Final 2004 Solutions

June 25, 2004

1. (a) P, Q を命題とするとき、$P \oplus Q$ の真理表を作れ。(答のみ)

   (b) P, Q, R を命題とするとき、次の式が成立するかどうか決定せよ。

$$(P \oplus Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \oplus (Q \wedge R)$$

解.

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	$\boldsymbol{F}$
T	F	$\boldsymbol{T}$
F	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	$\boldsymbol{F}$

P	Q	R	$(P \oplus Q)$	$\wedge\ R$	$(P \wedge R)$	$\oplus$	$(Q \wedge R)$
T	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$	T
T	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$	F
T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$	F
T	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$	F
F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$	F
F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$	F
F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$	F

(b) すべての真理値が等しいから上の式が成立する。

2. X を集合 A, B, C, D をその部分集合とする。このとき次のそれぞれの式が常に成立すれば証明し、常には成り立たない場合は反例（成り立たない例）を書け。その場合は成り立たないことも説明すること。

   (a) $(A \times B) \setminus (C \times D) \subset ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

   解. 成立する。

   $(a, b) \in (A \times B) \setminus (C \times D)$ とする。$(a, b) \notin C \times D$ だから $a \notin C$ または $b \notin D$ である。したがって、

$$(a, b) \in (A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D).$$

   よって、$(A \times B) \setminus (C \times D) \subset ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$ が成立する。

   (b) $(A \times B) \setminus (C \times D) \supset ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

解. 成立する。

(i) $(a, b) \in (A \setminus C) \times B$ とする。$a \in A \setminus C$ である。したがって、$(a, b) \notin C \times D$ である。よって、$(a, b) \in (A \times B) \setminus (C \times D)$ が成立する。

(ii) また、$(a, b) \in A \times (B \setminus D)$ とする。$b \in B \setminus D$ である。したがって、$(a, b) \notin C \times D$ である。よって、$(a, b) \in (A \times B) \setminus (C \times D)$ が成立する。

(i), (ii) より、$((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D)) \subset (A \times B) \setminus (C \times D)$ が成立する。

（直積集合の部分集合という概念自体が難しかったかも知れません。）

3. f を集合 X から集合 Y への写像。A を X の部分集合、B を Y の部分集合とする。このとき次のそれぞれの式が常に成立すれば証明し、常には成り立たない場合は反例（成り立たない例）を書け。その場合は成り立たないことも説明すること。

(a) $f^{-1}(B \cup f(A)) \subset f^{-1}(B) \cup A$

解. 成立しない。

$B = \emptyset$, $A = \{a\}$, $X = \{a, b\}$, $Y = \{c\}$ とし、$f(a) = f(b) = c$ で f を定義する。このとき、

$$f^{-1}(B \cup f(A)) = f^{-1}(f(A)) = \{a, b\} = X \not\subset \{a\} = \emptyset \cup \{a\} = f^{-1}(B) \cup A.$$

（反例をあげる時は、X, Y, A, B, f すべてを定義しないと意味をなしません。）

(b) $f^{-1}(B \cup f(A)) \supset f^{-1}(B) \cup A$

解. 成立する。

(i) $x \in A$ とすると、$f(x) \in f(A) \subset B \cup f(A)$ だから、$x \in f^{-1}(B \cup f(A))$ である。

(ii) また $x \in f^{-1}(B)$ とすると、$f(x) \in B \subset B \cup f(A)$ である。したがって、$x \in f^{-1}(B \cup f(A))$ である。

(i) および (ii) より $f^{-1}(B) \cup A \subset f^{-1}(B \cup f(A))$ が成立する。

4. f を集合 X から集合 Y への写像、g を集合 Y から 集合 Z への写像とする。h を X から Z の写像で $x \in X$ に対して $h(x) = g(f(x))$ と定義したものとする。このとき、以下が成立すれば証明し、つねには成立しない時は反例をあげよ。

(a) f および g が単射ならば、h も単射である。

解. 成立する。

$x, x' \in X$ に対し $h(x) = h(x')$ とする。$g(f(x)) = h(x) = h(x') = g(f(x'))$ である。ここで g は単射だから、$g(f(x)) = g(f(x'))$ より $f(x) = f(x')$ を得る。また f も単射だから、$f(x) = f(x')$ より $x = x'$ を得る。$h(x) = h(x')$ から $x = x'$ が得られたから、h は単射である。

(b) h が単射ならば f は単射である。

解. 成立する。

$x, x' \in X$ に対し $f(x) = f(x')$ とする。g で写すと、$h(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = h(x')$ である。h は単射だから $h(x) = h(x')$ より $x = x'$ を得る。$f(x) = f(x')$ から $x = x'$ が得られたから、f は単射である。

(c) h が単射ならば g は単射である。

解. 成立しない。

$X = \{a\}$, $Y = \{b, c\}$, $Z = \{d\}$, $f(a) = b$, $g(b) = g(c) = d$ とする。$h(a) = d$ で h は単射である。しかし、g は単射ではない。

（これらは、すべて基本的ですから、事実も、証明もなれることができるといいですね。すべて全射に置き換えるとどうなりますか。）

5. X を集合とするとき、X から $P(X)$ への全射は存在しないことを背理法で証明するため、$f : X \to P(X)$ なる全射があるとする。$A = \{a \in X \mid a \notin f(a)\}$ とすると $A \in P(X)$ であるが、$f(x) = A$ となる $x \in X$ は存在しないことを丁寧に説明せよ。

解. $f(x) = A$ と仮定する。$x \in f(x)$ とすると、A の定義より、$x \notin A = f(x)$ となって矛盾。一方、$x \notin f(x)$ とすると、A の定義より、$x \in A = f(x)$ これは、矛盾である。$x \in f(x)$ からも $x \notin f(x)$ からも矛盾が得られたから、$f(x) = A$ となる x は存在しないことが証明された。すなわち、X から $P(X)$ への全射は存在しない。

6. 集合の濃度に関する以下の問いに答えよ。

(a) 一般に集合 A, B について $|A| = |B|$ であることの定義をのべよ。また、高々可算な集合とはどのような集合を意味するか述べよ。

解. A から B への全単射が存在するとき、$|A| = |B|$ すなわち、A と B の濃度が等しいという。

高々可算な集合とは、n を非負の整数とするとき、$\{1, 2, \ldots, n\}$ または、自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ との間に全単射が存在するものをいう。

他にも定義を書くと、高々可算な集合とは、自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ の部分集合との間に、全単射が存在するものをいう。集合 A から自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ へ単射が存在するとき、A を高々可算な集合というとしても良い。さらに、A の濃度が有限であるか、または、$\boldsymbol{N}$ の濃度と等しいとき A の濃度は高々可算であるというといってもよい。A の元に、$1, 2, 3, \ldots$ と番号をつけることができるというのも、感覚としては正しいですが、日常語を多用するのは危険が伴うことも理解して下さい。集合、写像、単射、全射などを定義し、それぞれが等しいとはどういうことかを丁寧に扱ったのは、そのためです。）

(b) $A = B \cup C$ かつ $B \cap C = \emptyset$ で $|B| = |\boldsymbol{N}|$ かつ C が高々可算な集合ならば $|A| = |\boldsymbol{N}|$ であることを証明せよ。

解. $C = \emptyset$ とすると、$A = B$ だから結果は明らか。したがって $C \neq \emptyset$ とする。$|B| = |\boldsymbol{N}|$ だから、$\boldsymbol{N}$ から B への全単射 f がある。$f(i) = b_i$ とする。また C は高々可算だから、正の整数 n について、$\{1, 2, \ldots, n\}$ から B への全単射か、または $\boldsymbol{N}$ から B への全単射がある。この全単射を g と書き、$g(i) = c_i$ とする。まずは、C が有限 $|C| = n$ のときは、

$$h : A = B \cup C \to \boldsymbol{N}\, (c_i \mapsto i,\ b_i \mapsto n + i)$$

とすると、全単射である。C が有限ではないときは、

$$h : A = B \cup C \to \boldsymbol{N}\, (c_i \mapsto 2i - 1,\ b_i \mapsto 2i + 2)$$

とすると、全単射である。したがって、$|A| = |\boldsymbol{N}|$ である。

（上の証明は最初の定義を使っています。他の定義を使うと、作業が増えるか、または、何らかの定理を使うことになります。それぞれそれほど難しいステップではありませんが、証明を書くのはご存知のように簡単ではありませんね。他の定義の場合にどうなるか、考えてみて下さい。）

(c) $A = B \cup C$ かつ $B \cap C = \emptyset$ で $\boldsymbol{N} \subset B$ かつ C が高々可算な集合ならば $|A| = |B|$ であることを証明せよ。

解. $D = B \setminus \boldsymbol{N}$ とする。すると、$B = D \cup \boldsymbol{N}$、$D \cap \boldsymbol{N} = \emptyset$。$\boldsymbol{N} \cap C \subset B \cap C = \emptyset$ だから、(b) より $|\boldsymbol{N} \cup C| = |\boldsymbol{N}|$ である。特に、$\boldsymbol{N} \cup C$ から $\boldsymbol{N}$ への全単射 f が存在する。$A = B \cup C = D \cup \boldsymbol{N} \cup C$ かつ、$B = D \cup \boldsymbol{N}$ である。

$$D \cap (\boldsymbol{N} \cup C) = (D \cap \boldsymbol{N}) \cup (D \cap C) \subset \emptyset \cup (B \cap C) = \emptyset$$

だから $g : A \to B$ を $x \in D$ のとき、$g(x) = x$、$x \in \boldsymbol{N} \cup C$ のとき、$g(x) = f(x)$ とすれば、f が全単射であることより、g も全単射であることがわかります。

（演習で、何度も、何度も出てきたので出してみましたが、ちょっと難しかったかな。）

(d) $|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{Z}|$ を証明せよ。

解. $C = \{0, -1, -2, \ldots\}$ は $i \mapsto -i + 1$ とすれば、$|C| = |\boldsymbol{N}|$ であることがわかる。(c) で $A = \boldsymbol{Z}$、$B = \boldsymbol{N}$ で C は上のものとすると、C は高々可算だから（実際には可算無限）条件が満たされており、$|\boldsymbol{Z}| = |\boldsymbol{N}|$ が証明できた。

7. (a) 一般に集合 A, B において $|A| \leq |B|$ であることの定義をのべ、$|\boldsymbol{R}| \leq |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{R}|$ であることを証明せよ。

解. 集合 A から 集合 B へ単射があるとき、$|A| \leq |B|$ であるという。

$$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{R}\, (x \mapsto (1, r))$$

とすると、f は単射だから、$|\boldsymbol{R}| \leq |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{R}|$ である。

(b) $|\boldsymbol{R}| \geq |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{R}|$ であることを証明せよ。

解. $\tan^{-1}$ は $\boldsymbol{R}$ から $(-\pi/2, \pi/2)$ への全単射であるから、

$$g : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}\,((n,x) \mapsto (n-1)\pi + \tan^{-1} x)$$

とすると、$g(n,x) \in ((n-\frac{3}{2})\pi, (i-\frac{1}{2})\pi)$ となり、g は単射である。

（$\boldsymbol{R}$ は $(-\pi/2, \pi/2)$ に全単射に写されることを知っていれば、この区間をずらしていけばいいわけです。）

8. $(R, +, \cdot)$ を単位元をもつ環とする。また、加法 $+$ に関する単位元を 0 で、乗法 $\cdot$ に関する単位元を 1 で表すとする。$a \in R$ のとき a の加法 $+$ に関する逆元を $-a$ で表すものとする。このとき、以下を証明せよ。式の変形においては、理由も述べること。

(a) すべての $a \in R$ に対して $a \cdot 0 = 0$。

解.

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= 0 + a \cdot 0 = (-(a\cdot 0) + a \cdot 0) + a \cdot 0 \qquad \text{（0 を加えた）} \\ &= -(a\cdot 0) + (a\cdot 0 + a\cdot 0) = -(a\cdot 0) + a\cdot(0+0) \qquad \text{（結合法則と、分配法則）} \\ &= -(a\cdot 0) + a\cdot 0 = 0 \qquad \text{（0 の性質と、加法に関する逆元の定義）} \end{aligned}$$

同様にして $0 \cdot a = 0$ も成立することを注意しておく。これは問題が悪いですね。$0 \cdot a = 0$ を証明すべきでした。美しくないですね。次の問題参照。）

(b) すべての $a \in R$ に対して $(-1) \cdot a = -a$。

解.

$$\begin{aligned} -a &= (-a) + 0 = (-a) + 0 \cdot a \qquad \text{（$0\cdot a = 0$ を用いた）} \\ &= (-a) + (1 + (-1)) \cdot a = (-a) + (1 \cdot a + (-1) \cdot a) \qquad \text{（分配法則）} \\ &= (-a) + (a + (-1)\cdot a) = ((-a) + a) + (-1) \cdot a \\ &\quad \text{（1 の乗法の単位元としての性質と、結合法則）} \\ &= 0 + (-1) \cdot a = (-1) \cdot a. \end{aligned}$$

9. $a, b \in \boldsymbol{N}$ とする。

(a) a, b の最小公倍数の定義を書け。以下 a, b の最小公倍数を $a \circ b$ で表すことにする。次の命題が真かどうか判定せよ。

$$(\exists e \in \boldsymbol{N})(\forall a \in \boldsymbol{N})[e \circ a = a \circ e = a]$$

解. a, b の共通の倍数の中で最小のものを a, b の最小公倍数という。

$e = 1 \in \boldsymbol{N}$ とすると、自然数 a と 1 の最小公倍数は a だから $1 \circ a = a \circ 1 = a$ が成立するので、条件を満たす自然数が存在することになり、命題は真である。

(b) $(\boldsymbol{N}, \circ)$ は結合法則を満たすか、単位元はあるか、各元に対して逆元があるかを判定せよ。

解. $(a \circ b) \circ c$ も $a \circ (b \circ c)$ はともに、a, b, c の共通の倍数の中で一番小さいものなので、等しい。したがって、結合法則は成り立つ。

(a) より 1 が単位元となる。

$a \circ b = 1$ とすると、1 は a, b の倍数だから、$a = b = 1$ となる。したがって、逆元を持つのは、1 のみに限る。

Final 2004

June 22, 2004

いくつかの定義：

- 一般に命題 P、Q に対して、$P \oplus Q = (P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge Q))$ と定義する。
- 一般に集合 X の部分集合全体を $P(X)$ で表す。空集合を $\emptyset$ で表すと、$\emptyset \in P(X)$ である。$A, B \in P(X)$ に対して $A \times B = \{(a,b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$ とする。$A \times B \subset X \times X$ である。

復習： 以下は言葉の定義を確認するためのものであり、定義として書いているものではありません。

- $\boldsymbol{N}$ は自然数全体の集合、$\boldsymbol{Z}$ は整数全体の集合、$\boldsymbol{R}$ は実数全体の集合を表す。
- 集合 A の濃度（基数）を $|A|$ で表す。
- 演算 $\circ$ が定義された集合 A は $\circ$ に関して結合法則が成り立ち、単位元を持ち、A の各元に逆元が存在する時、$(A, \circ)$ は群をなすという。
- 演算 $+$ と $\cdot$ が定義された集合 R が、$+$ に関して可換群となり、$\cdot$ に関しては結合法則を満たし、単位元をもち、左右分配法則を持つとする。さらに、$+$ に関する単位元と $\cdot$ に関する単位元が相異なる時、$(R, +, \cdot)$ を単位元を持つ環という。

1. (a) P, Q を命題とするとき、$P \oplus Q$ の真理表を作れ。(答のみ)

   (b) P, Q, R を命題とするとき、次の式が成立するかどうか決定せよ。

$$(P \oplus Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \oplus (Q \wedge R)$$

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

P	Q	R	$(P \oplus Q) \wedge R$	$(P \wedge R) \oplus (Q \wedge R)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

2. X を集合 A, B, C, D をその部分集合とする。このとき次のそれぞれの式が常に成立すれば証明し、常には成り立たない場合は反例（成り立たない例）を書け。その場合は成り立たないことも説明すること。

   (a) $(A \times B) \setminus (C \times D) \subset ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

   (b) $(A \times B) \setminus (C \times D) \supset ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

3. f を集合 X から集合 Y への写像。A を X の部分集合、B を Y の部分集合とする。このとき次のそれぞれの式が常に成立すれば証明し、常には成り立たない場合は反例（成り立たない例）を書け。その場合は成り立たないことも説明すること。

   (a) $f^{-1}(B \cup f(A)) \subset f^{-1}(B) \cup A$

(b) $f^{-1}(B \cup f(A)) \supset f^{-1}(B) \cup A$

4. f を集合 X から集合 Y への写像、g を集合 Y から 集合 Z への写像とする。h を X から Z の写像で $x \in X$ に対して $h(x) = g(f(x))$ と定義したものとする。このとき、以下が成立すれば証明し、つねには成立しない時は反例をあげよ。

   (a) f および g が単射ならば、h も単射である。

   (b) h が単射ならば f は単射である。

   (c) h が単射ならば g は単射である。

5. X を集合とするとき、X から $P(X)$ への全射は存在しないことを背理法で証明するため、$f : X \to P(X)$ なる全射があるとする。$A = \{a \in X \mid a \notin f(a)\}$ とすると $A \in P(X)$ であるが、$f(x) = A$ となる $x \in X$ は存在しないことを丁寧に説明せよ。

6. 集合の濃度に関する以下の問いに答えよ。

   (a) 一般に集合 A, B について $|A| = |B|$ であることの定義をのべよ。また、高々可算な集合とはどのような集合を意味するか述べよ。

   (b) $A = B \cup C$ かつ $B \cap C = \emptyset$ で $|B| = |\boldsymbol{N}|$ かつ C が高々可算な集合ならば $|A| = |\boldsymbol{N}|$ であることを証明せよ。

   (c) $A = B \cup C$ かつ $B \cap C = \emptyset$ で $\boldsymbol{N} \subset B$ かつ C が高々可算な集合ならば $|A| = |B|$ であることを証明せよ。

   (d) $|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{Z}|$ を証明せよ。

7. (a) 一般に集合 A, B において $|A| \leq |B|$ であることの定義をのべ、$|\boldsymbol{R}| \leq |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{R}|$ であることを証明せよ。

   (b) $|\boldsymbol{R}| \geq |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{R}|$ であることを証明せよ。

8. $(R, +, \cdot)$ を単位元をもつ環とする。また、加法 $+$ に関する単位元を 0 で、乗法 $\cdot$ に関する単位元を 1 で表すとする。$a \in R$ のとき a の加法 $+$ に関する逆元を $-a$ で表すものとする。このとき、以下を証明せよ。式の変形におていは、理由も述べること。

   (a) すべての $a \in R$ に対して $a \cdot 0 = 0$。

   (b) すべての $a \in R$ に対して $(-1) \cdot a = -a$。

9. $a, b \in \boldsymbol{N}$ とする。

   (a) a, b の最小公倍数の定義を書け。以下 a, b の最小公倍数を $a \circ b$ で表すことにする。次の命題が真かどうか判定せよ。

   $$(\exists e \in \boldsymbol{N})(\forall a \in \boldsymbol{N})[e \circ a = a \circ e = a]$$

   (b) $(\boldsymbol{N}, \circ)$ は結合法則を満たすか、単位元はあるか、各元に対して逆元があるかを判定せよ。

Message 欄:　「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと
(1) この授業について。特に改善点について。
(2) ICU の教育一般について。特に改善点について。