Quiz 1

Due at 9:00 p.m. on Thursday, April 17, 2008

Division: **ID#:** **Name:**

1. P, Q, R を命題とする。このとき、$(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.（論理同値）であることを真理表を完成することにより証明せよ。

P	Q	R	$(P \quad \vee \quad Q) \quad \Rightarrow \quad R$	$(P \quad \Rightarrow \quad R) \quad \wedge \quad (Q \quad \Rightarrow \quad R)$	X
T	T	T			F
T	T	F			F
T	F	T			T
T	F	F			F
F	T	T			F
F	T	F			T
F	F	T			F
F	F	F			F

2. 上の論理同値を基本性質（命題 1.1 (1)–(7) または 教科書 p.44 (1)-(4) と $P \Rightarrow Q \equiv (\sim P) \vee Q$）のみを用いて示せ。どの基本性質を用いたかその番号も記せ。

3. $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ と論理同値な命題の一つを $\sim$ と $\wedge$ および括弧 ( ) のみを用いてあらし、理由も述べよ。$\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ は用いないこと。

4. 上の表の一番右の列の論理式 X と真理値が同じとなる論理式を一つ P, Q, R と $\sim$, $\wedge$, $\vee$ および括弧を用いて表せ。

Message 欄（裏にもどうぞ）：この授業に期待すること。要望。自分にとって数学とは。（HP 掲載不可は明記のこと）

Solutions to Quiz 1

(*April 17, 2008*)

1. P, Q, R を命題とする。このとき、$(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.（論理同値）であることを真理表を完成することにより証明せよ。

P	Q	R	$(P$	$\vee$	$Q)$	$\Rightarrow$	R	$(P$	$\Rightarrow$	$R)$	$\wedge$	$(Q$	$\Rightarrow$	$R)$	X
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F
T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	F
T	F	T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	F
F	T	F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	F	F

2. 上の論理同値を基本性質（命題 1.1 (1)–(7) または 教科書 p.44 (1)-(4) と $P \Rightarrow Q \equiv (\sim P) \vee Q$）のみを用いて示せ。どの基本性質を用いたかその番号も記せ。

解. 命題 1.1 を用いる。

$$\begin{aligned} P \vee Q \Rightarrow R &\overset{(7)}{\equiv} \sim (P \vee Q) \vee R \\ &\overset{(6)}{\equiv} (\sim P \wedge \sim Q) \vee R \\ &\overset{(3)(5)}{\equiv} (\sim P \vee R) \wedge (\sim Q \vee R) \\ &\overset{(7)}{\equiv} (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R). \end{aligned}$$

3. $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ と論理同値な命題の一つを $\sim$ と $\wedge$ および括弧 ( ) のみを用いてあらし、理由も述べよ。$\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ は用いないこと。

解. 前問の解答の二行目右辺を用いる。さらに、命題 1.1 の (2), (6) より $S \vee T \equiv \sim (\sim (S \vee T)) \equiv \sim (\sim S \wedge \sim T)$ が成り立つのでこれも用いると、

$$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv (\sim P \wedge \sim Q) \vee R \equiv \sim (\sim (\sim P \wedge \sim Q) \wedge \sim R).$$

解答の三行目右辺を用いれば

$$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv (\sim P \vee R) \wedge (\sim Q \vee R) \equiv \sim (P \wedge \sim R) \wedge \sim (Q \wedge \sim R).$$

4. 上の表の一番右の列の論理式 X と真理値が同じとなる論理式を一つ P, Q, R と $\sim$, $\wedge$, $\vee$ および括弧を用いて表せ。

解. P, Q, R の真理値が T, F, T の時のみ T でそれ以外 F となるものは、$P \wedge \sim Q \wedge R$。同様にして F, T, F の時のみ T でそれ以外 F となるものは $\sim P \wedge Q \wedge \sim R$。その両方で T になる論理式が X だから

$$X \equiv (P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge \sim R)$$

となる。このような表示を正規表現といいます。どの真理値の組合せでも、この方法でその真理値を持つ論理式を書き下すことができます。これは、必ずしも最短表示ではありません。無論、他のものも可能です。最短の表示を見つけることは、情報科学の計算理論で非常に重要な問題です。

Quiz 2

(*Due at 9:00 p.m. on Thursday, April 24, 2008*)

Division: **ID#:** **Name:**

A, B, C, D を集合とする。

1. $(A \cup B) - C$ と $A \cup (B - C)$ を Venn 図で表せ。

2. $(A \cup B) - C \neq A \cup (B - C)$ である集合 A, B. C の例をあげよ。

3. 常に $(A \cup B) - C \subseteq A \cup (B - C)$ であることを Venn 図を用いずに証明せよ。

4. $A \neq \emptyset$ とする。このとき、$A \times B \subseteq C \times D$ ならば $B \subseteq D$ であることを証明せよ。（$A \neq \emptyset$ の条件に注意。）

Message 欄（裏にもどうぞ）：数学と論理の関係について、その違いについて。（HP 掲載不可は明記のこと）

Solutions to Quiz 2

(*April 24, 2008*)

A, B, C, D を集合とする。

1. $(A \cup B) - C$ と $A \cup (B - C)$ を Venn 図で表せ。

   解. 省略

2. $(A \cup B) - C \neq A \cup (B - C)$ である集合 $A, B. C$ の例をあげよ。

   解. $A = C = \{1\}$ かつ $B = \emptyset$。このとき、

   $$(A \cup B) - C = \emptyset \neq \{1\} = A \cup (B - C).$$

   （試行錯誤でもできると思いますが、Venn 図を見ると、どこの部分が存在すると等しくならないか予想がつくはずですね。そこから反例を作れば良いわけです。反例は具体的に示すこと。条件が複雑になると、このような条件を満たすものは、反例となると分かっても、実はそのような条件を満たすものは存在しないこともあります。「すべての場合に成立」の否定は、「成立しないものが一つはある」でした。それを具体的に示すのが反例です。）

3. 常に $(A \cup B) - C \subseteq A \cup (B - C)$ であることを Venn 図を用いずに証明せよ。

   解. A, B, C を含む集合たとえば $A \cup B \cup C$ を X としその中で補集合を考える。すなわち、$\overline{C} = X - C$ とする。$A \cap \overline{C} \subset A$ だから

   $$(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) \subseteq A \cup (B - C).$$

   別解. $x \in (A \cup B) - C (= \{y \mid y \in A \cup B, y \notin C\})$ とする。（このとき、$x \in A \cup (B - C)$ を示す。これが示されれば、$X \subseteq Y$ の定義から $(A \cup B) - C \subseteq A \cup (B - C)$ が示されることになる。）すると、$x \in A \cup B$ かつ $x \notin C$ である。$x \in A \cup B$ だから $x \in A$ または $x \in B$ である。$x \in A$ とすると、$x \in A \subseteq A \cup (B - C)$ だから良い。$x \in B$ とすると、$x \notin C$ だったから $x \in B - C$。したがって、$x \in B - C \subseteq A \cup (B - C)$。すなわち、つねに、$x \in A \cup (B - C)$ である。したがって、$(A \cup B) - C \subseteq A \cup (B - C)$ である。

   （解の式変形をみると、形から、$A \cap \overline{C} = A$ （すなわち、$A \subset \overline{C}$。これはまた、$A \cap C = \emptyset$ と同値。）ならば等式が成立することが分かります。つまり、$A \cap \overline{C} = A \Rightarrow (A \cup B) - C = A \cup (B - C)$ さてこの逆向き $\Leftarrow$ は言えるでしょうか。考えてみて下さい。これも問題にしようかと思いましたが、ちょっと難しいかと思ってやめました。）

4. $A \neq \emptyset$ とする。このとき、$A \times B \subseteq C \times D$ ならば $B \subseteq D$ であることを証明せよ。（$A \neq \emptyset$ の条件に注意。）

   解. $A \neq \emptyset$ だから $a \in A$ が存在する。b を B の任意の元とすると、仮定より $A \times B \subseteq C \times D$ だから

   $$(a, b) \in A \times B \subseteq C \times D = \{(c, d) \mid c \in C,\ d \in D\}$$

   だから $b \in D$ である。b は B の任意の元だったから $B \subseteq D$ である。

   $A = \emptyset$ とするときたとえば、$B = \{1\}, A = C, D = \emptyset$ とすると、$\emptyset = A \times B \subseteq C \times D$ であるが、$\{1\} = B \not\subseteq D = \emptyset$ であることに注意。

   （最初に $a \in A$ を取るところは慣れないとどうもよく分からないところだと思います。しかし、$A = \emptyset$ の時は反例があるわけですから、どこかで明示的にこの条件が使われないといけないことは確かです。）

Quiz 3

($\textit{Due at 9:00 p.m. on Thursday, May 1, 2008}$)

Division: **ID#:** **Name:**

$\boldsymbol{R}$ は実数全体、$\boldsymbol{Z}$ は整数全体を表すものとする。$a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して $b - a \in \boldsymbol{Z}$ となるとき、$a \equiv b$ と書くことにする。また $a \in \boldsymbol{R}$ に対し、$[a] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \equiv a\}$ とする。

1. $a \equiv b$ は実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ に同値関係を定義すること、すなわち以下を示せ。

   For all $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, (i) $a \equiv a$, (ii) $a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$, (iii) $a \equiv b \wedge b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$.

2. $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ に対して $a \equiv b$ かつ $c \equiv d$ ならば常に $a + c \equiv b + d$ であれば証明し、そうでなければ反例をあげよ。

3. $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ に対して $a \equiv b$ かつ $c \equiv d$ ならば常に $ac \equiv bd$ であれば証明し、そうでなければ反例をあげよ。

4. $a, b \in \boldsymbol{R}$ とするとき、 $0 < b - a < 1 \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$ であることを示せ。

5. $S = \{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ とするとき次を示せ。$\boldsymbol{R} = \bigcup_{a \in S} [a]$.

Message 欄（裏にもどうぞ）: ICU の数学改革について。（HP 掲載不可は明記のこと）

Solutions to Quiz 3

(*May 1, 2008*)

$\boldsymbol{R}$ は実数全体、$\boldsymbol{Z}$ は整数全体を表すものとする。$a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して $b - a \in \boldsymbol{Z}$ となるとき、$a \equiv b$ と書くことにする。また $a \in \boldsymbol{R}$ に対し、$[a] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \equiv x\}$ とする。

1. $a \equiv b$ は実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ に同値関係を定義すること、すなわち以下を示せ。

   For all $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, (i) $a \equiv a$, (ii) $a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$, (iii) $a \equiv b \wedge b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$.

   (i) $a - a = 0 \in \boldsymbol{Z}$ だから $a \equiv a$.

   (ii) $a \equiv b$ とする。定義より $b - a \in \boldsymbol{Z}$。したがって $a - b = -(b - a) \in \boldsymbol{Z}$。定義より $b \equiv a$.

   (iii) $a \equiv b$ かつ $b \equiv c$ とする。定義より $b - a \in \boldsymbol{Z}$ かつ $c - b \in \boldsymbol{Z}$。したがって $c - a = (b - a) + (c - b) \in \boldsymbol{Z}$。定義より $a \equiv c$. ■

2. $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ に対して $a \equiv b$ かつ $c \equiv d$ ならば常に $a + c \equiv b + d$ であれば証明し、そうでなければ反例をあげよ。

   解. 成立する。$a \equiv b$ かつ $c \equiv d$ だから $b - a \in \boldsymbol{Z}$ かつ $d - c \in \boldsymbol{Z}$ である。したがって、

   $$(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c) \in \boldsymbol{Z}$$

   が成り立つ。定義より、$a + c \equiv b + d$ である。■

3. $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ に対して $a \equiv b$ かつ $c \equiv d$ ならば常に $ac \equiv bd$ であれば証明し、そうでなければ反例をあげよ。

   解. 成立しない。$0 \equiv 1$, $\sqrt{2} \equiv \sqrt{2}$ であるが、$0 \not\equiv \sqrt{2}$ である。最後の主張は、$1 < \sqrt{2} < 2$（二乗すれば分かる）で、1 と 2 の間には、整数はないから $\sqrt{2} - 0 = \sqrt{2} \notin \boldsymbol{Z}$ であることから分かる。■

4. $a, b \in \boldsymbol{R}$ とするとき、 $0 < b - a < 1 \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$ であることを示せ。

   解. 背理法で示す。$x \in [a] \cap [b]$ とすると、定義より $x - a \in \boldsymbol{Z}$ かつ $x - b \in \boldsymbol{Z}$ である。したがって $b - a = (x - a) - (x - b) \in \boldsymbol{Z}$ である。しかし仮定より $0 < b - a < 1$ で 0 と 1 の間には、整数は無いからこれは、矛盾。したがって、主張が証明できた。■

5. $S = \{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ とするとき次を示せ。$\boldsymbol{R} = \bigcup_{a \in S} [a]$.

   解. （集合における等号を示すので $\subseteq$ と $\supseteq$ を示す。）定義より、$a \in S$ について $[a] \subseteq \boldsymbol{R}$ は明らか。したがって、$\boldsymbol{R} \supseteq \bigcup_{a \in S} [a]$。

   次に $x \in \boldsymbol{R}$ とする。このとき、ある整数 n で $n \leq x < n + 1$ となるものが存在する。このとき、$0 \leq x - n < 1$ である。そこで、$a = x - n \in S$ と置くと、$x - a = n \in \boldsymbol{Z}$ だから $a \equiv x$ で、$x \in [a] = \{y \in \boldsymbol{R} \mid a \equiv y\}$。$a \in S$ だったから、$x \in \bigcup_{a \in S} [a]$。したがって、$\boldsymbol{R} \subseteq \bigcup_{a \in S} [a]$ が成立し、上で示したこととあわせて、$\boldsymbol{R} = \bigcup_{a \in S} [a]$ が示せた。■

   （4 と併せると S はこの同値類の完全代表系をなすことも分かります。つまり、$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} = \{[a] \mid a \in S\}$ は S の直和分割（直和分解とも言う）教科書 1.5, 1.6 参照。$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の記号はよく出てきます。この記法については、またお話しします。2 から $[a] + [b] = [a + b]$ と定義すると、これにより $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ に和が定義されます。$\boldsymbol{Z}_n = \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ と比較してみて下さい。）

Quiz 4

(*Due at 9:00 p.m. on Thursday, May 15, 2008*)

Division: **ID#:** **Name:**

1. X, Y, Z を集合とし $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像（関数）とする。また f と g の合成写像（合成関数） $g \circ f : X \to Z$ $(x \mapsto g(f(x)))$ は単射であるとする。

   (a) f は単射であるか。正しければ証明し誤っていれば反例をあげよ。

   (b) g は単射であるか。正しければ証明し誤っていれば反例をあげよ。

2. $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とし $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(1) = 1$, $x \neq 1$ のとき $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ で定義する。

   (a) $f \circ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は全単射であることを示せ。

   (b) f は単射であることを示せ。

   (c) f は全射であることを示せ。

Message 欄（裏にもどうぞ）：中学・高等学校などで、数学がきらいまたはとても苦手だと思っている生徒が多いようですが、原因は何でしょうか。改善方法はありますか。（HP 掲載不可は明記のこと）

Solutions to Quiz 4

(*May 15, 2008*)

1. X, Y, Z を集合とし $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像（関数）とする。また f と g の合成写像（関数） $g \circ f : X \to Z$ $(x \mapsto g(f(x)))$ は単射であるとする。

   (a) f は単射であるか。正しければ証明し誤っていれば反例をあげよ。

   解.　正しい。$h = g \circ f$ とし、$x_1, x_2 \in X$ に対して $f(x_1) = f(x_2)$ を仮定し $x_1 = x_2$ を証明する。$f(x_1) = f(x_2)$ だから

   $$h(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = h(x_2)$$

   である。$h = g \circ f$ は仮定より単射だから $x_1 = x_2$。したがって f は単射である。 ■

   (b) g は単射であるか。正しければ証明し誤っていれば反例をあげよ。

   解.　誤り。$X = Z = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = g(2) = 1$ とする。このとき、$h = g \circ f$ は $h(1) = 1$ だから X から Z への全単射、特に単射。しかし、g は $1 \neq 2$ に対して $g(1) = g(2)$ だから単射ではない。 ■

   さて追加問題です。上の状況で $X = Z$ を仮定し $g \circ f$ は単射だとします。g は全射だと示すことができるでしょうか。それとも、反例があげられますか。上の例では g は全射でした。これは 6 月のテーマです。

2. $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とし $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(1) = 1$, $x \neq 1$ のとき $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ で定義する。

   (a) $f \circ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は全単射であることを示せ。

   解.　$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = 1$, また $x \neq 1$ のとき

   $$(f \circ f)(x) = f(\frac{x+1}{x-1}) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{x + 1 + x - 1}{x + 1 - x + 1} = \frac{2x}{2} = x.$$

   したがって $x = 1$, $x \neq 1$ に関わらず、常に $(f \circ f)(x) = x$ である。$f \circ f = id_{\boldsymbol{R}}$（$id_{\boldsymbol{R}}$ は恒等写像。すなわち、すべての $x \in \boldsymbol{R}$ について $id_{\boldsymbol{R}}(x) = x$）だから、これは全単射。 ■

   (b) f は単射であることを示せ。

   解.　1(a) と上の問題より f は単射。 ■

   [別解] $x \neq 1$ のとき、$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \neq 1$ だから（$\frac{x+1}{x-1} = 1$ とすると $x + 1 = x - 1$ より $2 = 0$ となり矛盾）x, y を 1 とは異なるとして $f(x) \neq f(y)$ を示せばよい。$f(x) = f(y)$ とすると $\frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1}$ より $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ となり、これより、$2x = 2y$ を得る。これは $x = y$ を意味するから単射である。 ■

   (c) f は全射であることを示せ。

   解.　$y \in \boldsymbol{R}$ とする。すると前問より $f(f(y)) = y$ だったから $f(y) = x$ となる $x = f(y) \in \boldsymbol{R}$ が存在したので、f は全射である。 ■

   [別解] $f(1) = 1$ だから 1 は f の像に入っている。$y \neq 1$ とする。このとき $x = \frac{y+1}{y-1}$ とすると $x \neq 1$ で（なぜこれを断らないといけないか分かりますか）、$f(x) = y$ (2(a) の計算) だから f は全射である。（この (b)(c) を先に証明して、$f \circ f$ は全単射の合成写像だから 全単射と運ぶことも可能。しかし、結局、上の $(f \circ f)(x) = x$ の計算が (c) で必要かつ 全単射の合成写像が全単射であることも示すとすると、最初の (a) の証明のほうが簡潔である。 ■

Quiz 5

Due at 9:00 p.m. on Thursday, May 22, 2008

Division: **ID#:** **Name:**

1. $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を関数で $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ $(\forall x, \forall y \in \boldsymbol{R})$ を満たすものとする。

   (a) $f(1) = 0$ であることを示せ。

   (b) $u \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$ のとき常に、$f(u^n) = nu^{n-1}f(u)$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

2. $g : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ を関数で、$g(1) = g(2) = 1$ かつ $g(n) = \frac{1}{2}(g(n-1) + 2/g(n-2))$ $(\forall n \geq 3)$ を満たすとする。このとき、$1 \leq g(n) \leq 2$ が常に成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

Message 欄（裏にもどうぞ）：ここまでのこの授業について。（HP 掲載不可は明記のこと）

Solutions to Quiz 5

(*May 22, 2008*)

1. $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を関数で $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ $(\forall x, \forall y \in \boldsymbol{R})$ を満たすものとする。

   (a) $f(1) = 0$ であることを示せ。

   解. $1 \cdot 1 = 1$ だから

   $$0 = f(1) - f(1) = f(1 \cdot 1) - 1 \cdot f(1) = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(1) - 1 \cdot f(1) = f(1).$$

   したがって、$f(1) = 0$ である。 ■

   (b) $u \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$ のとき常に、$f(u^n) = nu^{n-1}f(u)$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

   解. $n = 1$ のときは、$f(u) = 1u^0 f(u)$ だから成立する。
   $n = k \geq 1$ のとき、$f(u^k) = ku^{k-1}f(u)$ が成立するとする。このとき、

   $$f(u^{k+1}) = f(u^k \cdot u) = u \cdot f(u^k) + u^k \cdot f(u) = u \cdot ku^{k-1}f(u) + u^k f(u) = (k+1)u^k f(u).$$

   したがって数学的帰納法によりすべての自然数 n について $f(u^n) = nu^{n-1}f(u)$ が成立する。 ■

注. (a) は、すべての x, y について成立することを使って、$f(1) = 0$ を示すわけですから、x, y をどうおけばよいかが鍵ですね。

f の性質は何かに似ていませんか。微分みたいですよね。$f(x+y) = f(x)+f(y)$ かつ $f(xy) = xf(y)+yf(x)$ を満たすものを $\boldsymbol{R}$ の微分 (derivation) と呼びます。代数の範囲で使われる概念です。この問題の条件のもとで、$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R} - \{0\}$ としたとき、$L : \boldsymbol{R}^* \to \boldsymbol{R}$ $(x \mapsto f(x)/x)$ とすると $L(xy) = L(x) + L(y)$ が成り立ちます。もちろん $L(1) = 0$ も成り立ちますし、上で証明したことから、$L(x^n) = nL(x)$ も成り立ちます。何か log のような感じがしませんか。これは何を言っているのでしょうかね。

2. $g : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ を関数で、$g(1) = g(2) = 1$ かつ $g(n) = \frac{1}{2}(g(n-1) + 2/g(n-2))$ $(\forall n \geq 3)$ を満たすとする。このとき、$1 \leq g(n) \leq 2$ が常に成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

   解. $g(1) = g(2) = 1$ だから $n = 1, 2$ のときには、$1 \leq g(n) \leq 2$ が成立する。ここで、$n \geq 3$ とする。$1 \leq k < n$ については、$1 \leq g(k) \leq 2$ が常に成立するとすると、特に、$1 \leq g(k-1) \leq 2$ かつ、$1 \leq \frac{2}{g(k-2)} \leq 2$ である。そこで、

   $$1 = \frac{1}{2}(1+1) \leq \frac{1}{2}\left(g(k-1) + \frac{2}{g(k-2)}\right) \leq \frac{1}{2}(2+2) = 2.$$

   したがって、数学的帰納法により、すべての自然数 n について、$1 \leq g(n) \leq 2$ が成立する。
   ■

注. 1 は $n = k$ の時成立することを使って、$n = k+1$ の場合に成立することを示しましたが、この問題では、$k-1$ と $k-2$ についての仮定を用いて、k の場合を示しています。そのようなことをするときは、$n = 1, 2$ の場合のチェックが必要です。$n = 3$ の時は必要ありませんね。よく帰納法の原理を理解して下さい。また、逆数を取っているので、大小関係が逆転することも注意して下さい。

$g(n) = a_n$ とすると、$a_1 = a_2 = 1$, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-2}})$ を満たす数列になります。さて、上で証明したことから、$1 \leq a_n \leq 2$ となります。この数列は収束するでしょうか。実はちょっと考えてみましたが、分かりませんでした。どなたか分かりましたら、教えて下さい。収束すればその値が何になるかは、簡単です。それは、$\sqrt{2}$ ですね。$a_1 = a_2 = 1$ はもう少しゆるい条件でも良さそうですが。

Quiz 6

(Due at $9{:}00$ $p.m.$ on $Thursday,$ May $29,$ 2008)

Division: **ID#:** **Name:**

$\boldsymbol{Z}_{11} = \{[0], [1], \ldots, [10]\}$ とし、n を負でない整数とする。

1. n の 10 進表示を $n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0,\ 0 \leq a_i < 10$ とする。このとき $[n] = [(-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \cdots + (-1)^1 a_1 + (-1)^0 a_0]$ を示せ。

2. $[n] \neq [0]$ とする。このとき、 整数 m で $[m][n] = [1]$ となるものが必ずあることを示せ。

3. $d = \gcd\{526, 11\}$ とする。このとき、$d = 526m + 11\ell$ となる整数 m と ℓ を一組求めよ。

4. $[n] \neq [0]$ とする。このとき、 $[n^{10}] = [1]$ であることを示せ。

5. $[3^{67205}] = [x]$ となる整数 x $(0 \leq x \leq 10)$ を求めよ。

Message 欄（裏にもどうぞ）：数学で（または他のことを勉強していて）感激したこと、面白いと思ったことがあったら、そのことについて教えて下さい。（HP 掲載不可は明記のこと）

Solutions to Quiz 6

(*May 29, 2008*)

$\boldsymbol{Z}_{11} = \{[0], [1], \ldots, [10]\}$ とし、n を負でない整数とする。

1. n の 10 進表示を $n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0,\ 0 \leq a_i < 10$ とする。このとき $[n] = [(-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \cdots + (-1)^1 a_1 + (-1)^0 a_0]$ を示せ。

   解. $[x+y] = [x] + [y]$, $[xy] = [x][y]$ および $[10] = [-1]$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
[n] &= [a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0] \\
&= [a_k][10]^k + [a_{k-1}][10]^{k-1} + \cdots + [a_1][10] + [a_0] \\
&= [a_k][-1]^k + [a_{k-1}][-1]^{k-1} + \cdots + [a_1][-1]^1 + [a_0] \\
&= [a_k][(-1)^k] + [a_{k-1}][(-1)^{k-1}] + \cdots + [a_1][(-1)^1] + [a_0][(-1)^0] \\
&= [(-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \cdots + (-1)^1 a_1 + (-1)^0 a_0].
\end{aligned}$$

■

   これを用いると、たとえば $[3492]_{11} = [-3+4-9+2]_{11} = [5]_{11}$ となります。これは 3492 を 11 で割ると余りは 5 になることを意味しています。では 13, 17 などで割った余りを計算するにはどうすれば良いでしょうか。

2. $[n] \neq [0]$ とする。このとき、 整数 m で $[m][n] = [1]$ となるものが必ずあることを示せ。

   解. $[n] \neq [0]$ だから n は 11 で割り切れない。したがって、$\gcd\{n, 11\} = 1$。定理 6.3 によって $1 = mn + \ell 11$ となる整数 ℓ, m が存在する。したがって、$[m][n] = [mn] = [1 - 11\ell] = [1]$ となる。■

   この $[m]$ を $[n]^{-1}$ とも書きます。$[1]^{-1} = [1]$, $[2]^{-1} = [6]$, $[3]^{-1} = [4]$, $[4]^{-1} = [3]$, $[5]^{-1} = [9]$, $[6]^{-1} = [2]$, $[7]^{-1} = [8]$, $[8]^{-1} = [7]$, $[9]^{-1} = [5]$, $[10]^{-1} = [10]$. もう少し簡単に求められませんかね。$[-a]^{-1} = [-1][a]^{-1}$ を使うと計算は半分で済みます。もっと簡単になりませんか。

3. $d = \gcd\{526, 11\}$ とする。このとき、$d = 526m + 11\ell$ となる整数 m と ℓ を一組求めよ。

   解. $526 = 47 \cdot 11 + 9$, $11 = 1 \cdot 9 + 2$, $9 = 4 \cdot 2 + 1$. これより $\gcd\{526, 11\} = 1$ がわかります。$2 = 11 - 9$, $9 = 526 - 47 \cdot 11$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
1 &= 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 4 \cdot (11 - 9) = (4+1) \cdot 9 - 4 \cdot 11 = 5 \cdot (526 - 47 \cdot 11) - 4 \cdot 11 \\
&= 5 \cdot 526 - (5 \cdot 47 + 4) \cdot 11 = 5 \cdot 526 - 239 \cdot 11.
\end{aligned}$$

   したがって $m = 5$, $\ell = -239$ とすればよい。■

   別解. まず 1 より、$[526] = [5 - 2 + 6] = [-2] = [9]$ だから、$[5][526] = [5][9] = [1]$. したがって $11 \mid 5 \cdot 526 - 1$。これより $5 \cdot 526 - 1 = 239 \cdot 11$ となり、$5 \cdot 526 - 239 \cdot 11 = 1$ を得る。■

   上でなぜ $[5]$ をかけたかは、次の問題の解説にあるように $[9]^{-1} = [5]$ だからです。では上の条件を満たす ℓ, m は他にどんなものがあるでしょうか。$1 = 526m + 11\ell = 525m' + 11\ell'$ と仮定します。これより $526(m - m') = 11(\ell' - \ell)$ となります。11 と 526 は互いに素でしたから、$11 \mid m - m'$ かつ $526 \mid \ell' - \ell$ となります。そこで $\ell' = \ell + 526 \cdot s$ とすると、$m' = m - 11s$ となります。逆にこのような ℓ', m' は条件を満たすことも分かります。

4. $[n] \neq [0]$ とする。このとき、 $[n^{10}] = [1]$ であることを示せ。

   解. $[2]^2 = [4]$, $[2]^3 = [4][2] = [8]$, $[2]^4 = [8][2] = [5]$, $[2]^5 = [5][2] = [-1]$, $[2]^6 = [-1][2] = [-2]$, $[2]^7 = [-2][2] = [-4]$, $[2]^8 = [-4][2] = [-8]$, $[2]^9 = [-8][2] = [-5]$, $[2]^{10} = [-5][2] = [1]$. $\boldsymbol{Z}_{11}$ の元で $[0]$ 以外のものはすべて現れるから、$[n] = [2]^m$ と書ける。したがって $[n]^{10} = ([2]^m)^{10} = ([2]^{10})^m = [1]^m = [1]$. ■

5. $[3^{67205}] = [x]$ となる整数 x $(0 \leq x \leq 10)$ を求めよ。

   解. $67205 = 6720 \cdot 10 + 5$ だから、前問を用いると $[3^{10}] = [1]$ となり

$$[3^{67205}] = [3^{10}]^{6720}[3^5] = [3^5] = [9][9][3] = [-2][-2][3] = [1].$$

   したがって $x = 1$ である。■

Quiz 7

(*Due at 9:00 p.m. on Thursday, June 5, 2008*)

Division: **ID#:** **Name:**

$a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ とするとき (a, b) は開区間すなわち $\{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$ を表すものとする。

1. 関数 $f : \boldsymbol{R} \to (0, 1)$ $(x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1})$ は全単射であることを示せ。

2. $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ とするとき $\boldsymbol{R} \sim (a, b)$ すなわち $\boldsymbol{R}$ と (a, b) は対等（個数同値）であることを具体的な全単射の存在を示すことにより証明せよ。

3. $\boldsymbol{Q}^+ = \{r \in \boldsymbol{Q} \mid r > 0\}$ とする。単射 $g : \boldsymbol{Q}^+ \to \boldsymbol{N}$ の存在を示し、それを用いて $\boldsymbol{Q}^+ \sim \boldsymbol{N}$ すなわち $\boldsymbol{Q}^+$ と $\boldsymbol{N}$ は対等（個数同値）であることを証明せよ。

Message 欄：数学は明確な定義と、論理・推論で組み立てられているので、普遍性のある真理を得ることができるのだと思いますが、そうであるにも関わらず理解するのが難しいのは何故なのでしょう。（HP 掲載不可は明記のこと）

Solutions to Quiz 7

(*June 5, 2008*)

$a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ とするとき (a, b) は開区間すなわち $\{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$ を表すものとする。

1. 関数 $f : \boldsymbol{R} \to (0,1)$ $(x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1})$ は全単射であることを示せ。

   解. e^x は単調増加ですから、f は単調減少。従って、単射。$x \to -\infty$ の時、$e^x \to 0$ だから $f(x) \to 1$。また $x \to \infty$ のとき $e^x \to \infty$ だから $f(x) \to 0$。したがって、$0 < y < 1$ とすると、$x_1 < x_2$ で、$f(x_1) > y$ かつ $f(x_2) < y$ となるものがある。f は連続だから、連続関数に関する中間値の定理によって、$f(x) = y$ となる x が存在する。したがって、f は全射。（これより $\boldsymbol{R} \sim (0,1)$ が分かった。） ■

   注. 無論、単調減少を示すには、導関数を考えるのも一つです。

   $$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} < 0.$$

   また、逆関数 $g(y)$ は、$y = 1/(e^{g(y)} + 1)$ を解いて、$e^{g(y)} = 1/y - 1 = (1-y)/y$ だから

   $$g : (0,1) \to \boldsymbol{R} \ (y \mapsto \log(1-y) - \log(y))$$

   である。$f \circ g = id_{(0,1)}$ を確かめて、f が全射であることを得ることも、$g \circ f = id_{\boldsymbol{R}}$ を確かめて f が単射であることを得ることもできる。

2. $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ とするとき $\boldsymbol{R} \sim (a, b)$ すなわち $\boldsymbol{R}$ と (a, b) は対等（個数同値）であることを具体的な全単射の存在を示すことにより証明せよ。

   解. 関数 h を次の様に定義する。

   $$h : (0,1) \to (a,b) \ (x \mapsto (b-a)x + a)$$

   すると、h は明らかに全単射であることが分かる。したがって、

   $$h \circ f : \boldsymbol{R} \to (a,b) \ (x \mapsto \frac{b-a}{e^x + 1} + a)$$

   とすれば、全単射の合成関数だから全単射で、目的のものが得られた。 ■

   注. 単調増加関数の方が自然だと考えれば、e^x を e^{-x} で置き換えればよい。他には、$\arctan(x)$ を使う方法もあります。考えてみて下さい。

3. $\boldsymbol{Q}^+ = \{r \in \boldsymbol{Q} \mid r > 0\}$ とする。単射 $g : \boldsymbol{Q}^+ \to \boldsymbol{N}$ の存在を示し、それを用いて $\boldsymbol{Q}^+ \sim \boldsymbol{N}$ すなわち $\boldsymbol{Q}^+$ と $\boldsymbol{N}$ は対等（個数同値）であることを証明せよ。

   解. $r \in \boldsymbol{Q}^+$ とすると、$r = p(r)/q(r)$, $p(r), q(r) \in \boldsymbol{N}$ かつ、$\gcd(p(r), q(r)) = 1$ と一意的に書くことができる。そこで、

   $$g : \boldsymbol{Q}^+ \to \boldsymbol{N} \ (r \mapsto 2^{p(r)-1}(2q(r) - 1))$$

   とすると、この関数は、$g_1 : \boldsymbol{Q}^+ \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ $(r \mapsto (p(r), q(r)))$ と、授業で説明した全単射 $g_2 : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ $((m,n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1))$ との合成写像 $g = g_2 \circ g_1$ で、g_1 が単射、g_2 が前者であることから、g は単射である。なを、g_1 が単射であることは、$g_3 : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Q}^+$ $((m,n) \mapsto m/n)$ とすると、$g_3 \circ g_1 = id_{\boldsymbol{Q}^+}$ であることからも明らか。

   また、$\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{Q}^+$ が無限集合であることは明らかで、命題 7.2 (1) より $\boldsymbol{Q}^+$ は可算集合である。可算集合はある自然数 n について $I(n)$ と対等かまたは、$\boldsymbol{N}$ と対等な集合だったから、$\boldsymbol{Q}^+ \sim \boldsymbol{N}$ である。 ■

   注. g_1 が単射であることが分かれば、$\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \sim \boldsymbol{N}$ だったから、この対等の元となる全単射との合成写像が、単射となることは明らかであろう。

Quiz 8

(*Due at 9:00 p.m. on Thursday, June 12, 2008*)

Division: **ID#:** **Name:**

以下において、$A = \{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ とする。

1. 一般に集合 X と Y において $|X| = |Y|$ と、$|X| \leq |Y|$ の定義を述べよ。

2. 上の定義のもとで $|\boldsymbol{R}| \leq |A|$ であることを示せ。(Hint: Quiz 7)

3. $|\boldsymbol{R}| = |A|$ であることを示せ。 定理を用いるときには、定理の主張も明記せよ。

4. $|A \times A| = |\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}|$ であることを示せ。

Message 欄：ICU を選んだ理由は何ですか。ICU をより魅力的にするにはどうしたら良いでしょうか。

Solutions to Quiz 8

(*June 12, 2008*)

以下において、$A = \{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ とする。

1. 一般に集合 X と Y において $|X| = |Y|$ と、$|X| \leq |Y|$ の定義を述べよ。

   解. X から Y への全単射 $f : X \to Y$ が存在するとき、$|X| = |Y|$ であり、X から Y への単射 $g : X \to Y$ が存在するとき、$|X| \leq |Y|$ である。したがって、定義から $|X| = |Y|$ ならば $|X| \leq |Y|$ である。 ■

2. 上の定義のもとで $|\boldsymbol{R}| \leq |A|$ であることを示せ。(Hint: Quiz 7)

   解. Quiz 7 の関数 $f : \boldsymbol{R} \to (0, 1)$ $(x \mapsto 1/(e^x + 1))$ は全単射であった。したがって、

   $$g : \boldsymbol{R} \to [0, 1] = A \ (x \mapsto 1/(e^x + 1)))$$

   は単射である。したがって、$|\boldsymbol{R}| \leq |A|$ である。 ■

3. $|\boldsymbol{R}| = |A|$ であることを示せ。 定理を用いるときには、定理の主張も明記せよ。

   解.

   $$h : A \to \boldsymbol{R} \ (x \mapsto x)$$

   は A から $\boldsymbol{R}$ への単射である。したがって、$|A| \leq |\boldsymbol{R}|$。カントール・ベルンシュタイン（教科書ではシュレーダー・ベルンシュタイン）の定理より、集合 X, Y について $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば $|X| = |Y|$ であるから、2 と 上で述べたことより、$|A| = |\boldsymbol{R}|$ である。■

4. $|A \times A| = |\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}|$ であることを示せ。

   解. 前問 3 より $|A| = |\boldsymbol{R}|$ であり、A から $\boldsymbol{R}$ への全単射 $\phi : A \to \boldsymbol{R}$ が存在する。ここで、

   $$\Phi : A \times A \to \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \ ((a, b) \mapsto (\phi(a), \phi(b)))$$

   とすると、$\phi(a) \in \boldsymbol{R}, \phi(b) \in \boldsymbol{R}$ だから Φ は $A \times A$ から $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ への写像（関数）である。ここで $\Phi(a, b) = \Phi(a', b')$ とすると、定義より $(\phi(a), \phi(b)) = \Phi(a, b) = \Phi(a', b') = (\phi(a'), \phi(b'))$ だから、$\phi(a) = \phi(a')$ かつ $\phi(b) = \phi(b')$ である。ここで、ϕ は単射だったから、$a = a'$ かつ $b = b'$ である。すなわち、$(a, b) = (a', b')$ である。すなわち、Φ は単射である。ここで、$(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ とすると、$x, y \in \boldsymbol{R}$ でかつ、$\phi : A \to \boldsymbol{R}$ は全射だから $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$ となる $a, b \in A$ が存在する。すると、$\Phi(a, b) = (\phi(a), \phi(b)) = (x, y)$ だから、Φ は全射である。上で示したことと併せて、$\Phi : A \times A \to \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ は全単射となるから、$|A \times A| = |\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}|$ である。 ■