c) + r = q(x)(x - c) + r$$

  となる、定数 r と $n-1$ 次多項式

  $$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

  が、ただ一組きまります。
- $q(x)$ の係数と、r は組立除法（synthetic division）で決まります。
- 特に、$f(c) = r$ で、$f(c) = 0$ ならば

  $$f(x) = (b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0)(x - c)$$

  と書けます。

一般解

$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, $c_n \neq 0$ で、次数に制限をつけず、

$$f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_m) = b_m$$

となるものを、すべて見つけてみましょう。

- 前に作った、$h(x)$ は

  $$h(a_1) = b_1,\ h(a_2) = b_2, \ldots, h(a_m) = b_m$$

  を満たしていました。
- $g(x) = f(x) - h(x)$ とすると、

  $$g(a_1) = 0,\ g(a_2) = 0, \ldots, g(a_m) = 0.$$

  であることがわかります。
- 因数定理を順に繰り返し使うと、

  $$g(x) = q(x)(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_m)$$

  で、あることがわかります。

一般解（つづき）

- したがって、

$$f(x) = h(x) + q(x)p(x),\ p(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_m).$$

- 次数を考えると、$\deg f(x) \leqq m - 1$ のときは、$f(x) = h(x)$. $\deg f(x) \geqq m$ のときは、$\deg q(x) = \deg f(x) - m$ となります。
- これで、どのような定理ができたのでしょうか。理解するとともに考えてみましょう。

次数（deg）に関する性質

$f(x), g(x)$ を 0 でない多項式とすると以下が成立する。

1. $\deg f(x) + \deg g(x) \leqq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$
2. $\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$

注：max はどちらか大きい（小さくない）方を表します。

練習問題

1. 次数が 3 以下の多項式 $f(x)$ で $f(0) = 4,\ f(1) = 3,\ f(2) = -6,\ f(3) = 1$ を満たすものは何か。
2. 次数が 3 以下の多項式 $r(x)$、$f(x)$ で $r(-1) = 1,\ r(0) = r(1) = r(2) = 0$、および $f(-1) = 2,\ f(0) = -1,\ f(1) = 3,\ f(2) = -6$ 　となるものを求めよ。
3. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = 2,\ f(2) = 7,\ f(3) = 1,\ f(4) = 8$ を満たすものとする。
    1. 次数が 3 以下である $f(x)$ を求めよ。
    2. 次数が丁度 4 である $f(x)$ を求めよ。
4. 多項式 $r(x)$ は $r(-5) = r(0) = r(5) = r(10) = 0$ and $r(15) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 のものと 5 のものを一つずつ求めよ。
5. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = -2,\ f(2) = 2,\ f(3) = 14,\ f(4) = 40$ を満たすものとする。
    1. 次数が 3 以下の多項式 $g(x)$ で $g(1) = 1, g(2) = g(3) = g(4) = 0$ となるものを求めよ。
    2. 次数が 3 以下の $f(x)$ を求めよ。

練習問題（つづき）

6. 多項式、$f(x)$ は $f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ f(3)=a_3,\ f(4)=a_4$ を満たすものとする。多項式 $g(x)$ で $g(1)=a_1,\ g(2)=a_2,\ g(3)=a_3,\ g(4)=a_4,\ g(5)=a_5$ を満たすものを $f(x)$ を利用して求めたい。
   1. 多項式 $h(x)$ で $g(x)=f(x)+h(x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ となるものが、あることを説明せよ。
   2. もし $h(x)$ が $h(5)=(a_5-f(5))/(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)=(a_5-f(5))/24$ を満たせば (a) の $g(x)$ は条件を満たすことを示せ。

まとめ

- 背景にある数学の考え方について、確認したいと思います。

a. ある条件のもとで必ず成り立つ「定理」を目指す。

b. 単純（で基本的）な場合をよく調べ、それを組み合わせて、複雑な問題の解決を図る。

c. 複雑な問題を、単純な問題が組み合わさったものとして分解して考える。

d. 目標地点から逆にたどって、そこに行き着く道を探る。

e. 実験を繰り返し、予想を立てる。

おわりに

- 関連問題として、どのようなことが考えられるでしょうか。
  - 一次関数（直線の方程式）: $ax + by + c = 0$
  - 二次関数（円錐曲線の方程式）: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + g = 0$
- 疑問におもったことや、考えたいことを話し合えればと思います。

数学の問題を理解し、考え、英語を利用し、コンピュータ・ツールも利用し、自律的に、能動的に思考し、かつ他者から学ぶ謙虚さを持ち続けることは、どのような、分野に進んでも、世界を広げる大きな力となると思います。わたしも、みなさんと、一緒に学びを楽しみ続けたいと願っています。

スケジュール: 8 月 29 日 (木)

- 9:00　ICU（大学）N 館ラウンジ集合ののち、教室 N-232 に移動
- 9:10〜 先生の紹介
- 9:15〜 講義 I 論理回路設計（１）
- 10:15〜 休憩（N307 に移動）
- 10:30〜 コンピュータの説明と個人での確認 （N307）
- 11:00 〜　講義 II 論理回路設計（２）および 質疑応答（N307）
- 12:00〜 昼食休憩（大学の学食に移動）
- 13:00 集合（N307）
- 13:10〜 研究室見学
- 14:10〜 グループワーク（4∼5 名の 3 グループに分かれて)（N307）
- 15:30〜 発表について・予告（N307）
- 16:00 終了

スケジュール: 8 月 30 日 (金)

- 9:00　ICU（大学）N 館教室 N-232 に直接に集合
- 9:05～ 講義 III いくつかの点を通る多項式関数（１）（N232）
- 10:05～ 質疑応答（N232）
- 10:15～ 休憩
- 10:30～ 講義 IV いくつかの点を通る多項式関数（２）（N232）
- 11:30～ 質疑応答・発表について（N232）
- 12:00～ 昼食休憩（大学の学食に移動）
- 13:00 集合（N232）
- 13:10～ グループワーク（N232, N307）
- 13:40～ グループワークと並行して、研究室見学
- 15:00～ グループの発表、各グループ 15 分（N232）
- 15:55～ 講評と補足（N232）
- 16:15 終了