BCM I : Final 2010

June 23, 2010

Division: **ID#:** **Name:**

1. P, Q, R を命題とする。$(\sim P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ を真理表を完成することにより示せ。 (5 pts)

P	Q	R	$(\sim\ P\ \Rightarrow\ Q)\ \Rightarrow\ R$	$(P\ \Rightarrow\ R)\ \wedge\ (Q\ \Rightarrow\ R))$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

2. 前問の論理同値の式を式の変形によって示せ。 (5 pts)

3. 数列の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在することを、$(\exists a \in \boldsymbol{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \boldsymbol{N})(\forall n \geq M)[|a_n - a| < \varepsilon]$ と定義する。$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在しないことを示すには、何を示せばよいか、ことばで書け。その上で、$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ が存在しないことを示せ。 (10 pts)

Division: **ID#:** **Name:**

4. $a, b \in \boldsymbol{Z}$ とする。次の (i), (ii), (iii) を満たす $d \in \boldsymbol{Z}$ を a, b の最大公約数といい $d = \gcd\{a, b\}$ と書く。(i) $d \geq 0$. (ii) $d \mid a$, $d \mid b$. (iii) $c \mid a$, $c \mid b$ ならば $c \mid d$.

   また、集合 $\{ax + by \mid x, y \in \boldsymbol{Z}\}$ を $\langle a, b\rangle$ と書く。$b \neq 0$ のときは $a = bq + r$ となる $q, r \in \boldsymbol{Z}$ で $0 \leq r < |b|$ を満たすものが存在することは既知とする。

   (a) $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$ とするとき $\gcd\{a, b\} = \gcd\{a - bc, b\}$ であることを示せ。 (5 pts)

   (b) $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$ とするとき $\langle a, b\rangle = \langle a - bc, b\rangle$ であることを示せ。 (5 pts)

   (c) $a, b \in \boldsymbol{Z}$ としたとき、$d = \gcd\{a, b\}$ が存在し、かつある $x, y \in \boldsymbol{Z}$ について $d = ax + by$ と書くことができることを示せ。 (10 pts)

Division: **ID#:** **Name:**

5. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像、$h = g \circ f : X \to Z$ $(x \mapsto g(f(x)))$、$A, B \subseteq X$ とする。正しければ示し、正しくなければ反例をあげよ。

   (a) f が全射ならば、$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. (5 pts)

   (b) f が単射ならば、$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. (5 pts)

   (c) h が単射ならば、f は単射。 (5 pts)

   (d) f が単射、g が全射ならば、h は全単射。 (5 pts)

Division: **ID#:** **Name:**

6. A, B, C を空でない集合とする。

(a) $|A| = |B|$ であることの定義および同値関係の定義をのべ、ここでの $=$ が集合の濃度に関する同値関係であることを示せ。写像に関する性質を利用するときは、その性質も同時に証明すること。 (10 pts)

(b) $|A| \leq |C|$ かつ $|B| \leq |D|$ のとき $|\mathrm{Map}(A, B)| \leq |\mathrm{Map}(C, D)|$ を示せ。 (10 pts)

Division: **ID#:** **Name:**

7. $f:(0,1)\to \boldsymbol{R}\left(x\mapsto \dfrac{1-2x}{x^2-x}\right)$ は全単射であることを示せ。 (10 pts)

8. 閉区間 $[0,1]$ と実数全体 $\boldsymbol{R}$ の濃度が等しいことを示せ。定理を用いるときはその主張および仮定を満たしていることを確認し明記せよ。 (10 pts)

Message 欄: (1) この授業について。特に改善点について。
(2) 数学または他の分野でこれから勉強してみたいこと。

BCM I: Final 2010 Solutions

June 23, 2010

1. P, Q, R を命題とする。$(\sim P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ を真理表を完成することにより示せ。 (5 pts)

P	Q	R	$(\sim$	P	$\Rightarrow$	$Q)$	$\Rightarrow$	R	$(P$	$\Rightarrow$	$R)$	$\wedge$	$(Q$	$\Rightarrow$	$R))$
T	T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F
T	F	T	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	F	F
F	F	T	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T
F	F	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	F

2. 前問の論理同値の式を式の変形によって示せ。 (5 pts)

解.

$$\begin{aligned}
(\sim P \Rightarrow Q) \Rightarrow R &\equiv (\sim(\sim P) \vee Q) \Rightarrow R \qquad [\text{as } X \Rightarrow Y \equiv \sim X \vee Y] \\
&\equiv (P \vee Q) \Rightarrow R \qquad [\text{as } \sim(\sim X) \equiv X] \\
&\equiv \sim(P \vee Q) \vee R \qquad [\text{as } X \Rightarrow Y \equiv \sim X \vee Y] \\
&\equiv (\sim P \wedge \sim Q) \vee R \qquad [\text{by de Morgan}] \\
&\equiv (\sim P \vee R) \wedge (\sim Q \vee R) \qquad [\text{by distribution law}] \\
&\equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \qquad [\text{as } X \Rightarrow Y \equiv \sim X \vee Y]
\end{aligned}$$

3. 数列の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在することを、$(\exists a \in \boldsymbol{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \boldsymbol{N})(\forall n \geq M)[|a_n - a| < \varepsilon]$ と定義する。$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在しないことを示すには、何を示せばよいか、ことばで書け。その上で、$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ が存在しないことを示せ。 (10 pts)

解. 論理式としての否定は $(\forall a \in \boldsymbol{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall M \in \boldsymbol{N})(\exists n \geq M)[|a_n - a| \geq \varepsilon]$

従って、「どんな実数 a に対しても、『どんな自然数 M をとっても、それより大きい自然数 n で $|a_n - a| \geq \varepsilon$ を満たすものがある。』という性質を満たす正の実数 ε が存在する。」（日本語は難しいですね。）

a を任意にとる。$\varepsilon = \frac{1}{4}$ とすると、$|1 - a| > \varepsilon$ か $|-1-a| > \varepsilon$ である。どんな自然数 M をとってもそれより大きい n で $a_n = 1$ となるものも、$a_n = -1$ となるものも存在するので、上の条件をみたし、$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ は存在しない。 ■

（おちついて、言っていることをじっくり把握して下さい。）

4. $a, b \in \boldsymbol{Z}$ とする。次の (i), (ii), (iii) を満たす $d \in \boldsymbol{Z}$ を a, b の最大公約数といい $d = \gcd\{a, b\}$ と書く。(i) $d \geq 0$. (ii) $d \mid a$, $d \mid b$. (iii) $c \mid a$, $c \mid b$ ならば $c \mid d$.

   また、集合 $\{ax + by \mid x, y \in \boldsymbol{Z}\}$ を $\langle a, b \rangle$ と書く。$b \neq 0$ のときは $a = bq + r$ となる $q, r \in \boldsymbol{Z}$ で $0 \leq r < |b|$ を満たすものが存在することは既知とする。

   (a) $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$ とするとき $\gcd\{a, b\} = \gcd\{a - bc, b\}$ であることを示せ。 (5 pts)

   解. まず、一般的に、$d \mid a$ かつ $d \mid b$ ならば、すべての整数 x, y に関して $d \mid xa + yb$。また、$a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = \pm b$[1]。これらを用いる。$d = \gcd\{a, b\}$, $d' = \gcd\{a - bc, b\}$ とする。$d \mid a$ かつ $d \mid b$ だから $d \mid a - bc$ でもあるので、$d \mid d'$ (d' に関する (iii))。また $d' \mid b$ かつ $d' \mid a - bc$ だから $d' \mid (a - bc + bc)$ よって、 $d' \mid a$。これより、$d' \mid d$。$d \mid d'$ かつ $d' \mid d$ で $d \geq 0$. $d' \geq 0$ だから $d = d'$. ■

   (b) $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$ とするとき $\langle a, b \rangle = \langle a - bc, b \rangle$ であることを示せ。 (5 pts)

   解. $x \in \langle a, b \rangle$ とすると定義より $y, z \in \boldsymbol{Z}$ で $x = ax + by$ とかける。ここで $x = (a - bc)x + b(y + cx)$ だから $x \in \langle a - bc, b \rangle$ である。逆に $x \in \langle a - bc, b \rangle$ とする。定義より $y, z \in \boldsymbol{Z}$ で $x = (a - bc)y + bz$ となるものが存在する。ここで $x = ay + b(z - cy)$ だから $x \in \langle a, b \rangle$。したがって $\langle a, b \rangle = \langle a - bc, b \rangle$ が得られた。 ■

   (c) $a, b \in \boldsymbol{Z}$ としたとき、$d = \gcd\{a, b\}$ が存在し、かつある $x, y \in \boldsymbol{Z}$ について $d = ax + by$ と書くことができることを示せ。 (10 pts)

   解. $|b|$ に関する帰納法で示す。$b = 0$ のときは、$d = a$ とおけば d は最大公約数の定義を満たす。また $d = a = a1 + 0$ だから $d = ax + by$ となる $x, y \in \boldsymbol{Z}$ も存在する。$|b| \neq 0$ とする。$a = bq + r$ で $0 \leq r < |b|$ となる $q, r \in \boldsymbol{Z}$ が存在する。$|r| < |b|$ だから、帰納法の仮定により $d = \gcd\{a - bq, b\} = \gcd\{b, r\}$ は存在する。(a) より $d = \gcd\{a, b\}$ も存在する。また、帰納法の仮定により、$d = bz + ry = (a - bq)y + bz \in \langle a - bq, b \rangle$ となる $y, z \in \boldsymbol{Z}$ が存在する。(b) より $d \in \langle a, b \rangle$ で、ある $x, y \in \boldsymbol{Z}$ について $d = ax + by$ と書くことができる。 ■

5. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像、$h = g \circ f : X \to Z$ ($x \mapsto g(f(x))$)、$A, B \subseteq X$ とする。正しければ示し、正しくなければ反例をあげよ。

   (a) f が全射ならば、$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. (5 pts)

   解. 正しくない。$X = \{1, 2\}$, $Y = \{1\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. $f(1) = f(2) = 1$ とすると、$A \cap B = \emptyset$ だから、$f(A \cap B) = \emptyset$。しかし $f(A) = f(B) = \{1\}$ だから $f(A) \cap f(B) = \{1\} \neq \emptyset$。$f$ は全射だから、反例となっている。 ■

   (b) f が単射ならば、$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. (5 pts)

   解. 正しい。$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ は明か。(常に成り立つ。) いま f を単射とする。$y \in f(A) \cap f(B)$ とする。$y \in f(A)$、$y \in f(B)$ だから、$a \in A$, $b \in B$ で $y = f(a) = f(b)$ となるものがある。仮定より f は単射だから $A \ni a = b \in B$ となり $a = b \in A \cap B$ かつ、$y \in f(A \cap B)$ である。したがって、$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$。■

   (c) h が単射ならば、f は単射。 (5 pts)

   解. 正しい。$f(x) = f(x')$ とする。$h(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = h(x')$ で、h は単射だから $x = x'$ となる。これは、f が単射であることを意味する。 ■

   (d) f が単射、g が全射ならば、h は全単射。 (5 pts)

   解. 正しくない。$X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$, $Z = \{1, 2\}$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(2) = 2$ とする。f は単射。g は全射(全単射)です。しかし、$h = g \circ f$ は全射ではありませんから、全単射ではありません。従って反例となっています。 ■

[1] 一つめは明か。二つめは条件から $b = ae$, $a = bf$ となる整数 e, f が存在する。$a = 0$ のときは、$b = 0$ で $b = 0$ のときも $a = 0$ となり結論は正しいから、$a \neq 0 \neq b$ としてよい。すると、$b(1 - fe) = 0$ だから $1 = fe$。これより、$e = \pm 1$, $f = \pm 1$ を得る。

6. A, B, C を空でない集合とする。

(a) $|A| = |B|$ であることの定義および同値関係の定義をのべ、ここでの $=$ が集合の濃度に関する同値関係であることを示せ。写像に関する性質を利用するときは、その性質も同時に証明すること。 (10 pts)

解. 集合 A から 集合 B へ全単射が一つでも存在するときに、$|A| = |B|$ と書く。(A も B も空集合のときは、全単射が一つあると約束する。$0^0 = 1$.)

集合 X 上に定義された関係 R すなわち、$x, y \in X$ に対して、xRy であるかそうでないかが、決まっているとする。このとき、(i) すべての $x \in X$ について xRx、(ii) $x, y \in X$ について xRy ならば yRx が成立し、(iii) $x, y, z \in X$ について xRy かつ yRz ならば xRz が成り立つとき、関係 R を同値関係という。

集合 A について A 上の恒等写像は、全単射だから $|A| = |A|$。$|A| = |B|$ とすると、$f : A \to B$ となる全単射が存在する。$f^{-1} : B \to A$ は全単射だから[2] $|B| = |A|$ である。$|A| = |B|$ かつ $|B| = |C|$ とし、$f : A \to B$, $g : B \to C$ を全単射とする。$g(f(A)) = g(B) = C$ だから $g \circ f$ は A から C への全射。また $g(f(a)) = g(f(a'))$ とすると、g が単射だから $f(a) = f(a')$ また f も単射だから $a = a'$ となり、$g \circ f$ は単射でもあるので、$|A| = |C|$ したがって、同値関係である。 ■

(b) $|A| \le |C|$ かつ $|B| \le |D|$ のとき $|\mathrm{Map}(A, B)| \le |\mathrm{Map}(C, D)|$ を示せ。 (10 pts)

解. A または B が空集合の時は明か。$|A| \le |C|$ かつ $|B| \le |D|$ だから $f : A \to C$ および $g : B \to D$ なる単射が存在する。$d \in D$ を一つとる。$h : A \to B$ に対して、$h^* : C \to D$ を $c \in f(A)$ については、$f(a) = c$ となる a をとり(単射なのでただ一つ)$h^*(c) = g(h(a))$, $c \notin f(A)$ のときは $h^*(c) = d$ とする。このとき、$h \mapsto h^*$ が単射であることを示す。$h^* : C \to D$ であることは明か。$h^* = k^*$ とすると、$a \in A$ について $g(h(a)) = h^*(h(a)) = k^*(h(a)) = g(k(a))$ となる。ここで g は単射だから $h(a) = k(a)$。ここで $a \in A$ は任意だから、$h = k$ となり、上の対応は単射である。 ■

7. $f : (0, 1) \to \boldsymbol{R} \left(x \mapsto \dfrac{1 - 2x}{x^2 - x} \right)$ は全単射であることを示せ。 (10 pts)

解. まず、分母は $x \neq 0$, $x \neq 1$ では 0 とならないので、$(0, 1)$ 上では定義されている。$f(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ だから $(0, 1)$ で二つの単調増加関数の和だから単調増加。したがって単射。また、$x \to 0+$ では $f(x) \to -\infty$、$x \to 1-$ では $f(x) \to \infty$ だから、$y \in (-\infty, \infty)$ とすると、$a, b \in (0, 1)$ で $f(a) < y < f(b)$ となるものがある。f は $(0, 1)$ で連続だから、連続関数に関する中間値の定理より $0 < a < c < b < 1$ で $f(c) = y$ となるものがある。したがって、全射。 ■

8. 閉区間 $[0, 1]$ と実数全体 $\boldsymbol{R}$ の濃度が等しいことを示せ。定理を用いるときはその主張および仮定を満たしていることを確認し明記せよ。 (10 pts)

解. 前問より $f^{-1} : \boldsymbol{R} \to (0, 1) \subset [0, 1]$ は単射である。つぎに、$g : [0, 1] \to (0, 1)$ $(x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})$ を考えると、一次関数だから単射(このばあいは単調増加だから)また $g([0, 1]) = [\frac{1}{4}.\frac{3}{4}] \subset (0, 1)$ だから単射である。そこで、Cantor-Bernstein の定理により、$\boldsymbol{R}$ と $[0, 1]$ の間に全単射が存在する。 ■

[2] 一般に、$f : X \to Y$ が単射なら、単射 $g : f(X) \to X$ で $f \circ g = id_{f(X)}$ となるものが存在する。$Y = f(X)$ ならば(つまり全単射なら)$g \circ f = id_X$ も成立する。$y \in f(X)$ については、$x \in X$ で $y = f(x)$ となるものが存在するが、f が単射であることより、x はただ一つに決まる。したがって、$y \in f(X)$ に $y = f(x)$ となる x を対応させるとこれは、写像となる。それを $g : f(Y) \to X$ と書く。定義より、$f(g(y)) = y$ だから、$f \circ g = id_{f(X)}$ である。これより g は単射となるが、f が全単射であるときは、$Y = f(X)$ だから $g(f(x)) = x$ は明らかだから、$g \circ f = id_X$ となる。このようにして決まる写像を f の逆写像とよび f^{-1} と表す。

数学通論 I を受講したみなさんへ

Grading Policy

最初に配布したシラバスにあるように、Take-Home Midterm (20%) 、演習 (Recitation) (20%)（9 回分割り当てました）、宿題 (Homework) (20%) （7 回、殆どの単元で各 3 問以上の提出を求めました）、期末試験 (Final) (40%) （6 月 23 日に実施）

教員によって考え方はことなりますが、私は、授業科目というより、コースという考え方が、学士課程教育では大切だと思っています。このコースで 10 週間かけてどれだけ学んだかが重要です。学んだ内容も、学び全体の中でそれをどのように位置づけるかも、ひとそれぞれでしょう。そこで、今までの課題を丁寧に提出し、演習の問題の大部分を黒板で発表してきた人は単位を落とすことはありません。ただし、この評価の仕方では、期末試験の割合を高くしてあります。数学において、学んだ数学を試験で表現できることはとても大切だと考えているからです。

Final および提出物は週明けには返却できると思います。NetCommons に書きます。9 月の履修登録日をすぎたら研究室前の椅子の上に置いておきます。

専門の数学の最初のコースはどうでしたか。楽しめましたか。お疲れ様。

After BCM I

まずは、夏の数学セミナーへ参加して下さると嬉しいですね。(7/5-8 ICU 那須キャンパス)。今年の教科書は「『無限と連続』の数学」瀬山士郎著、大体が、数学通論 II の内容です。最近は、たくさんよい数学の読み物がでています。今年の「数学セミナー」 4 月号に、新入生読書案内を書きましたので、興味があるかたは、図書館で見てみて下さい。数学通論に関連して、ちょっと堅めに夏やすみのお薦めを書きます。

1. 数学通論 III の参考書となっている「集合と位相」内田伏一著、裳華房 の前半が集合論です。
2. 数学通論 II に関係する、高木貞治「解析概論」を最初からじっくり読むのがお薦め。
3. 線型代数特論（旧・線形代数学 III）を履修した人も多いと思います。佐武一郎著「線型代数入門」を最初からじっくり読むのもお薦め。
4. もう少し簡単に取り組めそうなのは、「集合への 30 講」志賀浩二著　朝倉書店。
5. 公理的集合論入門をかじってみたい人には、「新装版：集合とはなにか (はじめて学ぶ人のために)」竹内外史著、講談社。

一年生の夏休みは岩村聯著「束論」を読み通しました。これが数学の本で初めて読み通したものでした。「束論」はあまり授業で取り扱われませんが、私が大学生のころに習った教授の方々の世代は「束論」がはやっていたようで、授業中にも時々その話が出たので読んでみたのでした。

二年生の夏は記憶が定かではありませんが松坂和夫著「集合と位相」を読んだと思います。全部は読まなかったかも知れません。個人的には、上の 1 にかわるものとしておすすめです。しかし恐らく絶版。

三年生の夏には「集合論入門」赤摂也著、培風館（ISBN4-563-00301-8, 1957.1.25）を短期間に読み通しました。集合と位相関係の本が並びましたが、無論、他にも読みました。Serge Lang の Algebra は一年生の秋から、3 人で自主ゼミをして読み、4 年まで続けました。完全には終わりませんでした。ポントリャーギンの「連続群論」上下も 3 人での自主ゼミをながいことしましたが、上巻しかゼミでは終わりませんでした。ポントリャーギンの「常微分方程式」はかなり進みましたが、読み終わったかどうかはあまりよく覚えていません。コルモゴロフ・フォミーンの「関数解析の基礎」は読み始めましたが、問題が難しく、あまり進みませんでした。

夏休みにじっくり一冊、数学の本を読むことに時間をかけることができれば、たとえ、読む量は少なくても、大きな価値があると思いますよ。数学で学んだことは何年かたって、誤りだったということも、時代遅れになることもありません。また、苦労して読む経験はすべて脳のトレーニングになっているハズです。数学を楽しみましょう。

鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*)