Calculus II Final

Winter Term, AY1996-7

ID 番号、氏名を、各解答用紙に、また、問題番号も忘れずに書いて下さい。
(Write your ID number and your name on each of your solution sheet. Do not forget to write the problem number as well.)

1. 曲面、$z = \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{5^2}$ の、点 $(3, -5, 2)$ における接平面の方程式を求めよ。(Find the equation of the plane tangent to a surface $z = \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{5^2}$ at the point $(3, -5, 2)$.)
2. 原点から、曲面 $z^2 = xy - 5x - 4y + 16$ 上の点までの距離の最小値を求めよ。(Determine the minimal distance between the origin and the points on the surface $z^2 = xy - 5x - 4y + 16$.)
3. 下の定理は、ラグランジュの乗数定理と呼ばれる。この証明の、各部分の空欄を埋める式を解答用紙に記入せよ。(The following is called Lagrange's multiplier theorem. Fill the empty boxes with the suitable formulas in the proof.)

   定理 1 $g(x, y) = 0$ の条件のもとで、関数 $f(x, y)$ が、点 (a, b) で極値を持つとする。ただし、$g_x(a, b)$ と、$g_y(a, b)$ は、同時には、0 にならないものとする。そのとき、

   $$f_x(a, b) + \lambda g_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) + \lambda g_y(a, b) = 0$$

   を満たす定数 λ が存在する。

   証明 $g_y(x, y) \neq 0$ とする。$g(x, y) = 0$、$g_y(x, y) \neq 0$ より、陰関数の定理により、$y = \phi(x)$ とかける。$g(x, \phi(x)) = 0$ を合成関数として、x で微分すると、

   (a) $\boxed{}$

   が得られる。従って、

   (b) $\boxed{\dfrac{d\phi}{dx} = }$

   一方、$f(x, \phi(x))$ が、(a, b) で極値を取るという条件から、

   (c) $\boxed{}$

   である。この式に、上で求めた、$\phi'(a)$ を代入して整理すると次の式が得られる。

   (d) $\boxed{}$

   この比の値を $-\lambda$ と置くと、定理の結果を得る。
   $g_x(x, y) \neq 0$ の時も同様。 ■
4. 次の積分の順序を変更せよ。ただし、$a > 0$ とし、答えは、いくつかの積分の和になっても構わない。(Change the order of the integrals of the following. Here $a > 0$ and the solution may be a sum of several integrals.)

   $$\int_0^a \left\{ \int_{x^2/a}^{2a-x} f(x, y)dy \right\} dx.$$

5. 下の変数変換を用いて、重積分を求めよ。(Evaluate the integral by changing the variables as indicated below.)

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy, \quad D=\{(x,y) \mid 1 \le x+y \le 2, x \ge 0, y \ge 0\}, \ (x+y=u, y=uv).$$

6. 次の重積分を求めよ。(Evaluate the following multiple integrals.)

$$\iint_D \sin(x+y)dxdy, \quad D=\{(x,y)|0 \le x,\ 0 \le y,\ x+y \le \frac{\pi}{2}\}.$$

7. 球 $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ $(a>0)$ の円柱 $x^2+y^2=ax$ の内部にある部分の体積を求めよ。(Find the volume of a part of a sphere $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ $(a>0)$ bounded by a cylinder $x^2+y^2=ax$.)

8. 次の級数の収束、発散を決定せよ。(Determine whether each of the following seires converges or diverges.)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sin\frac{1}{n}\Big)^n.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-n).$

9. 次のべき級数の収束半径を求めよ。(Determine the radius of convergence of the following power series.)

(a) α を実数としたとき、

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^n+n)x^n.$

次の２問の中から、１問を選択し、解答せよ。(Choose one of the following problems and solve it.)

10. $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$ をべき級数で表し、その収束半径を求めよ。(Express $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$ as a power series and find the radius of convergence.)

11. 曲面 $z=xy$ の 円柱 $x^2+y^2 \le a^2$ の内部の部分の面積を求めよ。(Find the area of a surface $z=xy$ bounded by a cylinder $x^2+y^2 \le a^2$.)