Algebra I : PROBLEMS

1 群の定義と例

1.1 G を半群とする。$x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ の積を作るときどのように掛け合わせてももとの順序を入れかえない限り同じ積が得られることを示せ。(一般結合法則)

1.2 G を半群とする。このとき、G が、群であることと、次の (1)、(2) を満たすことは同値であることを示せ。

(1) G の元 e で、G の任意の元 x に対して、$ex = x$ を満たすものが存在する。

(2) G の任意の元 a に対し、$a'a = e$ を満たす元 $a' \in G$ が存在する。

1.3 G を半群とする。このとき、G が、次の (1)、(2$'$) を満たすとする。

(1) G の元 e で、G の任意の元 x に対して、$ex = x$ を満たすものが存在する。

(2$'$) G の任意の元 a に対し、$aa' = e$ を満たす元 $a' \in G$ が存在する。

このとき、G は、必ずしも群にならないことを示せ。(反例をあげよ。) さらに、$H = Ge$ と置けば H は、群となることを示せ。

1.4 H と K を群とする。G を H と K の直積集合 $H \times K = \{(h,k) \mid h \in H, k \in K\}$ に、演算を $(h_1,k_1)(h_2,k_2) = (h_1h_2, k_1k_2)$ で定義したものすると、G は、群になることを示せ。

1.5 x と、y で生成された群、$G =< x, y >$ は、位数が 4 で、$x^2 = y^2 = 1$ を満たすとする。このとき、G の乗積表をつくれ。この群を、Klein の四元群という。

1.6 x と、y で生成された群、$G =< x, y >$ は、位数が 8 で、$x^4 = y^2 = (yx)^2 = 1$ を満たすとする。このとき、G の乗積表を作れ。より一般に、$x^n = y^2 = (yx)^2 = 1$ を満たす 2 元 x, y で生成された位数 $2n$ の群 $< x, y >$ を、二面体群 D_{2n} と呼ぶ。

1.7 x と、y で生成された群、$G =< x, y >$ は、位数が 8 で、$x^2 = y^2, y^{-1}xyx = 1$ を満たすとする。このとき、G の乗積表を作れ。より一般に、$x^n = y^2, y^{-1}xyx = 1$ を満たす 2 元 x, y で生成された位数 $2n$ の群 $< x, y >$ を、一般四元数群 Q_{4n} と呼ぶ。

1.8 $\boldsymbol{Z}_{15}$ は、乗法に関して、モノイドになるが、この単数群 $U(\boldsymbol{Z}_{15})$ の乗積表を作れ。一般に、$U(\boldsymbol{Z}_n)$ を、$\boldsymbol{Z}_n^*$ と書き、既約剰余類群と呼ぶ。

2　部分群

2.1 H を、群 G の空でない部分集合とする。このとき、次を示せ。

$$H \leq G \Leftrightarrow HH^{-1} \subset H \Leftrightarrow HH^{-1} = H$$

2.2 H を、群 G の空でない有限部分集合とする。このとき、次を示せ。

$$H \leq G \Leftrightarrow HH \subset H$$

2.3 H、K を、群 G の２つの部分群とする。このとき、次を示せ。

$$HK \leq G \Leftrightarrow HK = KH$$

2.4 H、K を、群 G の２つの部分群とする。このとき、次を示せ。

$$H \cup K \leq G \Leftrightarrow H \subset K \text{ または } K \subset H$$

2.5 H、K を、群 G の２つの部分群とする。このとき、次を示せ。

$$L \subset H \Leftrightarrow LK \cap H = L(K \cap H)$$

2.6 $S_n =< (1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n) >$。

2.7 $S_n =< (1,2,\ldots,n), (1,2) >$。

2.8 n 次の置換を互換の積として表すときその個数が偶数であるか、奇数であるかは、表示に依らず一定であることを示せ。

2.9 S_3 の部分群をすべて決定せよ。

2.10 $\boldsymbol{Z}_{12}$ の部分群をすべて決定せよ。

2.11 $\theta = 2\pi/n$ とし、

$$D_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ -\sin k\theta & -\cos k\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

とする。このとき、

$$D_{2n} = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

すなわち、D_{2n} は、２つの位数２の元で生成されることを示せ。実は、この群は、２面体群と「同じ群」として見ることが出来る。

3　剰余類

3.1 $H \le G,\ a, b \in G$ とするとき、次を示せ。

$$Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H,\ aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

特に、$a \in H \Leftrightarrow aH = H \Leftrightarrow Ha = H$。

3.2 $H \le G$、$x \in G$ としたとき、$x^{-1}Hx \le G$ であることを示せ。

3.3 H、K を共に、群 G の有限部分群とする。このとき、$|HK||H \cap K| = |H||K|$ が成り立つことを示せ。（HK は、G の部分群とは限らないことに注意。）

3.4 H、K を共に、群 G の有限部分群とする。$x \in G$ としたとき、HxK は、H の右剰余類の、$|K : K \cap x^{-1}Hx|$ 個の、和集合であることを示せ。

3.5 対称群 S_n の偶置換全体を A_n、σ を奇置換とすると、

$$S_n = A_n + A_n\sigma = A_n + \sigma A_n$$

従って、$|S_n : A_n| = 2$ が成り立つ。

3.6 $K \le H \le G$、$\{a_i \mid i \in I\}$ を $H\backslash G$ の完全代表系、$\{b_j \mid i \in J\}$ を $K\backslash H$ の完全代表系とする。$\{b_ja_i \mid i \in I,\ j \in J\}$ は、$K\backslash G$ の完全代表系であることを示せ。従って、特に、G が有限群なら、$|G : K| = |G : H||H : K|$。（この最後の式は、ラグランジュの定理からも得られる。）

3.7 $H, K \le G$ かつ、$|G : H|$ 有限とする。このとき、次を示せ。

(1) $|K : H \cap K| \le |G : H|$。

(2) $|K : H \cap K| = |G : H| \Leftrightarrow G = HK$。

(3) $|G : K|$ 有限で、$(|G : H|, |G : K|) = 1 \Rightarrow G = HK$。

3.8 $G = S_n$、$H = \{\sigma \in G \mid n^\sigma = n\}$ とすると、$H \le G$。このとき、$H\backslash G$、$H\backslash G/H$ の完全代表系を求めよ。

3.9 $G = S_n$、$K = \{\sigma \in G \mid \{n, n-1\} = \{n^\sigma, (n-1)^\sigma\}\}$ とするとき、　G の (K, K) による両側分解を求めよ。

3.10 $G = GL(n, \boldsymbol{R})$、$B$ を正則な下半三角行列全体、W を、置換行列 (permutation matrix) （すなわち、各行各列に、1 が、丁度 1 個あり、後は、すべて 0 の行列）全体とする。このとき、$G = BWB$ であることを示せ。

ヒント：3.5、3.6 では、$n = 3, 4$、3.7 では、$n = 2, 3$ について、まず考えて見よ。

4 巡回群

4.1 $C_n = \{x \in \boldsymbol{C} \mid x^n = 1\}$ で、1 の n 乗根全体とすると、C_n は、積に関して、位数 n の巡回群になることを示せ。

4.2 $G =< a >$ を位数 n の巡回群、$n = ml$ とする。このとき、$\{x \in G \mid x^m = 1\} =< a^l >$ で、これは、位数 m の巡回群であることを示せ。

4.3 H を位数 m の巡回群 K を位数 n の巡回群とする。$G = H \times K$ とするとき、G が、巡回群であることと、$(m, n) = 1$ とは、同値であることを示せ。

4.4 巡回群 $G =< a >$ において、$< x >= G$ となる元 x を生成元という。このとき、次を示せ。

(1) $|G| = \infty$ ならば、G の生成元は、a と a^{-1} のみ。

(2) $|G| = n$ の時は、$G =< a^i > \Leftrightarrow (i, n) = 1$、特に、生成元の数は、$\phi(n)$ 個。ここで、ϕ は、オイラー関数を表すものとする。すなわち、$\phi(n) = |\{i \mid 1 \leq i \leq n,\ (i, n) = 1\}|$。

4.5 $n = \displaystyle\sum_{m|n} \phi(m)$ を示せ。

（ヒント：位数 n の巡回群の元で、位数が m、$(m \mid n)$ のものは、丁度、$\phi(m)$ 個あることを示し、これを用いよ。）

4.6 G を有限群としたとき、G が、巡回群であることと、次の条件とは、同値であることを示せ。

$$|\{x \in G \mid x^m = 1\}| \leq m \ \text{ for all } m \in \boldsymbol{N}$$

4.7 p を素数とすると、$\phi(p^e) = p^{e-1}(p - 1)$。

4.8 $\boldsymbol{Z}_n^*$ $(n \leq 12)$ で、巡回群でないものをすべて決定せよ。

4.9 $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ $(e_1, \ldots, e_r \neq 0)$ を、n の素因数分解とする。このとき、次を示せ。

$$\phi(n) = n\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{p_r}\Big)$$

4.10 $G = S_4$ とする。

(1) G の巡回部分群をすべて求めよ。

(2) G の部分群で、位数が 4 で、巡回群でないものをすべて決定せよ。

4.11 S_4 の部分群をすべて決定せよ。(現時点では、少し難しい。)

5　正規部分群と剰余群

5.1 $N \leq G$ とするとき、次は同値。

(i) $N \lhd G$ （すなわち $a^{-1}Na = N$ $(\forall a \in G)$）

(ii) $Na = aN$ $(\forall a \in G)$　　(iii) $Na \subset aN$ $(\forall a \in G)$

(iv) $Na \subset aN$ $(\forall a \in G - N)$　　(v) $a^{-1}Na \subset N$ $(\forall a \in G - N)$

(vi) $G = N_G(N) = \{a \in G \mid a^{-1}Na = N\}$

5.2 $H \leq G$、$N \lhd G$、$K \lhd G$ とする。このとき、次を示せ。

(1) $N \lhd HN \leq G$　(2) $NK \lhd G$　(3) $N \cap K \lhd G$　(4) $H \cap N \lhd H$

5.3 $N \lhd H \lhd G$ であっても、$N \lhd G$ ではない例をあげよ。(Hint:$G = S_4$)

5.4 $H \leq Z(G) = \{x \in G \mid xa = ax\ \forall a \in G\}$ とすると、$H \lhd G$ であることを示せ。さらにこのとき、G/H が、巡回群ならば、$G = Z(G)$ すなわち、G は、アーベル群であることを示せ。

5.5 $H \leq G$、$a, b \in G$ とし、$Ha = bH$ ならば、$a, b \in N_G(H) = \{x \in G \mid x^{-1}Hx = H\}$ であることを示せ。また、$Ha \subset aH$ であっても、$a \in N_G(H)$ とは、ならないことがあることを、次の、G と、H を用いて示せ。

$$G = GL(2, \boldsymbol{Q}),\ H = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ x & 1 \end{array} \right) \middle| x \in \boldsymbol{Z} \right\}$$

5.6 S を群 G の部分集合としたとき、

$$N_G(S) = \{x \in G \mid x^{-1}Sx = S\},\ C_G(S) = \{x \in G \mid x^{-1}sx = s\ (\forall s \in S)\}$$

は、共に、G の部分群であり、かつ、$C_G(S) \lhd N_G(S)$ であることを示せ。

5.7 S を群 G の共役類のいくつかの和集合とすると、$< S > \lhd G$ であることを示せ。また、N を G の正規部分群とすると、N は、G の共役類の、和集合であることを示せ。

5.8 S_n の元 σ は、互いに共通な文字を含まない巡回置換の積

$$\sigma = (i_1, \ldots, i_{n_1})(j_1, \ldots, j_{n_2}) \cdots (k_1, \ldots, k_{n_r})$$

と書けるが、このとき、$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$ とし、$(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ を σ の型という。$\sigma, \tau \in S_n$ について、σ と τ が、S_n で共役なことと、σ と τ の型が同じことは、同値であることを示せ。

5.9 S_4 の共役類と、正規部分群をすべて求めよ。

5.10 S_5 の共役類と、正規部分群をすべて求めよ。

6　同型と準同型

6.1 位数 4 の群は、$\boldsymbol{Z}_4$ または、$\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2$ に同型であることを示せ。

6.2 位数 6 の群は、$\boldsymbol{Z}_6$ または、S_3 に同型であることを示せ。

6.3 群 G から G 自身への同型写像（G の自己同型写像）全体を、Aut$G$ と書く。Aut$G$ は、写像の合成に関して、群となることを示せ。（すなわち、Aut$G \leq S^G$。）

6.4 G を位数 n の巡回群とする。このとき、Aut$G \simeq \boldsymbol{Z}_n^*$ であることを示せ。

6.5 群 G の元 x に対し、

$$\iota_x : G \longrightarrow G \ (a \mapsto x^{-1}ax)$$

とすると、$\iota_x \in \mathrm{Aut}G$ であることを、示せ。また、Inn$G = \{\iota_x \mid x \in G\}$ とすると、Inn$G \lhd$ Aut$G$ であることを示せ。

6.6 $f : G \longrightarrow G'$ を群の準同型写像とする。

(1) $H \leq G$ ならば、$f(H) = \{f(h) \mid h \in H\} \leq G'$ であることを示せ。

(2) $H' \leq G'$ ならば、$f^{-1}(H') = \{h \mid f(h) \in H'\} \leq G$ であることを示せ。

6.7 $f : G \longrightarrow G'$ を群の準同型写像とする。

(1) $N \lhd G$ ならば、$f(N) \lhd f(G) = \mathrm{Im}f$ であることを示せ。

(2) $N' \lhd G'$ ならば、$f^{-1}(N') \lhd G$ であることを示せ。

6.8 $f : G \longrightarrow G'$ を群の準同型写像とする。S を G の部分集合とするとき、$N = \mathrm{Ker}f$ とすると、$f^{-1}(f(S)) = SN$ であることを示せ。

6.9 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2) \simeq S_3$ であることを示せ。

6.10 $H \leq G$ で、$H^\sigma = H \ (\forall \sigma \in \mathrm{Aut}G)$ が、成り立つとき、H を G の特性部分群といい、H char G と書く。($H^\sigma = \{h^\sigma \mid h \in H\}$) このとき、次を示せ。

(1) H char G ならば、$H \lhd G$。

(2) N char $H \lhd G$ ならば、$N \lhd G$。

(3) $Z(G)$ char G。

7　同型定理

7.1 S_n を n 次対称群、A_n を n 次交代群（偶置換の全体）とする。$\boldsymbol{R}^*$ で、0 以外の実数のなす乗法群を表すとする。このとき、S_n から、$\boldsymbol{R}^*$ への準同型写像を定義し、S_n/A_n は、位数 2 の巡回群と同型であることを示せ。

7.2 $GL(n,\boldsymbol{R})$ を、n 次実一般線形群（実数体上の正則な n 次正方行列全体が、行列の積に関してなす群、）また、

$$SL(n,\boldsymbol{R}) = \{A \in GL(n,\boldsymbol{R}) \mid \det A = 1\}$$

としたとき、$SL(n,\boldsymbol{R}) \lhd GL(n,\boldsymbol{R})$ であり、かつ、$GL(n,\boldsymbol{R})/SL(n,\boldsymbol{R}) \simeq \boldsymbol{R}^*$ であることを示せ。

7.3 H を、群 G の部分群とすると、$N_G(H)/C_G(H)$ は、$\mathrm{Aut}H$ の部分群と同型であることを示せ。

7.4 $V = \{1,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$ とすると、$V \lhd S_4$ であって、$S_4/V \simeq S_3$ であることを、示せ。(Hint: 前問を用いよ。)

7.5 $G/Z(G) \simeq \mathrm{Inn}G$ であることを、示せ。

7.6 $H = \{\sigma \in S_n \mid \{m+1, m+2, \ldots, n\} = \{(m+1)^\sigma, (m+2)^\sigma, \ldots, (n)^\sigma\}\}$
$N = \{\sigma \in S_n \mid m+1 = (m+1)^\sigma, m+2 = (m+2)^\sigma, \ldots, n = n^\sigma\}$、とすると、$N \lhd H$ かつ、$H/N \simeq S_{n-m}$ であることを示せ。

7.7 $f : G \longrightarrow G$ を、$f(a) = a^{-1}$ によって定義する。このとき、f が、同型写像であることと、G が、アーベル群であることは同値であることを示せ。

7.8 H を、n 次対称群 S_n の奇置換を含む部分群とする。このとき、H の正規部分群 N で、$|H : N| = 2$ となるものが、存在することを示せ。

7.9 N を、G の正規部分群で、かつ、巡回群であるものとする。このとき、$C_G(N) \lhd G$ であってかつ、$G/C_G(N)$ は、アーベル群であることを示せ。

7.10 p を素数とし、H を群 G の部分群、N を G の正規部分群とする。(n,m) で、n と、m の最大公約数を表すものとする。このとき、$(|G : H|, p) = 1$ ならば、$(|N : N \cap H|, p) = 1$ であることを示せ。

7.11 m, n を自然数、d をそれらの最大公約数、$l = mn/d$ とする。

$$\pi : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z},\ (a \mapsto (a + m\boldsymbol{Z}, a + n\boldsymbol{Z}))$$

とするとき、π は、準同型写像であり、かつ、次が成り立つことを示せ。

(a) $\mathrm{Ker}\pi = l\boldsymbol{Z}$.

(b) $\pi :$ 全射 $\Leftrightarrow d = 1$.

8　群の作用

8.1 2^G で、群 G の部分集合全体を表すものとする。

$$2^G \times G \longrightarrow 2^G,\ ((\alpha, a) \mapsto \alpha^a = \{a^{-1}xa \mid x \in \alpha\})$$

により、2^G は、G 集合となる。このとき、$G_\alpha = N_G(\alpha)$ であり、α と G-共役な G の部分集合の数は、$|G : N_G(\alpha)|$ であることを示せ。

8.2 p を素数とし、P を位数が、p^n $(n \geq 1)$ の群とする。(位数が、素数べきの群を p-群と呼ぶ。) このとき、$Z(P) \neq 1$ であることを示せ。
(Hint: 共役類に分け、代表元を $x_1, \ldots, x_r \in Z(P)$、$y_1, \ldots, y_m \notin Z(P)$ とすると、$|P : C_P(y_i)|$ は、全て、p で割り切れ、かつ、次が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned} |P| &= |Z(P)| + \sum_{i=1}^{m} |y_i^P| \\ &= |Z(P)| + \sum_{i=1}^{m} |P : C_P(y_i)|) \end{aligned}$$

8.3 $X = \{(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ は、共役により S_4-集合になることをしめし、これを用いて、$S_4/ < X > \simeq S_3$ となることを示せ。

8.4 H を群 G の指数が、n の部分群とする。$(|G : H| = n)$ このとき、G の正規部分群 $N \subset H$ で、$|G : N|$ は、$n!$ の約数となるものが、存在することを示せ。

8.5 H を群 G の部分群で、$|G : H| = p$ かつ、p は、$|G|$ の約数である素数の中で、最小のものとする。このとき、$H \triangleleft G$ であることを示せ。

8.6 $M(2, \boldsymbol{C})$ を 2 次複素正方行列の全体を表すものとする。

$$M(2, \boldsymbol{C}) \times GL(2, \boldsymbol{C}) \longrightarrow M(2, \boldsymbol{C}),\ ((A, P) \mapsto P^{-1}AP)$$

によって、$M(2, \boldsymbol{C})$ を $GL(2, \boldsymbol{C})$ と見るとき、この作用に関する、$GL(2, \boldsymbol{C})$ 軌道の代表元を全て求めよ。$M(n, \boldsymbol{C})$、$GL(n, \boldsymbol{C})$ の場合は、どうか。

8.7 $S(n, \boldsymbol{R})$ を n 次実対称行列の全体を表し、$O(n, \boldsymbol{R})$ で n 次実直交行列の全体を表すものとする。

$$S(n, \boldsymbol{R}) \times O(n, \boldsymbol{R}) \longrightarrow S(n, \boldsymbol{R}),\ ((A, P) \mapsto P^\top AP)$$

とすると、$S(n, \boldsymbol{R})$ は、$O(n, \boldsymbol{R})$ 集合になる。この作用に関する、$O(n, \boldsymbol{R})$ 軌道の代表元を全て求めよ。

8.8 4 次の可移な置換群を、全て求めよ。

9　有限生成アーベル群の基本定理

9.1 有限アーベル群は、巡回群の直積 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r$ で、E_i は、位数 $e_i > 1$ の巡回群で、e_i は、e_{i+1} の約数というように書いたとき、$(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ を、不変系という（ただし、位数 1 の群の不変系は、(1)）。このとき、それぞれの n について、位数 n のアーベル群の不変系となりうるものを、全てあげよ。これは、位数 n のアーベル群の同型類を決定せよということと同値である。

(a) $n = 8$,　　(b) $n = 16$　　(c) $n = 32$。

9.2 以下のそれぞれの n について、位数 n のアーベル群の不変系となりうるものを、全てあげよ。

(a) $n = 24$,　　(b) $n = 36$　　(c) $n = 72$。

9.3 A を有限アーベル群で、その位数が、$p_1p_2\cdots p_r$ （$p_1, p_2, \ldots, p_r$ は、相異なる素数、）とする。このとき、A は、巡回群であることを示せ。

9.4 p を素数とし、A を不変系が、$(p, p, \ldots, p)$ （p が r 個）である、有限アーベル群とする。

(a) A には、位数が、p の元が、$p^r - 1$ 個あることを示せ。

(b) A には、位数が、p の部分群が、$(p^r - 1)/(p - 1)$ 個あることを示せ。

9.5 p を素数とし、A を不変系が、$(p, p, \ldots, p)$ （p が r 個）である、有限アーベル群とする。A の位数が、p^k の部分群の個数を、$\begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}$ とすると、

$$\begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} = \frac{(p^r - 1)(p^{r-1} - 1)\cdots(p^{r-k+1} - 1)}{(p^k - 1)(p^{k-1} - 1)\cdots(p^1 - 1)}$$

であることを示せ。

9.6 A を有限アーベル群とし、p を $p||A|$ なる素数とすると、いつでも、位数 p の元は、p 個以下であるとする。このとき、A は、巡回群であることを示せ。

9.7 $(\boldsymbol{Q}, +)$ は、有限生成ではないことを示せ。すなわち、

$$\boldsymbol{Q} =< x_1, x_2, \ldots, x_r >= \{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r \mid n_i \in \boldsymbol{Z}\}$$

とは、書けないことを示せ。

9.8 p を素数としたとき、位数が、p^2 である群は、アーベル群であることを示せ。

9.9 $\boldsymbol{C}^*$ で、零以外の複素数のなす乗法群を表すものとする。A を $\boldsymbol{C}^*$ の有限部分群とすると、A は、巡回群であることを示せ。

10　シローの定理

10.1 G を有限群、p を素数、P を G の p-Sylow 部分群とする。このとき、G は、$|G : N_G(P)|$ 個の p-Sylow 部分群を持つことを示せ。また、$P \triangleleft G$ のときは、P char G すなわち、任意の、$\sigma \in \mathrm{Aut}G$ に対して、$P^\sigma = P$ を満たすことを示せ。

10.2 $G = S_4$ とする。

(a) G の 2-Sylow 部分群と、3-Sylow 部分群を一つずつあげよ。

(b) G の 2-Sylow 部分群と、3-Sylow 部分群の数をそれぞれ決定せよ。

10.3 $G = S_5$ とする。

(a) G の 2-Sylow 部分群、3-Sylow 部分群、5-Sylow 部分群を一つずつあげよ。

(b) G の 2-Sylow 部分群、3-Sylow 部分群、5-Sylow 部分群の数をそれぞれ決定せよ。

10.4 p, q を $p > q$ なる素数とし、G を位数が、pq である群、P, Q をそれぞれ、p-Sylow 部分群、q-Sylow 部分群とする。

(a) $P \triangleleft G$ であることを示せ、

(b) $G/C_G(P)$ は、$\boldsymbol{Z}_p^*$ のある部分群と同型である。

(c) q が、$p-1$ の約数でなければ、G は、巡回群となることを示せ。

10.5 $N \triangleleft G$、P を G のある p-Sylow 部分群とすると、$P \cap N$ は、N の p-Sylow 部分群、NP/N は、G/N の p-Sylow 部分群であることを示せ。

10.6 $N \triangleleft G$、Q を N のある、p-Sylow 部分群とすると、$G = N_G(Q)N$ が成り立つことを示せ。

10.7 P を G のある G のある、p-Sylow 部分群とするとき、$N_G(P) \leq H \leq G$ ならば、$N_G(H) = H$ であることを示せ。

10.8 G を位数 12 の非アーベル群とする。P, Q をそれぞれ、2-Sylow 部分群、3-Sylow 部分群とする。

(a) $P \triangleleft G$ ならば、$Q \not\triangleleft G$ であり、G を $Q\backslash G$ 上の置換群と見ると、G は、次数 4 の交代群であることを示せ。

(b) $P \not\triangleleft G$ ならば、$Q \triangleleft G$ であることを示せ。(P がアーベル群になることを用い、G の元で、P の共役に入らない元は 2 個しかないことを示せ。

(c) $P \not\triangleleft G$ ならば、$G \simeq S_3 \times \boldsymbol{Z}_2$ であることを示せ。

11　予備問題

11.1 A を有限アーベル群とする。$\hat{A}$ で、A から　$\boldsymbol{C}^*$　(零以外の複素数のなす乗法群) への、準同型全体を表すものとする。

(a) $\lambda \in \hat{A}$ とすると、$m||A|$ なる、ある、自然数に対して、$\lambda(a)$ $a \in A$ は、1 の m 乗根であることを示せ。

(b) $\lambda, \mu \in \hat{A}$ にたいして、$(\lambda \cdot \mu)(a) = \lambda(a)\mu(b)$ とすると、$\lambda \cdot \mu \in \hat{A}$ であり、この演算に関して、$\hat{A}$ は、アーベル群になることを示せ。

(実は、$A \simeq \hat{A}$ となっています。)

11.2 位数 8 の非アーベル群は、D_8 又は、Q_8 と同型であることを示せ。

11.3 G を位数が 60 で、1 と G 以外に正規部分群を持たないとする。(1 と G 以外に正規部分群を持たない群を単純群と呼ぶ。) P, Q, R をそれぞれ、2-Sylow 部分群、3-Sylow 部分群、5-Sylow 部分群とする。

(a) 5-Sylow 部分群は、6 個存在することを示せ。

(b) 3-Sylow 部分群は、10 個存在することを示せ。

(c) 2-Sylow 部分群は、5 個存在することを示せ。

(d) G は、A_5 と同型であることを示せ。

11.4 G を、有限群とし、σ を、G の自己同型で、位数が 2 のものとする。さらに、

$$C_G(\sigma) = \{x \in G | \sigma(x) = x\} = \{1\}$$

を、満たしているものとする。このとき次の各問いに答えよ。

(a) 写像：$\phi : G \longrightarrow G (x \mapsto x^{-1}\sigma(x))$
は、全単射であることを示せ。

(b) G の、全ての元 x について、$\sigma(x) = x^{-1}$ となっていることを示せ。(ヒント：ϕ が、全射であることを用いよ。)

(c) G は、可換群であることを示せ。

(d) τ を、G の、もう一つの自己同型とすると、τ は、σ と、交換可能であることを示せ。

11.5 G を、位数 n の有限群、C を、位数 n の巡回群とする。また、$f : G \to C$ を、群 G から群 C への、準同型写像とする。このとき、下記の問いに答えよ。

(a) $a \in G$ とすると、$f(a^n) = 1$ であることを示せ。

(b) $a, b \in G$ とすると、$f(a^{-1}b^{-1}ab) = 1$ であることを示せ。

(c) $G/\mathrm{Ker}\ f$ は、巡回群であることを示せ。ただし、

$$\mathrm{Ker}\ f = \{x \in G | f(x) = 1\}.$$

(d) N を G の正規部分群 で、G/N が巡回群となるものであれば、群 G から群 C への、準同型写像 g で、$\mathrm{Ker}\ g = N$ となるものがあることを示せ。

11.6 G を、有限群、H, N を、G の正規部分群とする。このとき、以下のことを証明せよ。

(a) HN は、G の部分群である。

(b) H と N の共通部分は、HN の正規部分群である。

(c) h を H の元、n を N の元とすると、$h^{-1}n^{-1}hn$ は、H と N の共通部分の元である。

(d) H の位数と、N の位数が互いに素ならば、H の元と、N の元の積は、可換である。