Calculus II Final

Winter Term, AY1997-8

ID 番号、氏名を、各解答用紙に、また、問題番号も忘れずに書いて下さい。
(Write your ID number and your name on each of your solution sheet. Do not forget to write the problem number as well.)

1. $f(x,y) = 4xy - 2y^2 - x^4$ とする。
   (a) 点 $P(1,2,f(1,2))$ における接平面の方程式を求めよ。(Find the equation of the tangent plane at the point $P(1,2,f(1,2))$.)
   (b) 停留点をすべて求めよ。(Find all stationary points.)
   (c) 停留点が極点かどうかを判定し、極点の場合には、極値を求めよ。(Determine extremum and find the values at each relative maximum and relative minimum point.)

2(a) 次の積分の順序を変更せよ。ただし、答えは、いくつかの積分の和になっても構わない。(Change the order of the integrals of the following. The solution may be a sum of several integrals.)

$$\int_0^1 \left\{ \int_{y/2}^{2y} 2xye^{x^2} dx \right\} dy.$$

   (b) 上の積分の値を計算せよ。積分の順序は、どちらを使っても良い。(Evaluate the integral above. You may choose any order in iterated integral.)

3(a) $x = x(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\cos\phi$, $y = y(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\sin\phi$, $z = z(r,\theta,\phi) = r\cos\theta$ としたとき、ヤコビ行列式の値は、$r^2\sin\theta$ であることを示せ。(Show that the Jacobian becomes $r^2\sin\theta$, when $x = x(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\cos\phi$, $y = y(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\sin\phi$, $z = z(r,\theta,\phi) = r\cos\theta$.)
   (b) 球 $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ と、円錐 $z^2 \geq x^2+y^2$、で囲まれた、$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ の部分の体積を求めよ。(Find the volume of a part of a sphere $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ bounded by a cone $z^2 \geq x^2+y^2$ and $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.)

4(a) 次のべき級数の収束半径 r を求めよ。(Determine the radius of convergence of the following power series.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} x^n.$$

(b) $x = r$ としたとき上の級数は収束するか。判定し、証明せよ。(Determine and prove whether the series above with $x = r$ converges.)

5. $D = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$ としたとき、(Let $D = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$.)

(a) $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ を求めよ。(Evaluate the integral $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$.)

(b) 前問を利用して、$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ を求めよ。(Evaluate the integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ using the value of the previous problem.)

6. $f(x) = \int_0^x e^{x^2} dx$ を項別積分を用いてべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で表すとき、a_n 及び、そのべき級数の収束半径を求めよ。ただし、$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ は用いても良い。(Apply termwise integration to express $f(x) = \int_0^x e^{x^2} dx$ by a power series $\sum_0^{\infty} a_n x^n$. Find a_n and the radius of convergence. You may assume that $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$.)