

BCMM I : Final 2007

June 19, 2007

ID#:

Name:

1. 「Mid で悪い点をとらないと勉強しない。」の下線を引いた二つの否定を肯定文に変えるために対偶の考え方をを用いる。命題 P を「Mid で悪い点をとる」命題 Q を「勉強する」とする。上の文章は「 $(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$ 」が真であることを言っているから、対偶は「 $Q \Rightarrow P$ 」したがって「勉強すると Mid で悪い点をとる」。これは常識から考えて間違っている。次の問いに答えよ。

(a) 何が間違った推論の原因かを述べよ。

(b) 否定を取り除いた正しい命題を述べよ。

2. 次のそれぞれの命題が真ならば証明し、偽ならば反証を与えよ。ただし、 \mathbf{Z} を整数の集合とし、 $a, b \in \mathbf{Z}$ のとき、 $a \equiv b$ は $(\exists q \in \mathbf{Z})[b - a = 8q]$ すなわち、 $b - a$ が整数の範囲で 8 で割り切れることを表すものとする。

(a) $\forall x \in \mathbf{Z}$ に対し $6x \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0$ 。

(b) $\forall x, \forall y \in \mathbf{Z}$ に対して $3x^2 + 5y^2 \equiv 0 \Rightarrow x^2 \equiv y^2$ 。

3. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像、 $h = g \circ f: X \rightarrow Z (x \mapsto g(f(x)))$ とする。
- (a) f と g が共に単射ならば、 h は単射であることを示せ。
 - (b) h が全射ならば g は全射であることを示せ。
 - (c) $A \subseteq X$ とするとき一般には $f(X - A) \subseteq Y - f(A)$ は成立するとは限らない。成立しないような $X, Y, A, f: X \rightarrow Y$ の例をあげよ。

- (d) f が単射ならば、 $A \subseteq X$ とするとき常に $f(X - A) \subseteq Y - f(A)$ であることを示せ。

4. 集合 A 上の関係 \sim が同値関係であるとする。すなわち、(i) $(\forall a \in A)[a \sim a]$, (ii) $(\forall a \in A)(\forall b \in A)[a \sim b \Rightarrow b \sim a]$, (iii) $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)[(a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow (a \sim c)]$ を満たしているとする。 $c \in A$ に対して、 $[c] = \{x \in A \mid x \sim c\}$ とすると、 $a, b \in A$ に対して、 $b \in [a] \Rightarrow [a] = [b]$ が成立することを示せ。

5. α を実数とし $a_{n+2} = 2\alpha a_{n+1} - \alpha^2 a_n$ を満たす数列 a_0, a_1, a_2, \dots の一般項 a_n は、 $a_n = \alpha^{n-1}(na_1 - (n-1)\alpha a_0)$ ($n = 1, 2, \dots$) で与えられることを示せ。

6. A, B, C を空でない集合とする。

(a) $|A| = |B|$ であることの定義と、 $|B| \leq |C|$ であることの定義と、 $|B| < |C|$ であることの定義を書け。

(b) $|A| = |B|$ かつ $|A| \leq |C|$ ならば $|B| \leq |C|$ であることを定義に従って示せ。

7. 実数直線上の閉区間 $[0, 1]$ と 开区間 $(0, 1)$ の濃度は等しいことを示せ。定理を用いるときは定理の主張も同時に記すこと。

8. \mathbf{N} を自然数の集合とすると、 $|\mathbf{N}| < |S|$ となる集合 S が存在することを示せ。

9. X と Y を集合で $X \cap Y = \emptyset$ となるものとする。このとき、

$$f: P(X \cup Y) \rightarrow P(X) \times P(Y) (Z \mapsto (X \cap Z, Y \cap Z))$$

は全単射であることを示せ。

Message 欄: 「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと

(1) この授業について。特に改善点について。

(2) ICU の教育一般について。特に改善点について。